Лекции по уравнениям математической физики

Соловьев Вячеслав Викторович

(черновая версия)
31 декабря 2005 г.

Оглавление

Глава 1

Уравнения с частными производными 2-го порядка и их классификация

§1. Понятие уравнения с частными производными

Определение 1.1. *Пусть даны плоскость π с декартовой прямоугольной системой координат и точки $M_1,\, M_2 \in \pi\colon M_1(x_1,\, y_1),\, M_2(x_2,\, y_2)$. Тогда расстоянием между точками M_1 и M_2 называется величина*

$$\rho(M_1,\, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.1}$$

Определение 1.2. *Пусть на плоскости π задана точка $M_0(x_0,\, y_0)$. Тогда ε-окрестностью точки M_0 называется множество точек $M(x_1,\, y_1)$, удолетворяющих неравеству*

$$\rho(M,\, M_0) < \varepsilon, \quad O_\varepsilon(M_0) = \{(x,\, y)\colon \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\}. \tag{1.2}$$

Определение 1.3. *Множество $\Omega \subset \pi$ называется областью, если это множество*

1. *открыто: $\forall\, M_0 \in \Omega\ \exists\, \varepsilon > 0\colon O_\varepsilon(M_0) \subset \Omega$.*
2. *связно: $\forall\, M_1,\, M_2 \in \Omega\ \exists\, l_{M_1M_2} \subset \Omega$, где $l_{M_1M_2}$ — ломаная с конечным числом звеньев с началом в точке M_1 и концом в точке M_2.*

Определение 1.4. *Пусть функция $u(x,\, y)$ определена в области Ω. Тогда $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$, если в области Ω будут непрерывны*

1. *$u(x,\, y)$;*
2. *$u_x(x,\, y),\, u_y(x,\, y)$;*
3. *$u_{xx}(x,\, y),\, u_{xy}(x,\, y),\, u_{yy}(x,\, y)$.*

Определение 1.5. *Пусть в области Ω определены непрерывные функции $a_{11}(x,\, y)$, $a_{12}(x,\, y)$, $a_{22}(x,\, y)$, $b_1(x,\, y)$, $b_2(x,\, y)$, $c(x,\, y)$, $f(x,\, y)$, при этом $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ для $\forall\,(x,\, y) \in \Omega$, а также задано соотношение между этими функциями, неизвестной функцией $u(x,\, y)$ и её производными, имеющее вид*

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0. \tag{1.3}$$

Тогда говорят, что в области Ω определено линейное уравнение с частными производными 2-го порядка с 2-мя независимыми переменными:

$$\underbrace{a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}}_{\text{старшие(главные) члены}}+\underbrace{b_1u_x+b_2u_y+cu+f}_{\text{младшие члены}}=0. \tag{1.4}$$

Замечание 1. Если $f=0$, то уравнение называется однородным.
Замечание 2. Всюду далее предполагаем, что $a_{ij}, b_k, c \in \mathrm{C}^2(\Omega)$.
Определение 1.6. *Решением линейного дифференциального уравнения с частными производными* (1.3) *в области* Ω*, называется функция* $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$*, при подстановки которой в уравнение* (1.3) *получается верное равенство, т.е.* $u(x,\, y)$ *— решение уравнения* (1.3) *если*

$$\begin{gathered} a_{11}(x,\, y)u_{xx}(x,\, y)+2a_{12}(x,\, y)u_{xy}(x,\, y)+a_{22}(x,\, y)u_{yy}(x,\, y)+ \\ +b_1(x,\, y)u_x(x,\, y)+b_2(x,\, y)u_y(x,\, y)+c(x,\, y)u(x,\, y)+f(x,\, y)=0 \quad \forall\,(x,\, y)\in\Omega. \end{gathered} \tag{1.5}$$

§2. Замена переменных в уравнениях с частными производными. Инвариантность уравнения относительно замены

Пусть функция $u(x,\, y)$ определена в области Ω. Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi &= \varphi(x,\, y) \\ \eta &= \psi(x,\, y) \end{cases}. \tag{2.1}$$

Требования к новым переменным:

1. Область Ω взаимооднозначно отображается на область Ω', т.е. существует взаимооднозначное соответствие между точками $M \in \Omega$ и $M' \in \Omega'$.

2. Если
$$\begin{cases} \xi &= \varphi(x,\, y) \\ \eta &= \psi(x,\, y) \end{cases}, \tag{2.2}$$
то $\varphi,\, \psi \in \mathrm{C}^2(\Omega)$.

Напоминание

Достаточным условием для выполнения требования 1 является:

$$\frac{D(\phi,\, \psi)}{D(x,\, y)}=\begin{vmatrix}\phi_x & \phi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}\neq 0 \text{ для } \forall M\in\Omega, \text{ т.е.}$$

$$\begin{vmatrix}\phi_x & \phi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}=\phi_x\psi_y-\phi_y\psi_x\neq 0 \text{ для } \forall M\in\Omega$$

Пример. *Полярные координаты.*Напомним, что связь между декартовыми $u(x,\, y)$ и полярными координатами $u(\rho,\, \theta)$ осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta,\ \text{где}\cos\theta &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y &= \rho\cos\theta,\ \text{где}\sin\theta &= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}, \tag{2.4}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \text{при} \quad x > 0,\, y > 0. \tag{2.5}$$

Получим

$$\begin{cases} \rho = \rho(x,\, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \theta(x,\, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}, \tag{2.6}$$

$$\frac{D(\rho,\, \theta)}{D(x,\, y)} = \frac{1}{\rho} \neq 0. \tag{2.7}$$

Получим закон преобразования коэфициентов уравнения (1.3) при переходе к новым координатам.

Пусть $u(x,\, y)$ — решение уравнения (1.3). Тогда при замене переменных

$$\begin{cases} x = x(\xi,\, \eta) \\ y = y(\xi,\, \eta) \end{cases} \tag{2.8}$$

получим выражение для функции u в новых координатах:

$$u(x,\, y) = u(x(\xi,\, \eta),\, y(\xi,\, \eta)) = v(\xi,\, \eta). \tag{2.9}$$

Аналогично, в силу взаимной однозначности, получим

$$v(\xi,\, \eta) = v(\xi(x,\, y),\, \eta(x,\, y)) = u(x,\, y). \tag{2.10}$$

Задача

Пусть $u(x,\, y)$ — решение уравнения (1.3). Сделаем замену переменных (2.8).

Требуется найти уравнение, которому удовлетворяет новая функция $v(\xi,\, \eta)$. Для решения этой задачи нужно выразить частные производные функции u через частные производные функции v.

Из определения функции v следует, что:

$$u(x,\, y) = u(x(\xi,\, \eta),\, y(\xi,\, \eta)) = v(\xi,\, \eta) = v(\xi(x,\, y),\, \eta(x,\, y)). \tag{2.11}$$

Дифференцируя равенство (2.11) по x получаем:

$$u_x(x,\, y) = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x, \tag{2.12}$$

$$u_y(x,\, y) = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y. \tag{2.13}$$

Повторно дифференцируя по x равенства (2.12), (2.13) получим:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,\, y) &= (u_x(x,\, y))_x = (v_\xi(\xi(x,\, y),\, \eta(x,\, y))\xi_x(x,\, y))_x + (v_\eta(\xi(x,\, y),\, \eta(x,\, y))\eta_x(x,\, y))_x = \\ &= (v_{\xi\xi}\xi_x + v_{\xi\eta}\eta_x)\xi_x + v_\xi \xi_{xx} + (v_{\xi\eta}\xi_x + v_{\eta\eta}\eta_y)\eta_x + v_\eta \eta_{xx} = \\ &= v_{\xi\xi}\xi_x\xi_x + v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_x + \xi_x\eta_x) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi\xi_{xx} + v_\eta\eta_{xx}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} u_{xy}(x,\, y) &= (u_x(x,\, y))_y = (v_\xi(\xi(x,\, y),\, \eta(x,\, y))\xi_x(x,\, y))_y + (v_\eta(\xi(x,\, y),\, \eta(x,\, y))\eta_x(x,\, y))_y = \\ &= (v_{\xi\xi}\xi_y + v_{\xi\eta}\eta_y)\xi_x + v_\xi \xi_{xy} + (v_{\xi\eta}\xi_y + v_{\eta\eta}\eta_y)\eta_x + v_\eta \eta_{xy} = \\ &= v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi\xi_{xy} + v_\eta\eta_{xy}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$
\begin{aligned}
u_{yy}(x,\,y) = (u_y(x,\,y))_y = (v_\xi(\xi(x,\,y),\,\eta(x,\,y))\xi_y(x,\,y))_y + (v_\eta(\xi(x,\,y),\,\eta(x,\,y))\eta_y(x,\,y))_y = \\
= (v_{\xi\xi}\xi_y + v_{\xi\eta}\eta_x)\xi_y + v_\xi\xi_{yy} + (v_{\xi\eta}\xi_y + v_{\eta\eta}\eta_y)\eta_y + v_\eta\eta_{yy} = \\
= v_{\xi\xi}\xi_y\xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_y\eta_y + \xi_y\eta_y) + v_{\eta\eta}\eta_y\eta_y + v_\xi\xi_{yy} + v_\eta\eta_{yy}.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Подставляя $u(x,\,y)$, $u_x(x,\,y)$, $u_y(x,\,y)$, $u_{xx}(x,\,y)$, $u_{xy}(x,\,y)$, $u_{yy}(x,\,y)$ в уравнение (1.3), получим:

$$
\begin{aligned}
a_{11}(v_{\xi\xi}\xi_x\xi_x + v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_x + \xi_x\eta_x) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi\xi_{xx} + v_\eta\eta_{xx}) + \\
+ +2a_{12}(v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi\xi_{xy} + v_\eta\eta_{xy}) + \\
+ a_{22}(v_{\xi\xi}\xi_y\xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_y\eta_y + \xi_y\eta_y) + v_{\eta\eta}\eta_y\eta_y + v_\xi\xi_{yy} + v_\eta\eta_{yy}) + \\
+ b_1(v_\xi\xi_x + v_\eta\eta_x) + b_2(v_\xi\xi_y + v_\eta\eta_y) + cv + f = 0.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Приводя подобные, получим уравнение (1.3) в новых координатах:

$$
\overline{a}_{11}v_{\xi\xi} + 2\overline{a}_{12}v_{\xi\eta} + \overline{a}_{22}v_{\eta\eta} + \overline{b}_1v_\xi + \overline{b}_2v_\eta + \overline{c}v + \overline{f} = 0, \tag{2.18}
$$

где

$$
\overline{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \tag{2.19}
$$
$$
\overline{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + 2a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\eta_y\xi_y, \tag{2.20}
$$
$$
\overline{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2, \tag{2.21}
$$

т.е. уравнение (1.3) в новых координатах принимает вид:

$$
\underbrace{\overline{a}_{11}v_{\xi\xi} + 2\overline{a}_{12}v_{\xi\eta} + \overline{a}_{22}v_{\eta\eta}}_{\text{старшие(главные) члены}} + \underbrace{F(\xi,\,\eta,\,v_\xi,\,v_\eta,\,v) = 0}_{\text{младшие члены}}. \tag{2.22}
$$

Определение 2.1. *Пусть имеется точка $M \in \Omega$. Уравнение* (1.3) *называется:*

1. *гиперболическим в точке M, если $D(M) = a_{12}^2(M) - a_{11}(M)a_{22}(M) > 0$,*
2. *параболическим в точке M, если $D(M) = a_{12}^2(M) - a_{11}(M)a_{22}(M) = 0$,*
3. *эллиптическим в точке M, если $D(M) = a_{12}^2(M) - a_{11}(M)a_{22}(M) < 0$.*

Определение 2.2. *Уравнение* (1.3) *называется:*

1. *гиперболическим в области Ω, если для $\forall\, M \in \Omega\colon D(M) = a_{12}^2(M) - a_{11}(M)a_{22}(M) > 0$,*
2. *параболическим в области Ω, если для $\forall\, M \in \Omega\colon D(M) = a_{12}^2(M) - a_{11}(M)a_{22}(M) = 0$,*
3. *эллиптическим в области Ω, если для $\forall\, M \in \Omega\colon D(M) = a_{12}^2(M) - a_{11}(M)a_{22}(M) < 0$.*

Теорема 2.1. *Тип уравнения* (1.3) *не меняется при замене переменных (инвариантен относительно замены переменных)*

Доказательство.
□ Для доказательства теоремы достаточно доказать, что $D(M)$ не меняет свой знак при замене переменных, т.е.

$$
\overline{D}(\widetilde{M}) = (\overline{a}_{12}^2 - \overline{a}_{11}\overline{a}_{22}) \tag{2.23}
$$

имеет тот же знак, что и величина

$$
D(M) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}, \tag{2.24}
$$

где M и $\widetilde{M}$ соответствуют друг другу. Для этого в формулу (2.24) подставим выражения (2.19)–(2.21). Получим равенство, проверяемое непосредственно:

$$\overline{D}(\widetilde{M}) = (\overline{a}_{12}^2 - \overline{a}_{11}\overline{a}_{22}) = D(M) = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\underbrace{\left(\frac{D(\varphi,\,\psi)}{D(x,\,y)}\right)^2}_{>0}. \tag{2.25}$$

Из условия (2.25) следует, что $\overline{D}(\widetilde{M}) > 0$, следовательно, тип уравнения (1.3) не меняется при замене переменных. ■

