Лекция 2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными

Нашей целью является приведение к каноническому виду в области уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными линейного относительно старших производных

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

§1. Замена независимых переменных

Перейдем от независимых переменных x и y к независимым переменным ξ и η. Пусть

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \qquad (2)$$

– дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем якобиан

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

нигде в рассматриваемой области не обращается в нуль. Тогда систему (2) можно однозначно разрешить относительно x и y в некоторой области точек (ξ, η). Полученные функции $x = x(\xi, \eta)$ и $y = y(\xi, \eta)$ будут также дважды непрерывно дифференцируемыми функциями от ξ и η. С помощью преобразования (2) мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному (1). Естественно возникает задача: как выбрать ξ и η, чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму? Для решения этой задачи преобразуем производные к новым переменным. Полагая

$$u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \omega(\xi, \eta),$$

получаем

$$u_x = \upsilon_\xi \xi_x + \upsilon_\eta \eta_x, \quad u_y = \upsilon_\xi \xi_y + \upsilon_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = \upsilon_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2\upsilon_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \upsilon_{\eta\eta}\eta_x^2 + \upsilon_\xi \xi_{xx} + \upsilon_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = \upsilon_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \upsilon_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + \upsilon_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \upsilon_\xi \xi_{xy} + \upsilon_\eta \eta_{xy}, \tag{3}$$

$$u_{yy} = \upsilon_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2\upsilon_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \upsilon_{\eta\eta}\eta_y^2 + \upsilon_\xi \xi_{yy} + \upsilon_\eta \eta_{yy}.$$

В новых переменных ξ и η уравнение (1), согласно формулам (3), записывается так:

$$\overline{a}_{11}\upsilon_{\xi\xi} + 2\overline{a}_{12}\upsilon_{\xi\eta} + \overline{a}_{22}\upsilon_{\eta\eta} + \overline{F}\left(\xi, \eta, \upsilon, \upsilon_\xi, \upsilon_\eta\right) = 0, \tag{4}$$

где

$$\overline{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,$$

$$\overline{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y\right) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$\overline{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

$$\overline{F} = F + a_{11}\left(\upsilon_\xi\xi_{xx} + \upsilon_\eta\eta_{xx}\right) + 2a_{12}\left(\upsilon_\xi\xi_{xy} + \upsilon_\eta\eta_{xy}\right) + a_{22}\left(\upsilon_\xi\xi_{yy} + \upsilon_\eta\eta_{yy}\right).$$

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент $\overline{a}_{11}$ был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными первого порядка

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0. \tag{5}$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ – какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент $\overline{a}_{11}$, очевидно, будет равен нулю. Итак, задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (5).

§2. Уравнения характеристик

Уравнение (5) связано со следующим обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx\,dy + a_{22}dx^2 = 0, \tag{6}$$

которое мы будем называть характеристическим, а его интегралы – характеристиками. Эта связь устанавливается в следующем предложении:

Лемма. *Если* $z = \varphi(x, y)$ *– решение уравнения* (5), *то соотношение* $\varphi(x, y) = C$ *представляет собой интеграл уравнения* (6). *Обратно, если* $\varphi(x, y) = C$ *– интеграл уравнения* (6), *то функция* $z = \varphi(x, y)$ *удовлетворяет уравнению* (5).

Доказательство. Пусть $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (5). Соотношение $\varphi(x, y) = C$ задает функцию $y = f(x, C)$, для которой

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\bigg|_{y=f(x,C)}.$$

Следовательно, $y = f(x, C)$ удовлетворяет уравнению (6), так как

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = \left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\varphi_x}{\varphi_y} + a_{22}\right]_{y=f(x,C)} = 0.$$

Докажем вторую часть леммы. Пусть $\varphi(x, y) = C$ – интеграл уравнения (6). Через произвольную точку (x_0, y_0) проведем интегральную кривую уравнения (6), полагая $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ и $y = f(x, C_0)$. Очевидно, $y_0 = f(x_0, C_0)$. Для всех точек этой кривой имеем:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = \left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\varphi_x}{\varphi_y} + a_{22}\right]_{y=f(x,C_0)} = 0.$$

Полагая в последнем равенстве $x = x_0$, получим:

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0, y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) + a_{22}\varphi_y^2(x_0, y_0) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Полагая $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = C$ есть интеграл уравнения (6), мы обращаем в нуль коэффициент при $u_{\xi\xi}$. Если $\psi(x, y) = C$ – другой интеграл уравнения (6), независимый от $\varphi(x, y)$, то, полагая $\eta = \psi(x, y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при $u_{\eta\eta}$.

Уравнение (6) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{8}$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения (1). Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением гиперболического типа, если в точке M $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$, эллиптического типа, если $\Delta<0$, и параболического типа, если $\Delta=0$.

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\overline{a}_{12}^2-\overline{a}_{11}\overline{a}_{22}=\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)D^2,$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как якобиан D преобразования переменных отличен от нуля.

§3. Канонические формы уравнения

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Разберем каждый из этих типов в отдельности.

