Лекция 3. Классификация уравнений второго порядка со многими независимыми переменными в точке. Характеристические поверхности

Прежде чем формулировать математические постановки решения различных физических задач, сводящихся к линейным дифференциальным второго порядка относительно старших производных, необходимо классифицировать эти уравнения.

В случае уравнений с двумя независимыми переменными этот вопрос исследован на предыдущей лекции. В этой лекции рассматриваются уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0 \qquad (1)$$

с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

§1. Классификация уравнений в точке

Выясним, как преобразуется уравнение (1) при произвольной невырожденной замене независимых переменных $\xi = \xi(x)$, т.е.

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1,2,\dots, n;$$

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Так как $D \neq 0$, то в некоторой окрестности можно выразить переменные x через ξ, $x = x(\xi)$. Обозначим $u(x(\xi)) = \upsilon(\xi)$; тогда $\upsilon(\xi(x)) = u(x)$. Считая $\xi_l \in C^2$, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \xi_k \partial \xi_s} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} + \\ + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{3}$$

Подставляя выражения для производных (3) в уравнение (1), получим

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \right] \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \xi_k \partial \xi_s} + \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j} \right] \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_k} + \\ + \Phi^*(\xi, \upsilon, \nabla \upsilon) = 0. \tag{4}$$

Здесь $\Phi^*(\xi, \upsilon, \nabla \upsilon) = \Phi(x, u, \nabla u)$. Обозначая теперь через $\widetilde{a}_{ks}$ новые коэффициенты при вторых производных

$$\widetilde{a}_{ks} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} \tag{5}$$

и полагая

$$\widetilde{\Phi}(\xi, \upsilon, \nabla \upsilon) = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j} \right] \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi_k} + \Phi^*(\xi, \upsilon, \nabla \upsilon),$$

перепишем уравнение (4) в виде (1):

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \widetilde{a}_{ks} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \xi_k \partial \xi_s} + \widetilde{\Phi}(\xi, \upsilon, \nabla \upsilon) = 0. \tag{6}$$

Далее фиксируем точку x_0 и положим $\xi_0 = \xi(x_0)$, $\alpha_{kl} = \dfrac{\partial \xi_k(x_0)}{\partial x_l}$. Тогда формула (5) в точке x_0 запишем в виде

$$\bar{a}_{ks}(\xi_0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_0) \alpha_{ki} \alpha_{sj}. \tag{7}$$

Полученная формула преобразования коэффициентов a_{ij} в точке x_0 совпадает с формулой преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_0) p_i p_j \tag{8}$$

при невырожденном линейном преобразовании

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} q_k, \quad \det(\alpha_{kl}) \neq 0, \tag{9}$$

переводящим форму (8) в форму

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ks}(\xi_0) q_k q_s. \tag{10}$$

Итак, чтобы упростить уравнение (1) в точке x_0 с помощью замены переменных (2), достаточно упростить в этой точке квадратичную форму (8) с помощью невырожденного линейного преобразования (9). Но в курсе линейной алгебры доказывается, что всегда существует преобразование (9), при котором квадратичная форма (10) принимает следующий каноничный вид:

$$\sum_{k=1}^{r} q_k^2 - \sum_{k=r+1}^{m} q_k^2, \quad m \leq n; \tag{11}$$

кроме того, в силу закона инерции квадратичных форм, целые числа r и m не зависят от преобразования (9). Это позволяет классифицировать уравнения (1), а именно:

1) если в форме (11) $m = n$ и все слагаемые одного знака (т.е. либо $r = m$, либо $r = 0$), то уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа;

2) если $m = n$, но имеются слагаемые разных знаков (т.е. $1 \le r \le n-1$), то уравнение (1) – гиперболического типа (при $r = 1$ или $r = n-1$ – нормально-гиперболического типа);

3) если $m < n$, то это уравнение (1) – параболического типа (при $r = n-1$ – нормально-параболического типа).