Пример. *Уравнение Лапласа.*

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{2.26}$$

$$u(x,\,y) = v(\rho,\,\theta) = v(\sqrt{x^2+y^2},\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}), \tag{2.27}$$

$$u_x(x,\,y) = v_\rho\rho_x + v_\theta\theta_x = v_\rho\frac{x}{\rho} + v_\theta\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right), \tag{2.28}$$

$$u_y(x,\,y) = v_\rho\rho_y + v_\theta\theta_y = v_\rho\frac{y}{\rho} + v_\theta\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}, \tag{2.29}$$

$$\begin{gathered}u_{xx}(x,\,y) = \left(v_{\rho\rho}\frac{x}{\rho} + v_{\rho\theta}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right)\frac{x}{\rho} + v_\rho\frac{1}{\rho} - \\ - v_\rho\frac{x}{\rho^2}\frac{x}{\rho} - \left(v_{\rho\theta}\frac{x}{\rho} + v_{\theta\theta}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right)\frac{y}{\rho^2} + v_\theta\frac{2y}{\rho^3}\frac{x}{\rho},\end{gathered} \tag{2.30}$$

$$\begin{gathered}u_{yy}(x,\,y) = \left(v_{\rho\rho}\frac{y}{\rho} + v_{\rho\theta}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}\right)\frac{y}{\rho} + v_\rho\frac{1}{\rho} + \\ + v_\rho\frac{y}{\rho^2}\frac{y}{\rho} + v_\theta\left(-\frac{2}{\rho^3}\right)\frac{xy}{\rho} + \left(v_{\rho\theta}\frac{y}{\rho} + v_{\theta\theta}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\rho^2}.\end{gathered} \tag{2.31}$$

Подставляя найденные соотношения в формулу (2.26), получим

$$v_{\rho\rho}(\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2}) + v_{\rho\theta}\cdot 0 + v_{\theta\theta}\frac{x^2+y^2}{\rho^2} + v_\rho(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{x^2+y^2}{\rho^3}) + v_\theta\cdot 0 = 0, \tag{2.32}$$

$$v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}v_\rho + \frac{1}{\rho^2}v_{\theta\theta} = 0. \tag{2.33}$$

$$\tag{2.34}$$

Таким образом, уравнение Лапласа (2.26) в полярных координатах имеет вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} = 0. \tag{2.35}$$

§3. Характеристики уравнения с частными производными

Сведения из ОДУ.

Пусть в области Ω определена непрерывная функция $\mu(x, y)$. Для любой точки $M(x_0, y_0)$ рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ):

$$\begin{cases} y' &= \mu(x, y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases} . \tag{3.1}$$

Определение 3.1. *Функция $g(x,y) \neq const$ определенная в области Ω называется 1 -ым интегралом ОДУ $y' = \mu(x, y)$ в области Ω, если для любого решения ОДУ $y(x)$ в области Ω выполняется тождество $g(x, y(x)) \equiv const$*

Пример.

$$\begin{cases} y' &= y \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} , \tag{3.2}$$

$$\frac{dy}{y} = dx, \tag{3.3}$$

$$y = Ce^x, \tag{3.4}$$

$$g(x, y) = ye^{-x}, \tag{3.5}$$

$$g(x, y(x)) = Ce^x e^{-x} = C. \tag{3.6}$$

Напоминание

Пусть в области $\Omega = \mathbb{R}^2$ дана функция $\rho(x, y) \in \mathrm{C}(\Omega)$, ρ_x, $\rho_y \in \mathrm{C}(\Omega)$. Рассмотрим области Ω уравнение $\rho(x, y) = 0$. Если из этого уравнения по x можно однозначно найти y, то в этом случае говорят, что $y = y(x)$ —неявно заданная функция.

Теорема 3.1. *(Теорема о неявной функции) Пусть в области Ω задана функция $p(x, y)\colon p(x, y)$, $p_x(x, y)$, $p_y(x, y) \in \mathrm{C}^1(\Omega)$, $|p_y(x, y)| \neq 0$ в области Ω, а также существует точка (x_0, y_0) такая, что $p(x_0, y_0) = 0$. Тогда в области Ω найдется прямоугольник $\Pi \in \Omega\colon \Pi = \{(x, y)\colon (x, y) \in \Omega, |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$ такой, что в этом прямоугольнике множество $\{(x, y)\colon p(x, y) = 0\}$ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = y(x)$, т.е. $p(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Pi$ или, что равнозначно, $p(x, y(x)) = 0$.*

Следствие 1. *Пусть выполняется теорема 3.1. Тогда в прямоугольнике $\Pi \in \Omega$ верно равенство*

$$p(x, y(x)) = 0, |x - x_0| < a, \quad a > 0 \tag{3.7}$$

Дифференцируя уравнение (3.7)*, получим равенство:*

$$p_x + p_y y' x = 0, \tag{3.8}$$

следовательно

$$y'_x = -\frac{p_x(x, y)}{p_y(x, y)}. \tag{3.9}$$

Рассмотрим в области Ω уравнение с частными производными

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f = 0. \tag{3.10}$$

Определение 3.2. *ОДУ, заданное в области Ω и имеющие вид*

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dy^2 = 0, \quad (x,\, y) \in \Omega \tag{3.11}$$

называется характеристическим уравнением для уравнения (3.10)*, а его решение в области Ω, проходящее через точку $(x_0, y_0) \in \Omega$, называется характеристикой уравнения* (3.11)*, проходящей через точку (x_0, y_0).*

Рассмотрим в области Ω уравнение с частными производными 1 -го порядка

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0, \quad (x,\, y) \in \Omega. \tag{3.12}$$

Решением этого уравнения будем называть функцию $z(x,\, y)$,$z \in \mathrm{C}^1(\Omega)$, удовлетворяющую условию (3.11).

Лемма 3.1. *Пусть $a_{11} \neq 0$ в области Ω и $\chi(x,\, y) = C$ —1 -ый интеграл ОДУ* (3.11) *в области Ω,причем $\chi_y \neq 0$ в области Ω. Пусть также через каждую точку $(x_0, y_0) \in \Omega$ проходит интегральная кривая уравнения* (3.11)*. Тогда $z(x,\, y) = \chi(x,\, y)$ —решение уравнения* (3.12) *в области Ω, т.е.*

$$a_{11}(\chi_x)^2 + 2a_{12}\chi_x\chi_y + a_{22}(\chi_y)^2 \equiv 0 \tag{3.13}$$

Доказательство.

□

Пусть $z(x,\, y) = \chi(x,\, y)$ —1 -ый интеграл уравнения (3.11). Тогда покажем, что для $\forall\,(x_0,\, y_0) \in \Omega$ выполняется равенство

$$\left(a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2\right)|_{(x_0,y_0)} = 0 \tag{3.14}$$

Для этого через точку (x_0, y_0) проведем интегральную кривую уравнения (3.11) как решение задачи Коши

$$\begin{cases} a_{11}dx^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dy^2 &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}. \tag{3.15}$$

По условию теоремы получим некоторую интегральную кривую

$$\begin{cases} y &= y(x) \\ y_0 &= y(x_0) \end{cases}. \tag{3.16}$$

Тогда $z(x,\, y)|_{y=y(x)} = \chi(x, y(x)) \equiv const = \chi(x_0, y_0)$. Функция $y(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 — на интервале I_1. Однако по условию теоремы $\chi_y \neq 0$ в Ω, следовательно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) прямоугольника Π по теореме 3.1 существует функция $\widetilde{y}(x)$, определенная на интервале $I_2 \subset I_2$, для которой

$$\begin{cases} \chi(x, \widetilde{y}(x)) = \chi(x_0, y_0) \\ \widetilde{y}(x_0) = y_0 \end{cases}. \tag{3.17}$$

Тогда по следствию 1 теоремы 3.1 имеем равенство на множестве $(x, y(x))$,$x \in I_2$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\chi_x}{\chi_y}, \tag{3.18}$$

и функция $y(x)$ на интервале I_1 удовлетворяет уравнению

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0. \tag{3.19}$$

Из равенств (3.18), (3.19) получим уравнения:

$$a_{11}\left(-\frac{\chi_x}{\chi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\chi_x}{\chi_y}\right) + a_{22} = 0, \tag{3.20}$$
$$a_{11}(\chi_x)^2 + 2a_{12}\chi_x\chi_y + a_{22}(\chi_y)^2 = 0. \tag{3.21}$$

Последнее равенство выполняется для $\forall\, x \in I_2$, следовательно оно выполняется и в точке (x_0, y_0):

$$a_{11}(x_0,\, y_0)(\chi_x(x_0,\, y_0))^2 + 2a_{12}(x_0,\, y_0)\chi_x(x_0,\, y_0)\chi_y(x_0,\, y_0) + a_{22}(x_0,\, y_0)\chi_y^2(x_0,\, y_0) = 0. \tag{3.22}$$

Это значит, что $z(x,\, y) = \chi(x,\, y)$ удовлетворяет уравнению (3.12) в точке $(x_0,\, y_0)$, но т.к. точка $(x_0,\, y_0)$ —произвольная точка области Ω, то уравнение (3.12) выполнено для $\forall\,(x,\, y) \in \Omega$. ■

§4. Приведение уравнения гиперболического типа к каноническому виду

Теорема 4.1. *Пусть в области* Ω *уравнение* (3.10) *имеет гиперболический тип и* $a_{11} \neq 0$, *а в окрестности точки* $M_0 \in \Omega$ *функции* $\varphi(x,\, y) = C_1$, $\psi(x,\, y) = C_2$ *—1-ые интегралы уравнения характеристик* (3.11) *такие, что* $\varphi_y(x_0,\, y_0) \neq 0$, $\psi_y(x_0,\, y_0) \neq 0$. *Тогда при переходе в новые координаты*

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,\, y) \\ \eta = \psi(x,\, y) \end{cases} \tag{4.1}$$

уравнение (3.10) *в окрестности точки* $M_0(x_0,\, y_0)$ *принимает вид:*

$$v_{\xi\eta} + f(\xi, \eta, v_\xi, v_\eta, v) = 0. \tag{4.2}$$

Доказательство.
□

Пусть функции $\varphi(x,\, y) = C_1$, $\psi(x,\, y) = C_2$ —1 -ые интегралы уравнения характеристик. По теореме 4.1 при замене переменных (4.1) получим:

$$\overline{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \tag{4.3}$$
$$\overline{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2. \tag{4.4}$$

Но в силу Леммы 3.1 при замене переменных

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,\, y) \\ \eta = \psi(x,\, y) \end{cases} \tag{4.5}$$

в окрестности точки M_0 $\overline{a}_{11} = 0$, $\overline{a}_{22} = 0$. Для обоснования данных утверждений, необходимо доказать, что такая замена допустима в окрестности точки M_0, т.е. надо доказать, что в этой окрестности

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x,\, y)} \neq 0. \tag{4.6}$$

Проведем доказательство от противного, а именно примем, что $\dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x,\, y)} = 0$ в точке M_0.

Уравнение (3.11) можно разрешить относительно $\dfrac{dy}{dx}$, так как $a_{11} \neq 0$. Тогда получим:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{4.7}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{4.8}$$

Далее рассмотрим матрицу:

$$\begin{pmatrix} \varphi_x(M_0) & \varphi_y(M_0) \\ \psi_x(M_0) & \psi_y(M_0) \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Пусть в точке $M_0 \in \Omega$ $\dfrac{D(\xi,\, \eta)}{D(x,\, y)} = 0$. Тогда строки матрицы (4.9) будут линейно зависимы, т.е. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Так как $\varphi_y(M_0) \neq 0$, $\psi_y(M_0) \neq 0$, то

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{\psi_x}{\psi_y}. \tag{4.11}$$

Для решений уравнений (4.7), (4.8), проходящих через точку M_0 выполнены равенства:

$$\varphi(x,\, y_1(x)) = C_1, \psi(x,\, y_2(x)) = C_2, \tag{4.12}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения уравнений (4.7), (4.8).
Продифференцируем равенство (4.12) по x в окрестности точки x_0:

$$\begin{cases} \varphi_x + \varphi_y \dfrac{dy_1}{dx} = 0 \\ \psi_x + \psi_y \dfrac{dy_2}{dx} = 0 \end{cases}. \tag{4.13}$$

Так как $\varphi_y \neq 0$, $\psi_y \neq 0$, то из условий (4.13) получаем:

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{dy_2}{dx}. \tag{4.14}$$

Следовательно, получили:

$$\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{4.15}$$

Из равенства (4.15) получаем

$$2\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} = 0. \tag{4.16}$$

Таким образом $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, а это противоречит определению уравнения гиперболического типа. Таким образом замена переменных (4.1) допустима и уравнение (3.10) в новых координатах имеет вид:

$$2\overline{a}_{12} v_{\xi\eta} + \overline{f}(\xi, \eta, v_\xi, v_\eta, v) = 0. \tag{4.17}$$

В силу инвариантности типа уравнения при замене переменных $\overline{D}(M_0) = \overline{a}_{12}^2 - \overline{a}_{11}\overline{a}_{22} = \overline{a}_{12} > 0$, следовательно $\overline{a}_{12}(M_0) \neq 0$, но тогда в некоторой окрестности точки M_0 и $\overline{a}_{12}(x,\, y) \neq$

0. Разделив уравнение (4.17) на $\overline{a}_{12}$ в этой окрестности, получим окончательный вид уравнения (3.10) в окрестности точки $M_0(x_0,\, y_0)$:

$$v_{\xi\eta} + f(\xi, \eta, v_\xi, v_\eta, v) = 0. \tag{4.18}$$

■

Определение 4.1. *Запись уравнения гиперболического типа в виде*

$$v_{\xi\eta} + f(\xi, \eta, v_\xi, v_\eta, v) = 0 \tag{4.19}$$

называется записью уравнения в каноническом виде, а сами координаты

$$\begin{array}{rcl} \xi & = & \xi(x,\, y) \\ \eta & = & \eta(x,\, y) \end{array}, \tag{4.20}$$

в которых уравнение (3.10) *принимает вид* (4.19) *называются каноническими.*

Замечание 1. Запись уравнения гиперболического типа в форме (4.19) также называется 1-ой канонической формой записи уравнения гиперболического типа. При замене переменных

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \xi + \eta \\ \beta & = & \xi - \eta \end{array} \tag{4.21}$$

получаем другую форму записи уравнения:

$$v_{\alpha\alpha} - v_{\beta\beta} + \widetilde{f}(\alpha, \beta, v_\alpha, v_\beta, v) = 0, \tag{4.22}$$

называемую 2-ой канонической формой записи уравнения гиперболического типа.