1. Для уравнения гиперболического типа $\Delta>0$ и правые части уравнений (7) и (8) действительны и различны. Общие интегралы их $\varphi(x,y)=C$ и $\psi(x,y)=C$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y), \tag{9}$$

приводим уравнение (4) к виду

$$v_{\xi\eta}=\Phi(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta), \tag{10}$$

где $\Phi=-\dfrac{F}{2\overline{a}_{12}}$. Уравнение (10) называется канонической формой гиперболического уравнения (1). Часто пользуются другой канонической формой. Положим

$$\xi=x'+y',\quad \eta=x'-y',$$

т.е.

$$x' = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad y' = \frac{\xi - \eta}{2},$$

где x' и y' – новые переменные. Тогда, полагая $\upsilon(\xi,\eta) = W(x',y')$, будем иметь

$$\upsilon_\xi = \frac{1}{2}\left(W_{x'} + W_{y'}\right), \quad \upsilon_\eta = \frac{1}{2}\left(W_{x'} - W_{y'}\right), \quad \upsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\left(W_{x'x'} - W_{y'y'}\right).$$

В результате уравнение (10) примет вид

$$W_{x'x'} - W_{y'y'} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

2. Для уравнения параболического типа $\Delta = 0$ уравнения (7) и (8) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (6): $\varphi(x,y) = \mathrm{const}$. Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x,y) \text{ и } \eta = \psi(x,y),$$

где $\psi(x,y)$ – любая функция, независимая от φ. При таком выборе переменных коэффициент

$$\overline{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0,$$

так как $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; отсюда следует, что

$$\overline{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y\right) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$
$$= \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0.$$

Таким образом, мы получаем каноническую форму для уравнения параболического типа

$$\upsilon_{\eta\eta} = \Phi\left(\xi,\eta,\upsilon,\upsilon_\xi,\upsilon_\eta\right), \quad \Phi = -\frac{F}{\overline{a}_{22}}.$$

3. Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и правые части уравнений (7) и (8) комплексны. Пусть

$$\varphi(x,y) = C$$

– комплексный интеграл уравнения (7). Тогда

$$\varphi^*(x,y) = C,$$

где φ^* – сопряженная к φ функция, будет представлять собой общий интеграл сопряженного уравнения (8). При этом уравнение эллиптического типа (1) приводится к (10) при замене переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные x' и y', равные

$$x' = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad y' = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i},$$

так, что

$$\xi = x' + iy', \quad \eta = x' - iy'.$$

В этом случае, полагая $\upsilon(\xi, \eta) = W(x', y')$, будем иметь

$$\upsilon_\xi = \frac{1}{2}(W_{x'} - iW_{y'}), \quad \upsilon_\eta = \frac{1}{2}(W_{x'} + iW_{y'}), \quad \upsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(W_{x'x'} + W_{y'y'}).$$

Следовательно, уравнение (10) принимает вид

$$W_{x'x'} + W_{y'y'} = \Psi(x', y', W, W_{x'}, W_{y'}), \quad \Psi = 4\Phi.$$

В заключение рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $u_{xx} - yu_{yy} = 0$.

Здесь $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = -y, \quad \Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y$. Следовательно, в области $y > 0$ уравнение гиперболично, в области $y < 0$ – эллиптично.

а) Рассмотрим сначала область гиперболичности. Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{y}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{y},$$

а $x - 2\sqrt{y} = C, \quad x + 2\sqrt{y} = C$ – их общие интегралы.

Производя замену независимых переменных $\xi = x - 2\sqrt{y}, \ \eta = x + 2\sqrt{y}$, получим каноническую форму преобразованного уравнения

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_\eta - u_\xi).$$

б) В области эллиптичности $(y<0)$ производим замену переменных

$$x'=\frac{\xi+\eta}{2}=x,\quad y'=\frac{\eta-\xi}{2i}=2\sqrt{-y}.$$

Канонический вид уравнения

$$W_{x'x'}+W_{y'y'}-\frac{1}{2\sqrt{-y}}W_{y'}=0.$$

Пример 2. $xu_{xx}-2\sqrt{xy}u_{xy}+yu_{yy}+0{,}5u_y=0$.

Здесь $a_{11}=x$, $a_{12}=-\sqrt{xy}$, $a_{22}=y$, $\Delta\equiv 0$. Следовательно, это уравнение всюду параболического типа. Оно имеет одно семейство характеристик, описываемых уравнением

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Общий интеграл этого уравнения $\sqrt{x}+\sqrt{y}=C$. Поэтому полагаем $\xi=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, η можно положить равной любой функции $\psi(x,y)$, независимой от ξ. Полагаем, например, $\eta=\sqrt{x}$. Тогда получаем следующий канонический вид уравнения

$$u_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}\left(u_\xi+u_\eta\right)=0.$$

Задачи

1. Привести к каноническому виду уравнения:

а) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$,

б) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$,

в) $x^2u_{xx}+2xy\,u_{xy}+y^2u_{yy}=0$,

г) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$.

2. Введя функцию $\upsilon = u\,e^{\lambda x+\mu y}$ и выбирая параметры λ и μ, упростить следующие уравнения:

а) $u_{xx} + u_{yy} + 3u_x - 5y + 4u = 0$,

б) $u_{xx} + 4u_x - u_y + u = 0$,

в) $u_{xx} - u_{yy} + 4u_x + 4u_y - 2u = 0$.