Пусть коэффициенты a_{ij} в уравнении (1) постоянны, т.е. не зависят от x, и пусть преобразование (9) приводит квадратичную форму (8) к каноническому виду (11). Тогда линейная замена независимых переменных

$$\xi_l = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{lk} x_k$$

преобразует уравнение (1) к следующему каноническому виду

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} - \sum_{k=r+1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} + \tilde{\Phi}(\xi, u, \nabla u) = 0. \qquad (12)$$

Примеры. Уравнение Лапласа – эллиптического типа, волновое уравнение – гиперболического типа и уравнение теплопроводности – параболического типа.

Замечание. Выше мы привели способ приведения уравнения (1) к каноническому виду в каждой отдельной точке, где задано это уравнение. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли одним и тем же преобразованием (2) привести уравнение (1) к каноническому виду (12) в достаточно малой окрестности каждой точки? Чтобы это приведение можно было сделать для любого уравнения, необходимо, чтобы число условий

$$\tilde{a}_{ks} = 0, \quad k \ne s, \quad k, s = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\tilde{a}_{kk} = \varepsilon_k \tilde{a}_{11}, \quad k = 2, 3, \ldots, n, \quad \tilde{a}_{11} \ne 0,$$

где $\varepsilon_k = 0, \pm 1$ не превосходило числа неизвестных функций ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 \le n, \qquad \text{т.е. } n \le 2.$$

Как мы показали в лекции 2, это привидение для $n = 2$ всегда можно сделать (для $n = 1$ это очевидно).

§2. Характеристики

Пусть функция $\omega(x)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $n\geq 2$, класса C^1 такова, что на поверхности $\omega(x)=0$ $\nabla\omega(x)=0$ и

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial\,x_i}\cdot\frac{\partial\,\omega(x)}{\partial\,x_j}=0. \tag{13}$$

Тогда поверхность $\omega(x)=0$ называется характеристической поверхностью (или характеристикой) дифференциального уравнения (1). Пусть $\omega\in C^2(G)$ и $\omega-c=0$ – характеристика при $a<c<b$. Тогда, если в преобразовании (2) взять $\xi_1=\omega(x)$, то в силу (5), (13) коэффициент $\bar{a}_{11}$ обратится в нуль в соответствующей области G. Поэтому знание одного или нескольких семейств характеристик дифференциального уравнения дает возможность привести это уравнение к более простому виду.

Примеры характеристик.

1. Для уравнения колебаний струны

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t}\right)^2-a^2\left(\frac{\partial\,\omega}{\partial\,x}\right)^2=0$$

или

$$\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t}-a\frac{\partial\,\omega}{\partial\,x}=0,\quad \frac{\partial\,\omega}{\partial\,t}+a\frac{\partial\,\omega}{\partial\,x}=0.$$

Поэтому мы имеем два семейства характеристик

$$x+at=c \text{ и } x-at=c.$$

2. Характеристическое уравнение для трехмерного волнового уравнения

$$u_{tt}-a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)=f(x,y,z,t)$$

записывается так

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2\left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2\right) = 0.$$

Решением последнего является функция $\omega = a^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2$ на поверхности $\omega = 0$. Следовательно, поверхность

$$a^2(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2 = 0,$$

называемая характеристическим конусом с вершиной в точке (x_0, t_0), есть характеристика волнового уравнения.

Волновое уравнение имеет и другое семейство характеристических поверхностей – семейство плоскостей вида

$$at + a_1 x + a_2 y + a_3 z = c,$$

где a_1, a_2, a_3 и c – любые вещественные числа, причем $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$.

3. Для уравнения теплопроводности

$$u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x, y, z, t)$$

имеем характеристическое уравнение вида

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

Его характеристиками, очевидно, являются семейство плоскостей $t = c$.

4. Уравнение Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + f(x, y, z) = 0$$

не имеет вещественных характеристик, ибо из характеристического уравнения

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 = 0$$

вытекает, что $grad\,\omega = 0$ на $\omega = 0$.

Задачи

Привести к каноническому виду уравнения:

1. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$.

2. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$.

3. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0$.

4. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0$.

5. $u_{x_1x_1} + 2\sum_{k=2}^{n} u_{x_kx_k} - 2\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} = 0$.

6. $\sum_{k=1}^{n} u_{x_kx_k} + \sum_{l<k} u_{x_lx_k} = 0$.