Замечание 2. Предполагая $a_{22}(M_0) \neq 0$ в теореме 4.1 и взяв уравнение характеристик в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{4.23}$$

можно привести уравнение гиперболического типа к каноническому виду.

§5. Канонический вид уравнений параболического и эллиптического типа

а) Канонический вид уравнения параболического типа.
Для уравнения параболического типа имеем:

$$D(M) = 0,\ a_{12}^2(M) - a_{11}(M)\, a_{22}(M) = 0,\ a_{11}(M) \neq 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{11}}.$$

Отсюда находим 1-й интеграл уравнения характеристик $\varphi(x, y) = C$.

Сделаем замену переменных (4.20), где $\psi(x, y)$ — произвольная функция, такая, что $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \neq 0$.

Найдем вид уравнения при такой замене переменных.

Пусть тогда $M_0 \in \Omega$, тогда $D(M_0) = 0$, так как всюду в окрестности Ω $D(M) = 0$; $a_{11}(M_0) > 0$.

$$D(M_0) = 0 \;\Rightarrow\; a_{11}(M_0)\, a_{22}(M_0) = a_{12}^2(M_0) > 0 \;\Rightarrow a_{22}(M_0) > 0,$$

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\,\xi_x^2 + 2\,a_{12}\,\xi_x\,\xi_y + a_{22}\,\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\,\xi_x)^2 + 2\,\sqrt{a_{11}}\,\sqrt{a_{22}}\,\xi_x\,\xi_y + (\sqrt{a_{12}}\,\xi_y)^2 =$$

$= (\sqrt{a_{11}}\,\xi_x + \sqrt{a_{22}}\,\xi_y)^2 = 0$, так как $\xi(x, y)$ – 1-й интеграл уравнения характеристик.

Тогда для $\bar{a}_{12}$ имеем

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\,\xi_x\,\eta_x + a_{12}\,(\xi_x\,\eta_y + \xi_y\,\eta_x) + a_{22}\,\xi_y\,\eta_y = \underbrace{(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x + \sqrt{a_{12}}\,\xi_y)}_{0}(\sqrt{a_{11}}\,\eta_x + \sqrt{a_{12}}\,\eta_y) = 0.$$

Получим $\bar{a}_{11} = 0$, $\bar{a}_{12} = 0$, следовательно $\bar{a}_{22} \neq 0$, так как, если $\bar{a}_{22} = 0$, то уравнение примет вид

$$f(\xi, \eta, v_\xi, v_\eta, v) = 0.$$

Но тогда, сделав обратную замену $\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$, получим уравнение 1-го порядка.

Возникает противоречие, так как само уравнение, которое мы приводим, 2-го порядка, следовательно, $\bar{a}_{22}(M_0) \neq 0$. Поэтому при использовавшейся замене получим следующую запись уравнения:

$$\bar{a}_{22}\,v_{\eta\eta} + \bar{f}(\xi, \eta, v_\xi, v_\eta, v) = 0,\;\; \bar{a}_{22} \neq 0. \tag{5.1}$$

Равенство (5.1) можно разделить на $\bar{a}_{22}$, и тогда уравнение параболического типа будет приведено к каноническому виду:

$$v_{qq} + f(\xi, \eta, v_\xi, v_\eta, v) = 0. \tag{5.2}$$

Определение 5.1. *Запись уравнения параболического типа в виде* (5.2) *называется канонической формой записи уравнения параболического типа, а координаты, в которых уравнение примет вид* (5.2)*, называются каноническими.*

б) Канонический вид уравнения эллиптического типа.

В этом случае $D(M) < 0$.

Уравнение характеристик: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_{12} \pm 2\,\sqrt{|D|}}{a_{11}}$

Следовательно, 1-й интеграл этого уравнения $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\,\varphi_2(x, y) = C,\; C \in \mathbb{C}$

Аналогично уравнению гиперболического типа, если сделать замену переменных $\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) = R \\ \eta = \varphi_2(x, y) = I \end{cases}$

то уравнение эллиптического типа примет канонический вид:

$$v_{\xi\,\xi} + v_{\eta\,\eta} + f(\xi, \eta, v_\xi, v_\eta, v) = 0 \tag{5.3}$$

Определение 5.2. *Запись уравнения эллиптического типа в виде* (5.3) *называется канонической формой записи уравнения эллиптического типа, а координаты, в которых уравнение примет вид* (5.3)*, называются каноническими.*

Примечание: канонические координаты определяются неоднозначно. Для получения других координат можно, например,возвести в квадрат 1-й интеграл уравнения характеристик.

Глава 2

Постановка задач математической физики

§1. Уравнение поперечных колебаний струны

Определение 1.1. *Струна - это упругая нить, не сопротивляющаяся изгибу, но оказывающая сопротивление растяжению.*

Пусть имеется струна длиной $l > 0$. Направим ось Ox вдоль струны, находящейся в положении равновесия, причем $x = 0$ — левый конец струны, а $x = l$ — правый конец струны. Возьмем ось Ou, перпендикулярную к Ox, и будем рассматривать только поперечные колебания струны, т.е. движение точек струны происходит перпендикулярно оси Ox.

Обозначим $u(x,t)$ — смещение точки струны в плоскости (x,u) от положения струны при $u = 0$ в момент времени t.

Будем предполагать, что смещение $u \in \mathrm{C}^2$, а отклонения точек струны от положения равновесия малы по сравнению с ее длиной, т.е. $|u_x| \ll 1$

Пусть $u(x+\Delta x,t) - u(x,t) = \Delta u$, $\Delta l \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2} = \sqrt{\Delta x^2 + u_x^2\,\Delta x^2} = \sqrt{1+u_x^2}\,\Delta x$ — длина кусочка струны.

Тогда длина куска струны, состоящего из множества кусочков:

$$\Delta l = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}\,dx \approx x_2 - x_1,\ \ |u_x^2| \ll 1. \tag{1.1}$$

Из вышеуказанного следует, что точки струны колеблются перпендикулярно оси Ox, но при этом расстояния между ними не меняются.

Напоминание *Закон Гука*

Была длина L, применили силу T, стала L',$T = T(L')$.
Тогда закон Гука имеет вид:

$$T(L') = E\,S\,\frac{L'-L}{L} = E\,S\,\frac{\Delta L}{L}, \tag{1.2}$$

где L - первоначальная длина,
L' - полная длина,
S - площадь попереного сечения,
E - модуль Юнга.

Так как по нашим предположениям о струне расстояния между точками струны не меняются, то натяжение струны не будет зависеть от времени, следовательно, $T = T(x)$.

Определение 1.2. *Натяжением называется сила, с которой правый кусок стержня (струны) действует на левый.*

Пусть $\rho(x)$ — линейная плотность струны, а $\Delta m \approx \rho\,\Delta x$ — масса кусочка струны.

Следовательно, $\Delta m = \int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\,d\xi$ — это масса куска струны, для которого координаты по оси Ox меняются от x_1 до x_2. Тогда:

1) Будем предполагать, что на струну действуют распределенные силы, где

$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi,t)\,d\xi$ — сила, действующая на кусок струны, для которого координаты по оси Ox меняются от x_1 до x_2.

2) Введем обозначения для углов касательных к функции $u(x,t)$: $\alpha(x_1,t)$, $\alpha(x_2,t)$.

Применим к куску струны с координатами по оси Ox, меняющимися от x_1 до x_2, 2-й закон Ньютона:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\,d\xi \cdot u_{tt}(\hat{x},t) = T(x_2)\,\sin\alpha(x_2,t) - T(x_1)\,\sin\alpha(x_1,t) + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi,t)\,d\xi, \tag{1.3}$$

где $\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\,d\xi$ — масса куска струны, $\hat{x}$ —центр масс куска, $u_{tt}(\hat{x},t)$ —ускорение центра масс куска.

Минус в правой части уравнения (1.3) имеет место, т.к. в точке x по 3-му закону Ньютона на кусок струны действует сила $(-T(x_1))$.

Заметим, что

$$T(x_i)\,\sin\alpha(x_i,t) = T(x_i)\,\frac{u_x(x_i,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x_i,t)}} \approx T(x_i)\,u_x(x_i,t), \tag{1.4}$$

что следует из геометрического смысла производной.

$$\operatorname{tg}\alpha(x_i,t) = u_x(x_i,t).$$

По теореме о среднем для равенства (1.4) можно получить соотношения:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\,d\xi = \rho(x^*)\,\Delta x, \quad \int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi,t)\,d\xi = f(x^{**},t)\,\Delta x. \tag{1.5}$$

$$x_1 < x^* < x_2,\ x_1 < x^{**} < x_2,\ x_1 < \hat{x} < x_2$$

Подставив соотношения (1.5) в равенство (1.4) и разделив их на Δx, получим:

$$\rho(x^*)\,u_{tt}(\hat{x},t) = \frac{T(x_2)\,u(x_2,t) - T(x_1)\,u_x(x_1,t)}{\Delta x} + f(x^{**},t). \tag{1.6}$$

$$x_2 \to x_1 = \Delta x \to 0 \Rightarrow x^* \to x,\ x^{**} \to x,\ \hat{x} \to x$$

Таким образом уравнение малых поперечных колебаний струны имеет вид:

$$\rho(x)\,u_{tt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t). \tag{1.7}$$

При условиях, что $\rho = Const$ и $T(x) = T \approx Const$ волновым уравнением будет уравнение:

$$u_{tt} = a^2\,u_{xx} + \frac{f(x,t)}{\rho}, \tag{1.8}$$

где a — скорость звука в струне.

§2. Уравнение малых продольных колебаний стержня

Пусть имеется стержень длины $l > 0$, лежащий вдоль оси Ox, причем сечения степжня расположены перпендикулярно оси Ox.
Тогда $S(x)$ —плотность поперечного сечения стержня,
$E(x)$ — модуль Юнга,
$\rho(x)$ — плотность стержня.

Рассмотрим продольные колебания стержня. Будем предполагать, что все точки стержня, находящиеся в одном, перпендикулярном оси Ox сечении движутся одинаково, $u(x,t)$ — отклонение точки стержня, имеющей в момент времени t координату x по оси Ox.

Запишем закон Гука в дифференциальной форме. Расссмотрим кусок стержня с начальными координатами $(x, x+\Delta x)$. Тогда в момент времени t эти координаты изменятся таким образом:

$$x \to x + u(x,t),$$

$$x + \Delta x \to x + \Delta x + u(x+\Delta x, t).$$

Тогда по закону Гука:

$$T(x+\Delta x, t) = E(x+\Delta x, t)\, S(x+\Delta x)\, \frac{\Delta L}{L}. \tag{2.1}$$

Найдем изменение длины ΔL:

$$\Delta L = (x + \Delta x + u(x+\Delta x, t)) - (x + u(x,t)) - \Delta x = u(x+\Delta x, t) - u(x,t), \tag{2.2}$$

где $L = \Delta x$ — первоначальная длина стержня,
$x + \Delta x + u(x+\Delta x, t)$ — новая правая координата стержня,
$x + u(x,t)$ — новая левая координата стержня.

Следовательно,

$$T(x+\Delta x, t) = E(x+\Delta x)\, S(x+\Delta x)\, \frac{u(x+\Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}. \tag{2.3}$$

$$\Delta x \to 0 \ x_2, \to x_1 = x$$

Получаем закон Гука в дифференциальной форме:

$$T(x) = E(x)\, S(x)\, u_x(x,t). \tag{2.4}$$

Пусть на кусок стержня действуют массовые силы, причем

$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi,t)\, d\xi$ - сила, которая действует на кусок стержня, координаты которого по оси Ox меняются от x_1 до x_2.

Тогда запишем 2-й закон Ньютона, проектируя все силы, действующие на кусок стержня, на ось Ox:

$$\Delta m\, u_{tt}(\hat{x}, t) = S(x_2)\, E(x_2)\, u_x(x_2,t) - S(x_1)\, E(x_1)\, u_x(x_1,t) + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi,t)\, d\xi, \tag{2.5}$$

где $S(x_1)\, E(x_1)\, u_x(x_1,t)$ — сила натяжения, с которой левый кусок стержня действует на правый,

$S(x_2)\,E(x_2)\,u_x(x_2,t)$ — сила натяжения, с которой правый кусок действует на левый.
По теореме о среднем имеем:

$$\Delta m = \int\limits_{x_1}^{x_2} S(\xi)\,\rho(\xi)\,d\xi = S(x^*)\,\rho(x^*)\,(x_2 - x_1), \tag{2.6}$$

$$x_1 < x^* < x_2$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi,t)\,d\xi = f(x^{**},t)\,(x_2 - x_1). \tag{2.7}$$

$$x_1 < x^{**} < x_2$$

Подставив выведенные соотношения в уравнение (2.5) и разделив его на $\Delta x = x_2 - x_1$, получим следующее равенство:

$$\rho(x^*)\,S(x^*)\,u_{tt}(\hat{x},t) = \frac{S(x_2)\,E(x_2)\,u(x_2,t) - S(x_1)\,E(x_1)\,u_x(x_1,t)}{\Delta x} + f(x^{**},t). \tag{2.8}$$

При условии, что $\Delta x \to 0,\ x_2 \to x_1 = x$ это уравнение является уравнением малых продольных колебаний стержня:

$$S(x)\,\rho(x)\,u_{tt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\,E(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t). \tag{2.9}$$

В том случае, если

$$S(x) = S = Const,$$

$$\rho(x) = \rho_0 = Const,$$

$$E(x) = E_0 = Const,$$

получим волновое уравнение:

$$u_{tt} = a^2\,u_{xx} + \frac{f(x,t)}{\rho\,S}, \tag{2.10}$$

где $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$. Оба выведенных уравнения - гиперболические, т.к. $a_{12} = 0,\ a_{11} = 1,\ a_{22} = a^2$, следовательно, $D(M) > 0$.

