I. Введение

Лекция 1. Основные уравнения математической физики (уравнение колебаний, уравнение диффузии, уравнения Пуассона и Лапласа)

Предмет теории уравнений математической физики составляет изучение дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений, описывающих явления природы. Точные рамки этой дисциплины определить довольно трудно. Кроме того, большое разнообразие вопросов, относящихся к уравнениям математической физики, не позволяет охватить их сколько-нибудь полно в университетском курсе.

Наш курс будет посвящен в основном изучению уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией, в частности волнового уравнения, уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа, обычно называемых классическими уравнениями математической физики.

§1. Уравнение колебаний

Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объемов) и физики (электромагнитные колебания) приводят к уравнению колебаний вида

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\operatorname{div}(p\ \operatorname{grad} u)-q\,u+F(x,t), \qquad (1)$$

где неизвестная функция $u(x,t)$ зависит от n $(n=1,2,3)$ пространственных переменных $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и времени t коэффициенты ρ, p и q определяются свойствами среды; $F(x,t)$ – плотность внешнего возмущения. В уравнении (1) в соответствии с определением операторов div и grad

$$\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Продемонстрируем вывод уравнения (1) на примере малых поперечных колебаний струны. Струной называется упругая нить, не сопротивляющаяся изгибу.

Пусть в плоскости (x,u) струна совершает малые поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью x. Обозначим через $u(x,t)$ величину отклонения струны от положения равновесия в точке x в момент времени t, так что $u=u(x,t)$ есть уравнение струны в момент времени t. Мы будем пренебрегать величинами высшего порядка малости по сравнению с $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Так как струна не сопротивляется изгибу, то ее натяжение $\vec{T}(x,t)$ в точке x в момент времени t направлено по касательной к струне в точке x (Рис. 1).

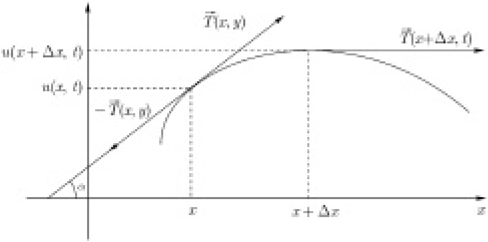

Рис. 1.

Любой участок струны (a,b) после отклонения от положения равновесия в рамках нашего приближения не изменит своей длины

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx b - a$$

и, следовательно, в соответствии с законом Гука величина натяжения $\left|\vec{T}(x,t)\right|$ будет оставаться постоянной, не зависящей от x и t, $\left|\vec{T}(x,t)\right| = T_0$. Обозначим через $F(x,t)$ плотность внешних сил, действующих на струну в точке x в момент времени t и направленных перпендикулярно оси x. Наконец, пусть $\rho(x)$ обозначает линейную плотность струны в точке x так, что $\rho(x)dx$ – масса элементы струны $(x, x+dx)$. Составим теперь уравнение движения струны. На ее элемент $(x, x+dx)$ действуют силы натяжения $\vec{T}(x+dx,t)$, $-\vec{T}(x,t)$ (Рис.1) и внешняя сила, сумма которых, согласно законам Ньютона, должна быть равна произведению массы этого элемента на его ускорение. Проектируя это векторное равенство на ось u, получим

$$T_0 \sin\alpha \Big|_{x+\Delta x} - T_0 \sin\alpha \Big|_x + F(x,t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \qquad (2)$$

Но в рамках нашего приближения

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

и, следовательно, из (2) имеем

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + F(x,t),$$

т.е.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F. \qquad (3)$$

Уравнение (3) и есть уравнение малых поперечных колебаний струны.

Если плотность ρ постоянна, $\rho(x)=\rho$, то уравнение колебаний струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f, \tag{4}$$

где обозначено $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$, $f=\dfrac{F}{\rho}$. Уравнение (4) мы будем также называть одномерным волновым уравнением.

Уравнение вида (1) описывает также малые продольные колебания упругого стержня

$$\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E S\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t), \tag{5}$$

где $S(x)$ – площадь поперечного сечения стержня и $E(x)$ – модуль Юнга в точке x.

Аналогично, выводится уравнение малых поперечных колебаний мембраны

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)+F. \tag{6}$$

Если плотность ρ постоянна, то уравнение колебаний мембраны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)+f, \qquad a^2=\frac{T_0}{\rho}, \quad f=\frac{F}{\rho}. \tag{7}$$

Уравнение (7) мы будем называть двумерным волновым уравнением.

Трехмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)+f \tag{8}$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяет плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

Мы будем записывать волновые уравнения (4), (7) и (8) единой формулой:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f,$$

где Δ – оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

§2. Уравнение диффузии

Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описываются следующим общим уравнением диффузии:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - q\, u + F(x,t). \tag{9}$$

Выведем уравнение распространения тепла. Обозначим через $u(x,t)$ температуру среды в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t, а через $\rho(x)$, $c(x)$ и $k(x)$ – соответственно ее плотность, удельную плотность и коэффициент теплопроводности в точке x. Пусть $F(x,t)$ – интенсивность источников тепла в точке x в момент времени t. Подсчитаем баланс тепла в произвольном объеме V за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$. Обозначим через S границу V, и пусть $\vec{n}$ – внешняя нормаль к ней. Согласно закону Фурье, через поверхность S в объем V поступает количество тепла

$$Q_1 = \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n}\, dS\, \Delta t = \Delta t \iint_S (k \operatorname{grad} u, \vec{n})\, dS,$$

равное, в силу формулы Гаусса–Остроградского,

$$Q_1 = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dx\, \Delta t.$$

За счет тепловых источников в объеме V возникает количество тепла

$$Q_2 = \iiint\limits_V F(x,t)\,dx\,\Delta t\,.$$

Так как температура в объеме V за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ выросла на величину

$$u(x, t+\Delta t) - u(x,t) \approx \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t\,,$$

то для этого необходимо затратить количество тепла

$$Q_3 = \iiint\limits_V c\,\rho \frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,\Delta t\,.$$

С другой стороны, $Q_3 = Q_1 + Q_2$ и поэтому

$$\iiint\limits_V \left[\operatorname{div}(k\operatorname{grad} u) + F - c\,\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right] dx\,\Delta t = 0\,,$$

откуда, в силу произвольности объема V, получаем уравнение распространения тепла

$$c\,\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k\operatorname{grad} u) + F(x,t)\,. \tag{10}$$

Если среда однородна, т.е. c, ρ и k – постоянные, то уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f\,, \tag{11}$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\,\rho}$, $f = \dfrac{F}{c\,\rho}$.

Уравнение (11) называется уравнением теплопроводности.

§3. Стационарное уравнение

Для стационарных процессов $F(x,t) = F(x)$, $u(x,t) = u(x)$ и уравнения колебаний (1) и диффузии (9) принимают вид

$$-\operatorname{div}(p\operatorname{grad} u) + q u = F(x)\,. \tag{12}$$

При $p = \text{const}$, $q = 0$ уравнение (12) называется уравнением Пуассона

$$\Delta u = -f, \qquad f = \frac{F}{p}; \tag{13}$$

при $f = 0$ уравнение (13) называется уравнением Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

Рассмотрим потенциальное течение жидкости без источников, а именно, пусть внутри некоторого объема V с границей S имеет место стационарное течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho = \text{const}$), характеризуемое скоростью $\vec{\upsilon}(x_1, x_2, x_3)$. Если течение жидкости не вихревое $(\text{rot}\,\vec{\upsilon} = 0)$, то скорость $\vec{\upsilon}$ является потенциальным вектором, т.е.

$$\vec{\upsilon} = \text{grad}\, u, \tag{14}$$

где u – скалярная функция, называемая потенциалом скорости. Если отсутствуют источники, то

$$\text{div}\, \vec{\upsilon} = 0. \tag{15}$$

Теперь из формул (14) и (15) получим:

$$\text{div grad}\, u = 0$$

или

$$\Delta u = 0,$$

т.е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

Задачи

1. Абсолютно гибкая однородная нить закреплена на одном из концов и под действием своего веса находится в вертикальном положении равновесия. Вывести уравнение малых колебаний нити.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(l - x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]$, $a^2 = g$, где $u(x,t)$ – смещение точки, l – длина нити, g – ускорение силы тяжести.

2. Вывести уравнение поперечных колебаний струны в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $a^2 = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$.

3. Тяжелая однородная нить длины l прикреплена верхним концом $(x = 0)$ к вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Вывести уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(l - x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + \omega^2 u$, $a^2 = g$.

4. Вывести уравнение диффузии в среде, движущейся со скоростью $\upsilon(x)$ в направлении оси x, если поверхностями равной концентрации в каждый момент времени являются плоскости, перпендикулярные оси x.

Ответ: $c\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}(\upsilon \cdot u)$.

5. Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде для вещества, частицы которого: а) распадаются со скоростью, пропорциональной концентрации; б) размножаются со скоростью, пропорциональной их концентрации.

Ответ: а) $c\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \beta u$; б) $c\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta u$.

6. Исходя из уравнений Максвелла в вакууме:

$$\operatorname{rot} \overline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \overline{E} = 0, \quad \operatorname{div} \overline{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \overline{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t},$$

где $\overline{H}$ – напряженность магнитного поля, $\overline{E}$ – напряженность электрического поля, вывести уравнение для потенциала электрического поля постоянного электрического тока и уравнение для потенциала электростатического поля.