§3. Уравнение теплопроводности

1°. Закон Фурье:

Пусть Ω —ограниченная область в трехмерном пространстве,
$u(\bar{r},t)$ — температура тела в момент времени t с радиус-вектором $\bar{r}$ (скалярное поле, заданное в Ω),

$\bar{j}$ — плотность потока тепла (векторное поле, заданное в Ω).

Тогда количество тепла, проходящее через ΔS с нормалью $\bar{n}$ за время Δt равно:

$$\Delta Q = (\bar{j}\cdot\bar{n})\cdot\Delta S\cdot\Delta t$$

Закон Фурье:

$$\bar{j} = -k\,\mathrm{grad}\,u,$$

где $k(x,t)$ — коэффициент теплопроводности.

$$\operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta Q = -k \underbrace{(\operatorname{grad} u, \bar{n})}_{\dfrac{\partial u}{\partial n}} \Delta S\, \Delta t = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S\, \Delta t.$$

Если Δt мало, то для интервала времени (t_1, t_2):

$\Delta Q = -\int\limits_{t_1}^{t_2} k(\bar{r},t) \dfrac{\partial u}{\partial n}(\bar{r},t)\, \Delta S\, dt$ - количество тепла, проходящее через площадку ΔS с нормалью $\bar{n}$ за время $t_2 - t_1$.

2°. Если взять небольшой объем вещества ΔV и изменить температуру этого вещества на Δu:

$$\Delta Q = C \cdot \Delta m \cdot \Delta u = C\, p\, \Delta V\, \Delta u,$$

$$\Delta u = u_1 - u_2$$

где u_1 — начальная температура,
u_2 — конечная температура,
ρ — плотность вещества,
C — теплопроводность.

3°. Объемный и линейный источники тепла.

Объемный источник тепла:

$\Delta Q = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_V f(\bar{r},t)\, d\bar{r}\, dt$ — количество тепла, выделяемой источником за время $t_2 - t_1$ в объеме V.

Линейный источник тепла:

$\Delta Q = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{S(x)} f(x,y,z,t)\, dy\, dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{x_1}^{x_2} dx\, \bar{f}(x,t)$ — количество тепла, выделяемое источником за время $t_2 - t_1$ на промежутке (x_1, x_2).

4°. Закон Ньютона теплообмена с внешней средой.

Рассмотрим границу области Ω с внешней средой, площадка ΔS лежит на границе.

Пусть в точке $\bar{r}$, где $\bar{r} \in \Delta S$:

$\bar{u}(\bar{r},t)$ — температура площадки,

$\theta(\bar{r},t)$ — температура внешней среды на границе.

Тогда закон Ньютона теплообмена с внешней средой имеет вид:

$$\Delta Q = h[u(\bar{r},t) - \theta(\bar{r},t)]\, \Delta S\, \Delta t, \tag{3.1}$$

где h — коэффициент теплообмена с внешней средой,
ΔQ — количество тепла, проходящее через границу площадки ΔS за время Δt при температуре внешней среды $\theta(\bar{r},t)$.

На основании $1^\circ - 4^\circ$, а также используя закон сохранения энергии, получим уравнение теплопроводности в стержне при $0 < x > l$, диаметром $d > 0$.

Пусть $\dfrac{d}{l} \ll 1$, тогда будем считать, что температура в стержне зависит только от координаты x и времени t, т.е. $u = u(x,t)$, а также, что с боков стержень теплоизолирован.

Обозначим $S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня.

Рассмотрим кусок стержня от x_1 до x_2. Если этот кусок разбить на малые кусочки, то считая в каждом из кусочков температуру постоянной, $\sum c_i \rho_i S_i \Delta x_i \Delta u_i$ — количество тепла, необходимое для изменения температуры кусочка на Δu_i.

Тогда при $\Delta x_i \to 0$:

$\int\limits_{x_1}^{x_2} c(x)\,\rho(x)\,S(x)\,\Delta u(x)\,dx$ — количество тепла, необходимое для того, чтобы изменить температуру куска на $\Delta u(x)$,

$\int\limits_{x_1}^{x_2} c(x)\,\rho(x)\,S(x)\,[u(x,t_2) - u(x,t_1)]\,dx$ — количество тепла, полученное телом за время $t_2 - t_1$, для изменения температуры от $u(x,t_1)$ до $u(x,t_2)$.

Через сечение x_2 получим количество тепла:

$$-(-\int\limits_{t_1}^{t_2} k(x_2,\tau)\,\frac{\partial u}{\partial n}(x_2,\tau)\,S(x_2)\,d\tau) = \int\limits_{t_1}^{t_2} k(x_2,\tau)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,\tau)\,S(x_2)\,d\tau. \qquad (3.2)$$

Выражение в левой части уравнения (3.2), находящееся в скобках, —это количество тепла, уходящее из сечения x_2 в направлении его нормали. Минус перед скобками ставится, т.к. в уравнении (3.2) должно учитываться тепло, приходящее в сечение. При этом

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_2,\tau) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_2,\tau).$$

Через сечение x_1 получим количество тепла:

$$-(-\int\limits_{t_1}^{t_2} k(x_1,\tau)\,\frac{\partial u}{\partial n}(x_1,\tau)\,S(x_1)\,d\tau) = \int\limits_{t1}^{t2} k(x_1,\tau)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,\tau)\,S(x_1)d\tau.$$

При этом

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_1,\tau) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_1,\tau).$$

Приход тепла от объемных источников:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\,f(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Составим баланс тепла:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} c(\xi)\,\rho(\xi)\,S(\xi)\,[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]\,d\xi = \int\limits_{t1}^{t2} [k(x_2,\tau)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,\tau)\,S(x_2) -$$
$$- k(x_1,\tau)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,\tau)\,S(x_1)]d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\,f(\xi,\tau)\,d\xi. \qquad (3.3)$$

Используя теорему о среднем, получим:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} c(\xi)\,\rho(\xi)\,[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]\,S(\xi)\,d\xi = c(x^*)\,\rho(x^*)\,S(x^*)[u(x^*,t_2) - u(x^*,t_1)]\,(x_2 - x_1), \qquad (3.4)$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} [k(x_2,\tau)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,\tau)\,S(x_2) - k(x_1,\tau)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,\tau)\,S(x_1)]\,d\tau =$$

$$= [k(x_2,\tau^*)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,\tau^*)\,S(x_2) - k(x_1,\tau^*)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,\tau^*)\,S(x_1)]\,(t_2 - t_1), \quad (3.5)$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau \int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi,\tau)\,d\xi = f(x^{**},t^{**})\,S(x^{**})\,(x_2 - x_1)\,(t_2 - t_1). \quad (3.6)$$

$$t_1 < \tau^*,\ \tau^{**} < t_2,\ \ x_1 < x^*,\ x^{**} < x_2\,S(x^{**}) \approx 1$$

Подставив выражения (3.4) —(3.6) в уравнение баланса теплопроводности (3.3) и разделив на
$(x_2 - x_1)\,(t_2 - t_1)$, получим выражение:

$$c(x^*)\,\rho(x^*)\,S(x^*)\,\frac{u(x^*,t_2) - u(x^*,t_1)}{t_2 - t_1} =$$

$$= \frac{k(x_2,\tau^*)\,S(x_2)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,\tau^*) - k(x_1,\tau^*)\,S(x_1)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,\tau^*)}{x_2 - x_1} + f(x^{**},\tau^{**}).$$

$$t_2 \to t_1 = t \Rightarrow t^* \to t,\ \ t^{**} \to t$$

$$x_2 \to x_1 = x \Rightarrow x^* \to x,\ \ x^{**} \to x$$

Получили уравнение теплопроводности:

$$c(x)\,\rho(x)\,S(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\,S(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t). \quad (3.7)$$

$$0 < x < L$$

Если $c, \rho, S, k = Const$, то имеет место уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = q^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{f}{c\,\rho\,S}, \quad (3.8)$$

где q — коэффициент температуропроводности, $q = \sqrt{\dfrac{k}{c\,\rho}}$.

§4. Краевые и начальные условия. Постановка краевых задач для уравнений колебаний и теплопроводности

1°. Краевые и начальные условия для уравнения колебаний.

Выведем из 2-го закона Ньютона уравнение колебаний.

Во 2-й закон Ньютона входят начальные условия (начальные координаты и скорость центра масс):

$$\begin{cases} u(\hat{x},0) = \varphi(\hat{x}) \\ u_t(\hat{x},0) = \psi(\hat{x}) \end{cases}.$$

$$\Delta x \to 0,\ \ \hat{x} \to x$$

Следовательно, начальные условия для уравнения колебаний:

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}.$$

На границе, то есть при $x = 0$, $x = l$, могут быть различные краевые условия.

1) Краевые условия 1-го рода (условия Дирихле):

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}.$$

2) Краевые условия 2-го рода (условия Неймана). Пусть на правом краю задано фиксированная сила (для поперечных колебаний).

Рассмотрим 2-й закон Ньютона на конце $x = l$:

Для кусочка струны $(l - \Delta x, l)$ 2-й закон Ньютона выглядит так:

$$\rho(x^*)\, S(x^*)\, u_{tt}(\hat{x}, t)\, \Delta x = F_2(t) - T(l - \Delta x)\, u_x(l - \Delta x, l) + f(x^{**}, t)\, \Delta x. \qquad (4.1)$$

Минус в правой части уравнения (4.1) имеет место, т.к. левый конец струны действует на правый.

Пусть $\Delta x \to 0$, тогда:

$$0 = F_2(t) - T(l)\, u_x(l,t),$$

следовательно,

$$u_x(l,t) = \frac{F_2(t)}{T(l)}. \qquad (4.2)$$

На конце $x = 0$ закон Ньютона примет вид:

$$\rho(x^*)\, S(x^*)\, u_{tt}(\hat{x}, t)\, \Delta x = F_1(t) + T(\Delta x)\, u_x(\Delta x, t) + f(x^{**}, t)\, \Delta x.$$

Если $\Delta x \to 0$, конечное соотношение будет таким:

$$u_x(0,t) = -\frac{F_1(t)}{T(0)}. \qquad (4.3)$$

Тогда при $F_1 = 0,\; F_2 = 0$:

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(l,t) = 0 \end{cases}.$$

В общем случае получаем краевые условия 2-го рода (условия Неймана):

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \nu_1(t) \\ u_x(l,t) = \nu_2(t) \end{cases}.$$

3) Краевые условия 3-го рода.

Упругое напряжение на концах имеет вид:

$$\begin{cases} F_1(t) = -h_1\, u(0,t) \\ F_2(t) = -h_2\, u(l,t) \end{cases}, \qquad (4.4)$$

где h_1, h_2 — коэффициенты упругости.

Таким образом при упругом закреплении получаем условия на концах:

$$
\begin{cases}
u_x(0,t) - \dfrac{h_1}{T(0)}\, u(0,t) = 0 \\
u_x(l,t) + \dfrac{h_2}{T(l)}\, u(l,t) = 0
\end{cases}. \tag{4.5}
$$

Если пружины движутся по законам $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, то уравнения (4.5) заменяются на:

$$
\begin{cases}
u_x(0,t) - \dfrac{h_1}{T(0)}\, [u(0,t) - \beta_1(t)] = 0 \\
u_x(l,t) + \dfrac{h_2}{T(l)}\, [u(l,t) - \beta_2(t)] = 0
\end{cases}. \tag{4.6}
$$

Из уравнений (4.6) получаем краевые условия 3-го рода:

$$
\begin{cases}
u_x(0,t) - \alpha_1 u(0,t) = \kappa_1(t) \\
u_x(l,t) + \alpha_2 u(l,t) = \kappa_2)(t)
\end{cases},
$$

где α_1, $\alpha_2 > 0$,
$\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$ —заданные функции.

Были получены краевые условия для поперечных колебаний струны. Рассмотрим теперь продольные колебания струны.
Второй закон Ньютона для кусочка стержня массой $\Delta m = \rho(x^*)S(x^*)\Delta x$ на правом конце стержня имеет вид:

$$
\underbrace{\rho(x^*)S(x^*)\Delta x}_{\Delta m}\, u_{tt}\,(\hat{x},\, t) = \underbrace{-E\,(l-\Delta x)\, S\,(l-\Delta x)\, u_x\,(l-\Delta x,\, t)}_{\text{сила Гука}} + F_2\,(t) + \underbrace{\int\limits_{l-\Delta x}^{l} f\,(\xi,\, t)\; d\xi}_{\text{Устремляем } \Delta x \to 0}, \tag{4.7}
$$

где S — площадь поперечного сечения,
E — модуль Юнга, являющийся характеристикой материала стержня,
u_x — деформация стержня,
$f\,(\xi,\, t)\; d\xi$ — распределённая сила,
$\hat{x}$ — центр масс рассматриваемого кусочка стержня,
u_{tt} — ускорение центра масс,
x^* — соответствующее значение из теоремы о среднем для массы рассматриваемого кусочка стержня.
Отрицательный знак в формуле (4.7) связан с тем, что в данном случае рассматривается воздействие силы со стороны левого конца стержня. Если рассмотреть аналогичный случай воздействия силы со стороны правого конца стержня для точки $(0,\, t)$, устремив $\Delta x \to 0$, то получится аналогичное равенство. В результате получится система из двух уравнений:

$$
\begin{cases}
u_x\,(l,\, t) = \dfrac{F_2\,(t)}{E\,(l)\, S\,(l)} \text{ — краевое условие для правого конца стержня,} \\
u_x\,(0,\, t) = -\dfrac{F_1\,(t)}{E\,(0)\, S\,(0)} \text{ — краевое условие для левого конца стержня.}
\end{cases} \tag{4.8}
$$

Можно заметить, что для продольных колебаний струны краевые условия были получены того же типа.

2°. Постановка задачи.
Пусть:

$$\begin{aligned}
\Omega_T &= \{(x,\,t):\quad 0<x<l,\quad 0<t<T\}\,, &(4.9)\\
\overline{\Omega}_T &= \{(x,\,t):\quad 0\leqslant x\leqslant l,\quad 0\leqslant t\leqslant T\}\,, &(4.10)\\
k\,(x) &\geqslant k_0>0,\quad k\in \mathrm{C}^1\,[0,\,l]\,,\quad \rho\,(x)\geqslant \rho_0>0,\quad f\in \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}\right). &(4.11)
\end{aligned}$$

Задача.
Определить функцию $u\,(x,\,t)\in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ из условий:

$$\begin{aligned}
\rho\,(x)\,u_{tt}\,(x,\,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f\,(x,\,t)\,,\quad 0<x<l,\quad 0<t<T, &(4.12)\\
u\,(x,\,0) &= \varphi\,(x)\,,\quad u_t\,(x,\,0)=\psi\,(x)\,,\quad 0\leqslant x\leqslant l, &(4.13)\\
u\,(0,\,t) &= \mu_1\,(t)\,,\quad u\,(l,\,t)=\mu_2\,(t)\,,\quad 0\leqslant t\leqslant T. &(4.14)
\end{aligned}$$

В условиях (4.12) – (4.14) функции φ, ψ, μ_1, μ_2 —заданные достаточно гладкие функции.

Определение 4.1. *Задачу определения функции $u\,(x,\,t)$ из условий* (4.12) – (4.14) *называют первой краевой задачей для уравнения колебаний.*
Условия (4.13) *называются начальными условиями.*
Условия (4.14) *называются граничными или краевыми условиями первого рода (условиями Дирихле).*

Задача. Определить функцию $u\in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ из условий:

$$\begin{aligned}
\rho\,(x)\,u_{tt}\,(x,\,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f\,(x,\,t)\,,\quad 0<x<l,\quad 0<t<T, &(4.15)\\
u\,(x,\,0) &= \varphi\,(x)\,,\quad u_t\,(x,\,0)=\psi\,(x)\,,\quad 0\leqslant x\leqslant l, &(4.16)\\
u_x\,(0,\,t) &= \nu_1\,(t)\,,\quad u_x\,(l,\,t)=\nu_2\,(t)\,,\quad 0\leqslant t\leqslant T. &(4.17)
\end{aligned}$$

Определение 4.2. *Задачу определения функции $u\,(x,\,t)$ из условий* (4.15) – (4.17) *называют второй краевой задачей для уравнения колебаний.*
Условия (4.16) *называются начальными условиями.*
Условия (4.17) *называются краевыми условия второго рода (условиями Неймана).*

Задача. Определить функцию $u\in \mathrm{C}^2\big(\overline{\Omega}_T\big)$ из условий:

$$\begin{aligned}
\rho\,(x)\,u_{tt}\,(x,\,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f\,(x,\,t)\,,\quad 0<x<l,\quad 0<t<T, &(4.18)\\
u\,(x,\,0) &= \varphi(x),\quad u_t\,(x,\,0)=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, &(4.19)
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u_x(0,\,t)-h_1u\,(0,\,t)=\kappa_1\,(t)\,,\\ u_x(l,\,t)-h_2u\,(l,\,t)=\kappa_2\,(t)\,,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\end{array}\right. \qquad (4.20)$$

где $h_1,\ h_2>0$ — заданные постоянные, а κ_1, κ_2 — заданные на множестве $[0,\,T]$ функции.

Определение 4.3. *Задачу нахождения функции $u\,(x,\,t)$ из условий* (4.18) – (4.20) *называют третьей краевой задачей для уравнения колебаний.*
Условия (4.19) *называются начальными условиями.*
Условия (4.20) *называются краевыми условиями третьего рода.*

Глава 3

Простейшие краевые задачи

§1. Единственность решения краевых задач для уравнений колебаний

Теорема 1.1. *Пусть функции* $\rho(x)$ *и* $k(x)$ *таковы, что* $\rho(x) \geq \rho_0 > 0,\ k(x) \geq k_0 > 0,\ \rho \in \mathrm{C}[0,\, l],\ k \in \mathrm{C}^1[0,\, l]$. *Тогда не может существовать двух различных решений* $u \in \mathrm{C}^2\big(\overline{\Omega}_T\big)$ *первой краевой задачи* (4.12) – (4.14).

Доказательство *(от противного)*.
□ Пусть существуют два различных решения первой краевой задачи, т.е. существуют $u^{(1)},\ u^{(2)} \in \mathrm{C}^2\big(\overline{\Omega}_T\big)$:

$$\begin{aligned}
\rho u_{tt}^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right) + f(x,\, t), && (1.1)\\
u^{(2)}(x,\, 0) &= \varphi(x), \quad u_t^{(2)}(x,\, 0) = \psi(x), && (1.2)\\
u^{(2)}(0,\, t) &= \mu_1(t), \quad u^{(2)}(l,\, t) = \mu_2(t), && (1.3)\\
\rho u_{tt}^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right) + f(x,\, t), && (1.4)\\
u^{(1)}(x,\, 0) &= \varphi(x), \quad u_t^{(1)}(x,\, 0) = \psi(x), && (1.5)\\
u^{(1)}(0,\, t) &= \mu_1(t), \quad u^{(1)}(l,\, t) = \mu_2(t). && (1.6)
\end{aligned}$$

Вычитая из уравнения (1.1) уравнение (1.4), из уравнений (1.2), (1.5), (1.3) и (1.6) получается, что для функции $v(x,\, t) = u^{(2)}(x,\, t) - u^{(1)}(x,\, t)$ верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\rho v_{tt} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right), && (1.7)\\
v(x,\, 0) &= 0, \quad v_t(x,\, 0) = 0, && (1.8)\\
v(0,\, t) &= 0, \quad v(l,\, t) = 0. && (1.9)
\end{aligned}$$

Можно показать, что из уравнений (1.7) – (1.9) следует, что $v = 0$, это противоречие. Для этого рассматривается функция:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[k(x)\, v^2(x,\, t) + \rho(x)\, v_t^2(x,\, t)\right]\, dx. \qquad (1.10)$$

Можно показать, что $E(t)$ не зависит от t.

В самом деле

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[k\left(x\right)v^2\left(x,\,t\right)+\rho\left(x\right)v_t^2\left(x,\,t\right)\right]\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[k\left(x\right)\frac{d}{dt}\left(v_x^2\left(x,\,t\right)\right)+\rho\left(x\right)\frac{d}{dt}\left(v_t^2\left(x,\,t\right)\right)\right]\,dx =$$

$$= \int\limits_0^l \left[k\left(x\right)v_x v_{xt}+\rho\left(x\right)v_t v_{tt}\right]\,dx. \quad (1.11)$$

Если преобразовать первое слагаемое, то получается равенство:

$$\int\limits_0^l k v_x v_{xt}\,dx = \int\limits_0^l k v_x\,d\left(v_t\right) = \left(k v_x v_t\,\Big|_0^l - \int\limits_0^l v_t\frac{\partial}{\partial x}\left(k v_x\right)\,dx\right) =$$

$$= k\left(l\right)v_x\left(l,\,t\right)v_t\left(l,\,t\right) - k\left(0\right)v_x\left(0,\,t\right)v_t\left(0,\,t\right) - \int\limits_0^l v_t\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\right) =$$

$$= -\int\limits_0^l v_t\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\right). \quad (1.12)$$

И отсюда получается равенство:

$$\frac{dE}{dt} = \int\limits_0^l \left(-v_t\frac{\partial}{\partial x}\left(k v_x\right)+\rho v_t v_{tt}\right)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^l v_t\left(\rho v_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)\,dx =$$

$$= 0 \quad (\text{в силу уравнения (1.7)}). \quad (1.13)$$

Следовательно, $E\left(t\right)\equiv const$ на $\left[0,\,T\right]$.
Но, с другой стороны,

$$E\left(0\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[k\left(x\right)\underbrace{v_x^2\left(x,\,0\right)}_{0,\ \text{т.к. } v(x,0)=0} + \rho\left(x\right)\underbrace{v_t^2\left(x,\,0\right)}_{0,\ \text{т.к. } v_t(x,0)=0}\right]\,dx = 0. \quad (1.14)$$

Таким образом, $E\left(t\right)=0$ для $\forall\, t\in\left[0,\,T\right]$.
Следовательно,

$$\int\limits_0^l \left(k v_x^2+\rho v_t^2\right)\,dx = 0 \quad \text{для } \forall\, t\in\left[0,\,T\right]. \quad (1.15)$$

Следовательно, так как $k\geqslant k_0>0$, $\rho\left(x\right)\geqslant\rho_0>0$ и $v\left(x,\,0\right)=0$, то $v\left(x,\,t\right)=0$.
Значит оба данных решения тождественно равны — противоречие.

■

Теорема 1.2. *Пусть* $\rho\left(x\right)\geqslant\rho_0>0$, $k\left(x\right)\geqslant k_0>0$, $\rho\in C\left[0,\,l\right]$, $k\in \mathrm{C}^1\left[0,\,l\right]$. *Тогда не может существовать двух различных решений* $u\in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$ *задачи* (4.15) – (4.17)

Доказательство *(от противного)*.

☐ Аналогично предыдущему примеру предположем, что два таких решения существуют, тогда $\exists\, v \in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right),\ v \neq 0$, удовлетворяющий второй краевой задаче:

$$\rho v_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial v}\right), \tag{1.16}$$

$$v\left(x,\, 0\right) = 0, \quad v_t\left(x,\, 0\right) = 0, \tag{1.17}$$

$$v_x\left(0,\, t\right) = 0, \quad v_x\left(l,\, t\right) = 0. \tag{1.18}$$

Можно показать, что из условий (1.16) – (1.18) следует, что $v(x,\, t) = 0$. Аналогично как при доказательстве предыдущей теоремы рассматривается функция

$$E\left(t\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[kv_x^2 + \rho v_t^2\right]\, dx. \tag{1.19}$$

Для неё

$$\frac{dE}{dt} = \int\limits_0^l \left(kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt}\right)\, dx. \tag{1.20}$$

Можно заметить, что

$$\int\limits_0^l kv_x v_{xt}\, dx = \int\limits_0^l kv_x\, dv_x =$$

$$\left(\underbrace{kv_x v_t\Big|_0^t}_{0,\text{ т.к. } v_x(0,t)v_x(l,t)=0} - \int\limits_0^l v_t\frac{\partial}{\partial x}\left(kv_x\right)\, dx\right) =$$

$$= -\int\limits_0^l v_t\frac{\partial}{\partial x}\left(kv_x\right)\, dx. \tag{1.21}$$

Следовательно,

$$\frac{dE}{dt} = \int\limits_0^l v_t\left(\rho v_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)\, dx = 0. \tag{1.22}$$

Получилось, что $E\left(t\right) \equiv const$. А так как $E\left(0\right) = 0$, то

$$E\left(t\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(kv_x^2 + \rho v_t^2\right)\, dx = 0 \text{ для } \forall\, t. \tag{1.23}$$

Следовательно, так как $k \geqslant k_0 > 0,\ \rho\left(x\right) \geqslant \rho_0 > 0$ и $v\left(x,\, 0\right) = 0$, то

$$v\left(x,\, t\right) = 0 \text{ для } \forall\, \left(x,\, t\right). \tag{1.24}$$

Значит, эти решения тождественно равны — противоречие. ■

Теорема 1.3. *Пусть* $\rho\left(x\right) \geqslant \rho_0 > 0,\ k\left(x\right) \geqslant k_0 > 0,\ \rho \in \mathrm{C}\left[0,\, l\right],\ k \in \mathrm{C}^1\left[0,\, l\right]$. *Тогда не может существовать двух различных решений третьей краевой задачи* (4.18) – (4.20).

Доказательство *(от противного)*.
□
Условия третьей краевой задачи для $v(x, t) \in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$:

$$\begin{aligned} \rho v_{tt} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right), && (1.25)\\ v(x, 0) &= 0, \quad v_t(x, 0) = 0, && (1.26) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_x(0, t) - h_1 v(0, t) = 0, \\ v_x(l, t) + h_2 v(l, t) = 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Аналогично предыдущей теореме рассматривается функция $E(t)$:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(k v_x^2 + \rho v_t^2\right)\, dx, \tag{1.28}$$

$$\frac{dE}{dt} = \int\limits_0^l \left(k v_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt}\right)\, dx, \tag{1.29}$$

где

$$\int\limits_0^l k v_x v_{xt}\, dx = \int\limits_0^l k v_x\, dv_t =$$

$$= k(l)\, v_x(l, t)\, v_t(l, t) - k(0)\, v_x(0, t)\, v_t(0, t) - \int\limits_0^l v_t \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right)\, dx. \tag{1.30}$$

Следовательно,

$$\frac{dE}{dt} = k(l)\, v_x(l, t)\, v_t(l, t) - k(0)\, v_x(0, t)\, v_t(0, t) + \int\limits_0^l v_t \left(\underbrace{\rho v_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}(k v_x)}_{=0 \text{ из уравнения } (1.25)}\right)\, dx. \tag{1.31}$$

Значит,

$$\frac{dE}{dt} = k(l)\, v_x(l, t)\, v_t(l, t) - k(0)\, v_x(0, t)\, v_t(0, t) =$$

$$= -\left[k(l)\, h_2 v(l, t)\, v_t(l, t) + k(0)\, h_1 v(0, t)\, v_t(0, t)\right]. \tag{1.32}$$

Таким образом, получается, что

$$\frac{dE}{dt} = -\left[k(l)\, h_2 v(l, t)\, v_t(l, t) + k(0)\, h_1 v(0, t)\, v_t(0, t)\right]. \tag{1.33}$$

Данное выражение интегрируется по τ на отрезке $[0, t]$:

$$\int\limits_0^t \frac{dE}{dt}\, d\tau = E(t) - E(0) = -\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^t d\tau h_2 k(l)\, \frac{\partial}{\partial\tau} v^2(l, \tau) + \int\limits_0^l d\tau h_1 k(0)\, \frac{\partial}{\partial\tau} v^2(0, \tau)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(k(l)\, h_2 v^2(l, \tau)\Big|_0^t + k(0)\, h_1 v^2(0, \tau)\Big|_0^t\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(k(l)\, h_2 v^2(l, t) + k(0)\, h_1 v^2(0, t)\right) = 0. \tag{1.34}$$

Следовательно, $E(t) - \underbrace{E(0)}_{=0} = 0$, и, значит, $E(t) = 0$. Таким образом, $v(x,\, t) \equiv 0$. Значит, оба решения совпадают — противоречие.

■

§2. Построение решения первой краевой задачи для волнового уравнения методом Фурье

Задача.: Найти $u(x,\, t)\,,\ u \in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$ из условий:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, && (2.1)\\ u(x,\, 0) &= \varphi(x)\,, \quad u_t(x,\, 0) = \phi(x)\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, && (2.2)\\ u(0,\, t) &= 0, \quad u(l,\, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. && (2.3) \end{aligned}$$

Шаг №1. Найти все решения уравнения (2.1) не равные тождественно 0, удовлетворяющие граничным условиям (2.3) и имеющие специальный вид:

$$u(x,\, t) = \mathscr{X}(x)\,\mathscr{T}(t)\,. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в уравнение (2.1) получается:

$$\mathscr{T}''(t)\,\mathscr{X}(x) = a^2\mathscr{T}(t)\,\mathscr{X}''(x)\,. \tag{2.5}$$

Так как $u(x,\, t) \not\equiv 0 \to \exists\ (x,\, t) : u(x,\, t) \neq 0$.
Для этих точек $(x,\, t)$ соотношение (2.5) делится на $u(x,\, t)\, a^2$:

$$\frac{\mathscr{T}''(t)}{a^2\mathscr{T}(t)} = \frac{\mathscr{X}''(x)}{\mathscr{X}(x)}. \tag{2.6}$$

Рассматривается соотношение (2.6), в каждой такой точке $(x^*,\, t^*)$:

$$\left.\frac{\mathscr{T}''(t)}{a^2\mathscr{T}(t)}\right|_{t=t^*} = \left.\frac{\mathscr{X}''(x)}{\mathscr{X}(x)}\right|_{x=x^*}. \tag{2.7}$$

Для неё:

$$\frac{\mathscr{T}''(t^*)}{a^2\mathscr{T}(t^*)} = \frac{\mathscr{X}''(x^*)}{\mathscr{X}(x^*)} \equiv \text{const для } \forall\, x. \tag{2.8}$$

Если обозначить данную константу как $-\lambda$, то получается, что для данной точки $(x^*,\, t^*)$:

$$\frac{\mathscr{T}''}{a^2\mathscr{T}} = \frac{\mathscr{X}''}{\mathscr{X}} = -\lambda \equiv \text{const}. \tag{2.9}$$

Следовательно, для функций $\mathscr{T}(t)$ и $\mathscr{X}(x)$ получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \mathscr{T}'' + \lambda a^2\mathscr{T} &= 0, \quad 0 < t < T, && (2.10)\\ \mathscr{X}'' + \lambda\mathscr{X} &= 0, \quad 0 < x < l. && (2.11) \end{aligned}$$

Кроме того, для функции $u(x,t)$ должны удовлетворятся уравнения (2.3):

$$u(0,\, t) = 0, \quad u(l,\, t) = 0. \tag{2.12}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \mathscr{X}(0)\,\mathscr{T}(t) = & 0, \\ \mathscr{X}(l)\,\mathscr{T}(t) = & 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Однако $\mathscr{T}(t) \not\equiv 0$, значит получается система:

$$\begin{cases} \mathscr{X}(0) = & 0, \\ \mathscr{X}(l) = & 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Таким образом, для нахождения $\mathscr{X}(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$ получается следующая задача:

$$\left\{ \mathscr{X}''(x) + \lambda\mathscr{X}(x) = 0, \quad \mathscr{X}(0) = \mathscr{X}(l) = 0, \quad 0 < x < l. \right. \tag{2.15}$$

Задача:
Требуется найти все λ, при которых существуют ненулевые решения системы (2.15) и найти все такие решения системы (2.15).

Определение 2.1. *Задача определения* $\{\lambda\}$ *и* $\{\mathscr{X}\}$, *где* $\mathscr{X} \not\equiv 0$ *из условия* (2.15) *называют задачей Штурма-Лиувилля.*
При этом множество $\{\lambda\}$ *называют собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля, а*
множество $\{\mathscr{X}\}$ *— собственными решениями задачи Штурма-Лиувилля.*

Решение системы (2.15):

Шаг №1. Рассматривается случай, когда $\lambda < 0$.
Решение ищем в виде

$$\mathscr{X}(x) = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}, \tag{2.16}$$

при этом $\mathscr{X}(0) = 0$. Следовательно, получается соотношение $c_1 + c_2 = 0$. Кроме того, из условий задачи (2.15) следует, что $\mathscr{X}(l) = 0$ и, значит, верно уравнение

$$c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}l} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}l} = 0. \tag{2.17}$$

Легко заметить, что $c_1^2 + c_2^2 \not\equiv 0$, так как в противном случае $c_1 = c_2 = 0$, и, значит, $\mathscr{X}(x)$ было бы равно тождественно 0. Таким образом, в общем случае для функции $\mathscr{X}(x)$, $c_1^2 + c_2^2 \not\equiv 0$. Необходимо решить данную систему уравнений. Если рассмотреть соответствующий определитель,то получается:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ e^{\sqrt{|\lambda|}l} & e^{-\sqrt{|\lambda|}l} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.18}$$

Данная система имеет решение при $\left(e^{\sqrt{|\lambda|}l}\right) = 1$, и, значит, $\lambda = 0$. Это противоречие, так как $\lambda < 0$. Следовательно, при $\lambda < 0$ решения нет.

Шаг №2. Рассматривается случай, когда $\lambda = 0$, при этом из (2.15) следует, что при этом $\mathscr{X}'' = 0$ и, значит, $\mathscr{X}(x) = c_1 x + c_2$. Из других условий уравнения (2.15):

$$\begin{cases} \mathscr{X}(0) = 0 & \rightarrow & c_2 = 0 & \rightarrow & \mathscr{X}(x) = c_1 x, \\ \mathscr{X}(l) = 0 & \rightarrow & c_1 l = 0 & \rightarrow & c_1 = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Следовательно, $c_1 = c_2 = 0$. Значит, при $\lambda = 0$ решения нет.

Шаг №3. Рассматривается случай, когда $\lambda > 0$, при этом выполняется соотношение $\mathscr{X}'' + \lambda\mathscr{X} = 0$. Следовательно, решение ищется в виде $\mathscr{X}(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Из

граничного условия, $\mathscr{X}(0) = 0$ следует, что $c_1 l = 0$. Значит, $\mathscr{X}(x) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Из второго граничного условия: $\mathscr{X}(l) = 0$, следовательно, $c_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Однако, $c_2 \not\equiv 0$ так как в противном случае $c_1 = c_2 = 0$ и тогда для $\mathscr{X}(x)$ решения нет.
Получается уравнение

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0, \tag{2.20}$$

решениями которого будут,

$$\sqrt{\lambda}l = \pi k, \quad k = 1, 2, ... \tag{2.21}$$

Таким образом, значения

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \text{ являются решением задачи Штурма-Лиувилля,} \tag{2.22}$$

а соответствующие собственные решения равны

$$\mathscr{X}_k(x) = c_k \sin\frac{\pi k x}{l}, \quad c_k \neq 0. \tag{2.23}$$

Ответ:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \ \{\mathscr{X}_k\} = \left\{\sin\frac{\pi k x}{l}\right\}, \text{ где } \mathscr{X}_k(x) \text{ — выписывают с точностью до } c_k \neq 0. \tag{2.24}$$

Для $\mathscr{T}_k$ выполняется уравнение:

$$\mathscr{T}_k'' + a^2\lambda_k\mathscr{T}_k = 0. \tag{2.25}$$

Значит, верно уравнение

$$\mathscr{T}_k(t) = A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t. \tag{2.26}$$

Из уравнений (2.4), (2.24), (2.26) находится $u_k(t)$:

$$u_k(t) = \left(A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t\right)\sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{2.27}$$

Шаг №2. Идея Фурье. Определяется функция $u(x, t)$ как сумма ряда:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin a\sqrt{\lambda_k}t\right)\sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{2.28}$$

Необходимо найти такие A_k, B_k, чтобы выполнялись начальные условия:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \tag{2.29}$$

то есть при $t = 0$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k x}{l}, \tag{2.30}$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k a\sqrt{\lambda_k}\sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{2.31}$$

Необходимо определить неизвестные коэффициенты $\{A_k\}$ и $\{B_k\}$.

Напоминание *(соотношение из тригонометрии)*

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\ \left(\cos\left(\alpha-\beta\right) - cos(\alpha+\beta)\right)$$

Для $\forall\, k,\ n \in \mathbb{N}$:

$$\int\limits_0^l \sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \cos\frac{\pi\left(k-n\right)}{l}x\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^l \cos\frac{\pi\left(k+n\right)}{l}x\,dx = \tag{2.32}$$

$$= \begin{cases} k=n, \quad \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^l dx - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^l \cos\dfrac{2\pi k}{l}x\,dx = \dfrac{l}{2} - \dfrac{l}{2\pi k}\sin\dfrac{2\pi kx}{l}\Bigg|_0^l = \dfrac{l}{2}, \\ k\neq n, \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{l}{\pi\left(k-n\right)}\sin\dfrac{\pi\left(k-n\right)}{l}x\Bigg|_0^l - \dfrac{1}{2}\dfrac{l}{\pi\left(k+n\right)}\sin\dfrac{\pi\left(k+n\right)}{l}x\Bigg|_0^l = 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^l \sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & k\neq n, \\ \dfrac{l}{2}, & k=n. \end{cases} \tag{2.34}$$

Предполагается, что ряды (2.30) и (2.31) можно интегрировать почленно. Выбирается некоторое число n $\in \mathbb{N}$, ряд (2.31) умножается на $\sin\dfrac{\pi nx}{l}$ и интегрируется по переменной ξ на отрезке от 0 до l. Получается уравнение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \int\limits_0^l \sin\frac{\pi k\xi}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi = \int\limits_0^l \varphi\left(\xi\right)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi. \tag{2.35}$$

Раскрыв сумму данного ряда получается следующее соотношение:

$$A_1 0 + A_2 0 + ... + A_n\frac{l}{2} + A_{n+1}0 + ... = \int\limits_0^l \varphi\left(\xi\right)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi. \tag{2.36}$$

Находится A_n :

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi\left(\xi\right)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi, \text{ (это справедливо и для } n=k). \tag{2.37}$$

Таким образом, получается уравнение:

$$A_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi\left(\xi\right)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi. \tag{2.38}$$

Аналогично и для B_k. Выбирается некоторое число n $\in \mathbb{N}$, ряд (2.30) умножается на $\sin\dfrac{\pi n x}{l}$ и интегрируется по переменной ξ на отрезке от 0 до l. Получается равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\sqrt{\lambda_k}B_k\int_0^l \sin\frac{\pi k x}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}\,d\xi = \underbrace{\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi k \xi}{l}\,d\xi}_{\begin{cases}0, & k\neq n,\\ \frac{l}{2}, & k=n.\end{cases}}. \tag{2.39}$$

Таким образом, получается аналогичное уравнение:

$$\frac{l}{2}B_n\sin a\sqrt{\lambda_n} = \int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi. \tag{2.40}$$

Следовательно, так как равенство (2.40) это справедливо и для $n=k$, то

$$B_k = \frac{2}{a\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi. \tag{2.41}$$

Таким образом, получается уравнение:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi\cos a\sqrt{\lambda_k}t + \frac{2}{a\sqrt{\lambda_k l}}\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi\sin a\sqrt{\lambda_k}t\right). \tag{2.42}$$

Шаг №3. Обоснование метода Фурье. Предварительные сведения. Факты из теории рядов Фурье.
а) Пусть $f\in \mathrm{C}^1[0,l]$, $f(0)=f(l)=0$, тогда f является абсолютно (т.е. по модулю) и равномерно сходящийся ряд вида:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)\sin\pi k x l, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{2.43}$$

где

$$b_k(f) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi. \tag{2.44}$$

б) Пусть $f\in \mathrm{C}[0,l]$, тогда

$$a_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \cos\frac{\pi k\xi}{l}f(\xi)\,d\xi, \quad k=1,2,..., \tag{2.45}$$

$$b_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \sin\frac{\pi k\xi}{l}f(\xi)\,d\xi, \quad k=1,2,.... \tag{2.46}$$

При этом выполняется неравенство Бесселя:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leqslant \frac{2}{l} \int_0^l f^2(\xi)\, d\xi, \tag{2.47}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leqslant \frac{2}{l} \int_0^l f^2(\xi)\, d\xi. \tag{2.48}$$

Напоминание *(из теории функциональных рядов)*

а) Пусть задан ряд $v\left(x,\,t\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k\left(x,\,t\right)$, где функции $\varphi_k\in\mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$. Тогда $v\left(x,\,t\right)\in\mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k\left(x,\,t\right)$ сходится на $\overline{\Omega}_T$ равномерно, т.е для $\forall\,\epsilon>0\,\exists\,N:\forall\,n>N,\ \forall\ (x,\,t)\in\overline{\Omega}_T:$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\left(x,\,t\right)-v\left(x,\,t\right)<\epsilon\right|.$$

б) Как вычислить сходится ли ряд равномерно на $\overline{\Omega}_T$?
Достаточное условие равномерной сходимости: признак Вейштрасса.

Теорема. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k\left(x,\,t\right),\ (x,\,t)\in\overline{\Omega}_T$. *Пусть*

$$\left|\varphi_k\left(x,\,t\right)\right|\leqslant m_k,\ m_k\in\Omega_T,\quad k=1,2,....$$

Тогда если

$$\sum_{k=1}^{\infty}m_k<+\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k\left(x,\,t\right)$ *сходится равномерно на множестве* $\overline{\Omega}_T$. *При этом ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m_k$ *называют мажорирующим рядом.*

в) Как определить будет ли $v\left(x,\,t\right)=\sum\limits_{k=11}^{\infty}\varphi_k\left(x,\,t\right)$, где $(x,\,t)\in\Omega_T$ дифференцируемой функцией?

Теорема. *Пусть все функции* $\varphi_k\in\mathrm{C}^1\left(\overline{\Omega}_T\right)$, *а ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\left(x,\,t\right)\ \textit{и}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\left(x,\,t\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\left(x,\,t\right)\right)$$

сходятся равномерно. Тогда функция $v(x,\,t)$ *имеет в* $\overline{\Omega}_T$ *непрерывную частную производную по* x *(по* t*). Если оба ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\left(x,\,t\right)\ \textit{и}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\left(x,\,t\right),$$

сходят равномерно, то $v\in\mathrm{C}^1\left(\overline{\Omega}_T\right)$ *и кроме того*

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\left(x,\,t\right),\ \frac{\partial v}{\partial x}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\left(x,\,t\right).$$

Возращаясь к обоснованию, надо показать, что $u\left(x,\,t\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k\left(x,\,t\right)$ — есть решение определяемое уравнениями (2.1) (2.2) и (2.3). Для этого надо показать, что $v\left(x,\,t\right)\in\mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$

и выполняются уравнения:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, && (2.49)\\
u(x,\,0) &= \varphi(x), \quad u_t(x,\,0) = \psi, \quad 0 \leqslant x < l, && (2.50)\\
u(0,\,t) &= 0, \quad u(l,\,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. && (2.51)
\end{aligned}
$$

Получим сначала некоторые необходимые для существования решения условия. Предполагается, что $\varphi \in \mathrm{C}^3[0,\,l]$, $\psi \in \mathrm{C}^2[0,\,l]$.

$$
\begin{gathered}
u(0,\,0) = \varphi(0) = \lim_{t\to 0+0} u(0,\,t) = 0,\\
u(l,\,0) = \varphi(l) = \lim_{t\to 0+0} u(l,\,0) = 0.
\end{gathered} \tag{2.52}
$$

Следствие 1. *Равенство* $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ *— необходимое условие для существования решения.*

Аналогично:

$$
\begin{gathered}
u_t(0,\,0) = \psi(0) = \lim_{t\to 0+0} u_t(0,\,t) = 0,\\
u_t(l,\,0) = \psi(0) = \lim_{t\to 0+0} u_t(l,\,0) = 0.
\end{gathered} \tag{2.53}
$$

Следствие 2. *Равенство* $\psi(0) = \psi(l) = 0$ *— необходимое условие для существования решения.*

Так как, $u \in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$, следовательно, уравнение (2.49) выполнено в точках $(0,\,0)$ и $(l,\,0)$. Поэтому из уравнений (2.49), (2.50) и (2.51) следует, что

$$
u_{tt} = a^2 \varphi_{xx}(0) = \lim_{t\to 0+0} u_{tt}(t,\,0) = 0, \tag{2.54}
$$

значит,

$$
\varphi_{xx}(0) = 0. \tag{2.55}
$$

Аналогично можно показать, что

$$
\varphi_{xx}(l) = 0. \tag{2.56}
$$

Так получается набор необходимых для существования решения условий:

$$
\begin{aligned}
\varphi(0) &= \varphi(l) = 0, && (2.57)\\
\psi(0) &= \psi(l) = 0, && (2.58)\\
\varphi_{xx}(0) &= \varphi_{xx}(l) = 0. && (2.59)
\end{aligned}
$$

Необходимые в дальнейшем оценки коэффициентов A_k, B_k, получаются предполагая выполненными для функций φ, ψ данные условия согласования

$$
\begin{aligned}
\varphi(0) &= \varphi(l) = 0, && (2.60)\\
\psi(0) &= \psi(l) = 0, && (2.61)\\
\varphi''(0) &= \varphi''(l) = 0, && (2.62)
\end{aligned}
$$

и предполагая, что

$$
\varphi \in \mathrm{C}^3[0,\,l], \quad \psi \in \mathrm{C}^2[0,\,l]. \tag{2.63}
$$

Находятся коэффициенты A_k и B_k:

$$A_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi = -\frac{2}{l}\frac{l}{\pi k}\int\limits_0^l \varphi\,d\left(\cos\frac{\pi k\xi}{l}\right) = -\frac{2}{\pi k}\left(\underbrace{\varphi(\xi)\cos\frac{\pi k\xi}{l}\Big|_0^l}_{0,\ \text{т.к. } \varphi(0)=\varphi(l)=0} - \int\limits_0^l \varphi'(\xi)\cos\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\frac{l}{\pi k}\int\limits_0^l \varphi'(\xi)\ d\left(\sin\frac{\pi k\xi}{l}\right) = \frac{2l}{(\pi k)^2}\left(\underbrace{\varphi'(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\Big|_0^l}_{0,\ \text{т.к. } \sin\pi k=0} - \int\limits_0^l \varphi''(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi\right) =$$

$$= \frac{2l^2}{(\pi k)^3}\int\limits_0^l \varphi''(\xi)\ d\left(\cos\frac{\pi k\xi}{l}\right) = \frac{2l^2}{(\pi k)^3}\left(\underbrace{\varphi''(\xi)\cos\frac{\pi k\xi}{l}\Big|_0^l}_{0,\ \text{т.к. } \varphi''(0)=\varphi''(l)=0} - \int\limits_0^l \varphi'''(\xi)\cos\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi\right) =$$

$$= -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi'''(\xi)\cos\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi = -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 a_k(\varphi''') . \quad (2.64)$$

Аналогично:

$$B_k = \frac{2}{al\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi = -\frac{1}{a\sqrt{\lambda_k}}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2\frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi''(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi =$$

$$= -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 b_k(\psi'')\frac{1}{a\dfrac{\pi k}{l}} = -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^3\frac{1}{a}b_k(\psi'') . \quad (2.65)$$

Следовательно,

$$|A_k| = \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 |a(\varphi''')| , \quad (2.66)$$

$$|B_k| = \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3\frac{1}{a}|b(\psi'')| . \quad (2.67)$$

Можно показать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k\cos a\sqrt{\lambda_k}t\right)\sin\frac{\pi kx}{l} \quad (2.68)$$

сходится абсолютно и равномерно:

$$\left|A_k\cos a\sqrt{\lambda_k}t + B_k\cos a\sqrt{\lambda_k}t\right|\left|\sin\frac{\pi kx}{l}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |A_k| + |B_k| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3\left(\frac{1}{k^3}|a_k(\varphi''')| + \frac{1}{ak^3}|b_k(\psi'')|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{l}{\pi}\right)^3\left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^3}\right)^2 + \frac{1}{2}(a_k(\varphi'''))^2\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^3}\right)^2 + \frac{1}{2}(b_k(\psi''))^2\right)\right) . \quad (2.69)$$

Напоминание *неравенство для значения* $\dfrac{\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)}{2}$

$|\alpha|\,|\beta| \leqslant \dfrac{\left(\left|\alpha^2\right|+\left|\beta^2\right|\right)}{2}$.

Рассматриваются ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}<+\infty. \tag{2.70}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k\left(\varphi'''\right)\right|^2 \quad\leqslant\quad \frac{2}{l}\int\limits_0^l\left(\varphi'''\left(\xi\right)\right)^2d\xi<+\infty, \tag{2.71}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|b_k\left(\psi''\right)\right|^2 \quad\leqslant\quad \frac{2}{l}\int\limits_0^l\left(\psi''\left(\xi\right)\right)^2d\xi<+\infty. \tag{2.72}$$

Значит ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m_k<+\infty,$ где $m_k=\left(\dfrac{l}{\pi}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{k_6}\right)+\dfrac{1}{2}|a_k\left(\varphi'''\right)|^2+\dfrac{1}{2}|b_k\left(\psi''\right)|^2.$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m_k$ является мажорирующим рядом. По теореме Вейштрасса $u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k\in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$. Следовательно, сумма ряда (2.68) есть функция из множества $\mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$.

Покажем, что $v\left(x,\,t\right)\in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$. Покажем, например, что $\exists\ \left(v\left(x,\,t\right)\right)_{xx}$. Для этого нужно показать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(u_k\left(x,\,t\right)\right)_{xx}$ сходится равномерно.

В самом деле,

$$\left|u_k\left(x,\,t\right)\right|_{xx}=\left|A_k\cos a\sqrt{\lambda}_kt+B_k\sin a\sqrt{\lambda}_kt\right|\left|\sin\frac{\pi kx}{l}\right|\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2\leqslant\left(|A_k|+|B_k|\right)\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \tag{2.73}$$

Поскольку $|A_k|\leqslant\left(\dfrac{l}{\pi k}\right)^3|a_k\left(\varphi'''\right)|$ и $|B_k|\leqslant\left(\dfrac{l}{\pi k}\right)^2\dfrac{1}{a}\left|b_k\left(\psi''\right)\right|$, то

$$\left|u_k\left(x,\,t\right)\right|_{xx}\leqslant\frac{l}{\pi k}\left|a_k\left(\varphi'''\right)\right|+\frac{1}{a}\left|b_k\left(\psi''\right)\right|\leqslant\frac{l}{2\pi}\left(\frac{1}{k^2}+\left|a_k\left(\varphi'''\right)\right|^2\right)+\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{k^2}+\left|b_k\left(\psi''\right)\right|^2\right). \tag{2.74}$$

Последнее неравенство получено после применения неравенства $|\alpha||\beta|\leqslant\dfrac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$.

Тогда, если взять

$$m_k^{(2)}=\frac{l}{\pi}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}\right)\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2}\left|a_k\left(\varphi'''\right)\right|^2+\frac{l}{2a\pi}\left|b_k\left(\psi''\right)\right|^2\right], \tag{2.75}$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}m_k^{(2)}<+\infty, \tag{2.76}$$

так как в силу неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k\left(\varphi'''\right)\right|^2\leqslant\frac{2}{l}\int\limits_0^l\left(\varphi'''\right)^2\,d\xi, \tag{2.77}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|b_k\left(\psi''\right)\right|^2\leqslant\frac{2}{l}\int\limits_0^l\left(\psi'''\right)^2\,d\xi. \tag{2.78}$$

Получили для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k)_{xx}$ мажорирующий ряд. Тогда, по теореме Вейерштрасса, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k)_{xx}$ сходится равномерно.

Аналогично, можно показать, что сходятся равномерно ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k)_{xt}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k)_{tt}$. Из этого следует, что $u \in \mathrm{C}^2\left(\bar{\Omega}_T\right)$ и $v_{xx} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k)_{xx}$, $v_{tt} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k)_{tt}$.

Но тогда

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v\,(x,\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\right)}_{0} = 0. \tag{2.79}$$

Отсюда следует, что уравнение (2.49) выполнено.

Проверим условия (2.50), (2.51):

$$v(x,\,0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,\,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi\sin\frac{\pi k x}{l} = \varphi(x). \tag{2.80}$$

Аналогично, так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k)_t$ сходится равномерно на $\overline{\Omega}_T$, то

$$v_t(x,\,0) = \sum_{k=1}^{\infty}(u_k)_t\,(x,\,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{la\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi\sin\frac{\pi k x}{l}a\sqrt{\lambda_k} = \psi(x). \tag{2.81}$$

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{C}^3[0,l]$, $\psi \in \mathrm{C}^2[0,l]$ *и выполнены условия согласования*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0,\ \ \psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{2.82}$$

Тогда существует единственное решение задачи (2.49)–(2.51)*, представленное в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда* (2.68).

§3. Метод Фурье для неоднородного уравнения колебаний

Постановка задачи. Найти $u \in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$ из условий:

$$\begin{aligned} u_{tt}\,(x,\,t) &= a^2 u_{xx}\,(x,\,t) + f\,(x,\,t)\,,\ 0 < x < l,\ 0 < t < T && (3.1)\\ u(x,\,0) &= 0,\ u_t(x,\,0) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l && (3.2)\\ u(0,\,t) &= 0,\ u(l,\,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T && (3.3)\end{aligned}$$

Шаг №1.

Находим все не тождественно равные нулю решения однородного уравнения (3.1), удовлетворяющие условиям (3.3) и имеющие вид

$$u_k\,(x,\,t) = \mathscr{T}_k(t)\mathscr{X}_k(x). \tag{3.4}$$

Получаем для $\mathscr{X}_k(x)$ задачу

$$\begin{cases} \mathscr{X}_k'' + \lambda_k\mathscr{X}_k = 0,\\ \mathscr{X}_k(0) = \mathscr{X}_k(l) = 0.\end{cases} \tag{3.5}$$

Решением (3.5) является $\mathscr{X}_k(x) = \sin\dfrac{\pi k x}{l}$, $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2$.

Шаг №2.

Будем искать решения уравнения (3.1) в виде

$$u\,(x,\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{T}_k(t)\mathscr{X}_k(x), \tag{3.6}$$

где $\mathscr{T}_k(t)$ — неизвестная функция, подлежащая определению.

Подставляем этот ряд в уравнение (3.1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{T}_k''\mathscr{X}_k = \sum_{k=1}^{\infty} a^2\mathscr{T}_k\mathscr{X}_k'' + f\,(x,\,t)\,. \tag{3.7}$$

Из уравнения (3.5):

$$\mathscr{X}_k'' = -\lambda_k\mathscr{X}_k \Rightarrow \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{T}_k''\mathscr{X}_k = -a^2\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\mathscr{T}_k\mathscr{X}_k + f\,(x,\,t) \Rightarrow \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathscr{T}_k''(t) + a^2\lambda_k\mathscr{T}_k(t)\right)\mathscr{X}_k(x) = f\,(x,\,t)\,. \tag{3.10}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Умножаем (3.10) на $\mathscr{X}_n(x)$ и интегрируем. Поскольку

$$\int\limits_0^l \mathscr{X}_n(\xi)\mathscr{X}_k(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \dfrac{l}{2}, & n = k \end{cases}, \tag{3.11}$$

то от ряда (3.10) останется только одно слагаемое:

$$\mathscr{T}_n'' + a^2\lambda_n\mathscr{T}_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,\,t)\mathscr{X}_n(\xi)\,d\xi. \tag{3.12}$$

Обозначим

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,\,t)\mathscr{X}_n(\xi)\,d\xi. \tag{3.13}$$

Тогда для $\mathscr{T}_n(t)$ получаем уравнение

$$\mathscr{T}_n''(t) + a^2\lambda_n\mathscr{T}_n(t) = f_n(t). \tag{3.14}$$

Напоминание *(Из курса ОДУ)*

Пусть задано уравнение

$$y'' + \omega^2 y = p(t),\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1.$$

Тогда общее решение задачи Коши имеет вид:

$$y(t) = y_0\cos\omega t + \frac{y_1}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t \sin\omega(t-\tau)p(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда получаем

$$\mathscr{T}_k(t) = A_k \cos a\sqrt{\lambda}_k t + B_k \sin a\sqrt{\lambda}_k t + \frac{1}{a\sqrt{\lambda}_k}\int\limits_0^t \sin a\sqrt{\lambda}_k (t-\tau) f_k(\tau)\, d\tau, \tag{3.15}$$

$$u\,(x,\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k \cos a\sqrt{\lambda}_k t + B_k \sin a\sqrt{\lambda}_k t\Big)\sin\frac{\pi k x}{l} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a\sqrt{\lambda}_k}\int\limits_0^t \sin a\sqrt{\lambda}_k (t-\tau) f_k(\tau)\, d\tau \sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{3.16}$$

Требуем выполнения начальных условий:

$$u(x,\,0) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k x}{l} \implies \{A_k\} = 0, \tag{3.17}$$

$$u_t(x,\,0) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\frac{\pi k x}{l} \implies \{B_k\} = 0. \tag{3.18}$$

$$\tag{3.19}$$

Отсюда получаем:

$$u\,(x,\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a\sqrt{\lambda}_k}\int\limits_0^t \sin a\sqrt{\lambda}_k (t-\tau) f_k(\tau)\, d\tau \sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{3.20}$$

Шаг №3. Обоснование.

Покажем, что (3.20) действительно дает решение задачи (3.1)–(3.3). Для этого нужно показать, что ряд сходится в $\overline{\Omega}_T$, его функция есть функция из $\mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$ и удовлетворяет условиям (3.1)–(3.3).

Получим сначала для задачи (3.1)–(3.3) условия согласования. Пусть $(x_0,\,f_0) \in \overline{\Omega}_T$. Тогда, если существует решение задачи (3.1)–(3.3), то для функции u выполнено равенство:

$$u_{tt}(x_0,\,t_0) = a^2 u_{xx}(x_0,\,t_0) + f(x_0,\,t_0). \tag{3.21}$$

В этом равенстве $x_0 \to 0+0,\ t_0 \to 0+0$. Так как $u \in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$, с учетом (3.2) и (3.3) получим:

$$\underbrace{u_{tt}(0,\,0)}_{0} = a^2 \underbrace{u_{xx}(0,\,0)}_{0} + f(0,\,0). \tag{3.22}$$

Отсюда получаем, что равенство $f(0,\,0) = 0$ является необходимым условием существования решения. Аналогично, $f(l,\,0) = 0$.

Получаем условия согласования для задачи (3.1)–(3.3):

$$f(0,\,0) = f(l,\,0) = 0. \tag{3.23}$$

Будем предполагать выполненными равенства

$$f(0,\,t) = f(l,\,t) = 0,\ \ t \in [0, T]. \tag{3.24}$$

Пусть, кроме того, $f,\ f_x,\ f_{xx} \in \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$.

Получим некоторые оценки для $f_k(t)$ в этих предположениях:

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,\,t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi = -\frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{l}{\pi k} f(\xi,\,t)\,d\left(\cos\frac{\pi k\xi}{l}\right) =$$

$$= -\frac{l}{\pi k}\frac{2}{l}\left(f(\xi,\,t)\cos\frac{\pi k\xi}{l}\Big|_0^l - \int\limits_0^l \cos\frac{\pi k\xi}{l} f'(\xi,\,t)\,d\xi\right). \quad (3.25)$$

После несложных преобразований получим:

$$f_k(t) = -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \frac{2}{l}\int\limits_0^l f_{\xi\xi}(\xi,\,t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi = -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 b_k(f_{\xi\xi}). \quad (3.26)$$

$$|f_k(t)| = \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 b_k(f_{\xi\xi}). \quad (3.27)$$

Покажем, что из (3.27) следует, что $u \in \mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$. Сначала покажем, что $u \in \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$.

$$|u_k\,(x,\,t)| = \left|\int\limits_0^t \frac{1}{a\sqrt{\lambda_k}}\sin a\sqrt{\lambda}_k(t-\tau) f_k(\tau)\,d\tau \sin\frac{\pi k x}{l}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a\sqrt{\lambda}_k}\int\limits_0^t \left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 |b_k(f_{\xi\xi}(\tau))\,d\tau| = \frac{1}{a}\int\limits_0^t \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 |b_k(f_{\xi\xi}(\tau))\,d\tau|\,. \quad (3.28)$$

Используя неравенство $|\alpha||\beta| \leqslant \frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$, получим:

$$|u_k\,(x,\,t)| \leqslant \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left[\left(\frac{l}{\pi k}\right)^6 + |b_k(f_{\xi\xi}(\tau))|^2\right] d\tau \leqslant \frac{1}{2a}\left(\int\limits_0^T \left(\frac{l}{\pi k}\right)^6 d\tau + \int\limits_0^T b_k^2(f_{\xi\xi}(\tau))\,d\tau\right). \quad (3.29)$$

Но, поскольку для $\forall\,\tau \in [0,T]$ выполняется неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2(f_{\xi\xi}(\tau)) \leqslant \frac{2}{l}\int\limits_0^l f_{\xi\xi}^2(\xi,\tau)\,d\xi, \quad (3.30)$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T b_k^2(f_{\xi\xi}(\tau))\,d\tau \leqslant \frac{2}{l}\int\limits_0^T\int\limits_0^l f_{\xi\xi}^2(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \quad (3.31)$$

Обозначим через m_k числовой ряд

$$m_k = \frac{1}{2a}T\frac{l^6}{\pi^6}\frac{1}{k^6} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^T b_k^2(f_{\xi\xi}(\tau))\,d\tau. \quad (3.32)$$

Но $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k < +\infty$, так как ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6} < +\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T b_k^2(f_{\xi\xi}(\tau))\,d\tau < +\infty$. Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k$ является мажорирующим для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k\,(x,\,t)$, а, следовательно, $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k\,(x,\,t)\right) \in \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$.

Покажем существование производных, для примера u_{tt} (u_{xx}, u_{xt} — аналогично).

$$(u_k)_{tt} = \left(\frac{1}{a\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^t \sin a\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)f_k(\tau)\,d\tau \sin\frac{\pi kx}{l}\right)_{tt} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{\pi kx}{l}}{a\sqrt{\lambda_k}}\left(\underbrace{\sin a\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)f_k(\tau)}_{0}\Big|_{\tau=t} + \int\limits_0^t \cos a\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)f_k(\tau)\,d\tau\, a\sqrt{\lambda_k}\right)_t =$$

$$= \sin\frac{\pi kx}{l}\left(\cos a\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)f_k(\tau)\Big|_{\tau=t} - \int\limits_0^t a\sqrt{\lambda_k}\sin a\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)f_k(\tau)\,d\tau\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi kx}{l}\left(f_k(t) - \int\limits_0^T a\sqrt{\lambda_k}\sin a\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)f_k(\tau)\,d\tau\right). \quad (3.33)$$

Отсюда получаем оценку:

$$|(u_k)_{tt}| \leqslant \left(|f_k(t)| + \int\limits_0^T a\frac{\pi k}{l}\,|f_k(\tau)|\,d\tau\right) \leqslant \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 |b_k(f_{\xi\xi}(\tau)| + a\frac{\pi k}{l}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \int\limits_0^T |b_k(f_{\xi\xi}(\tau))|\,d\tau. \quad (3.34)$$

Воспользуемся соотношением $|\alpha||\beta| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$:

$$|(u_k)_{tt}| \leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{l}{\pi k}\right)^6 + |b_k(f_{\xi\xi}(\tau))|^2\right] + \frac{a}{2}\int\limits_0^T \left[\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 + |b_k(f_{\xi\xi}(\tau))|^2\right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{l}{\pi k}\right)^6 + |b_k(f_{\xi\xi}(\tau))|^2\right] + \frac{a}{2}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 T + \frac{a}{2}\int\limits_0^T |b_k(f_{\xi\xi}(\tau))|^2\,d\tau = m_k^{(2)}. \quad (3.35)$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k^{(2)} < +\infty$, так как, с учетом неравенства Бесселя,

$$\sum_{k=1}^N \int\limits_0^T b_k^2(f_{\xi\xi}(\tau))\,d\tau \leqslant \int\limits_0^T \sum_{k=1}^N b_k^2(f_{\xi\xi}(\tau))\,d\tau \leqslant \int\limits_0^T \frac{2}{l}\int\limits_0^l \left(f_{\xi\xi}(\xi\, t)\right)^2\,d\tau < +\infty,\ \forall N, \quad (3.36)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6} < +\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} < +\infty. \quad (3.37)$$

Тогда, по теореме Вейерштрасса, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k)_{tt}$ сходится равномерно и $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k)_{tt}\right) \in \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$. Аналогично для u_{xx}, u_{xt}. Отсюда следует, что $u \in \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$.

Проверим, что $u\,(x,\,t)$ удовлетворяет всем условиям:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u\,(x,\,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sum_{k=1}^{\infty} u_k\,(x,\,t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\right)}_{f_k(t)\ \text{– по построению}} \sin\frac{\pi kx}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{\pi kx}{l} = f\,(x,\,t)\,. \quad (3.38)$$

Проверим начальные условия:

$$u\,(x,\,t)|_{t=0} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{0}\frac{1}{a\sqrt{\lambda_k}}\sin a\sqrt{\lambda}_k(t-\tau)f_k(\tau)\,d\tau\sin\frac{\pi kx}{l}=0 \tag{3.39}$$

$$u_t(x,\,0) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{\infty}u_k\,(x,\,t)\right)\Bigg|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{(u_k)_t\,(x,\,0)}_{0}=0 \tag{3.40}$$

$$u(0,\,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}u_k(0,\,t)=0 \tag{3.41}$$

$$u(l,\,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}u_k(l,\,t)=0 \tag{3.42}$$

Теорема 3.1. *Пусть* $f,\ f_x,\ f_{xx}\in \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$ *и выполнены условия согласования* $f(0,\,t)=f(l,\,t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.1)–(3.3), *представленное абсолютно и равномерно сходящимся рядом*

$$u\,(x,\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_{o}^{t}\sin a\sqrt{\lambda}_k(t-\tau)f_k(\tau)\,d\tau\sin\frac{\pi kx}{l},$$

где

$$f_k(\tau)=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(\xi,\,\tau)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi.$$

§4. Первая краевая задача для волнового уравнения (общий случай)

Постановка задачи.

Найти функцию $u\in\mathrm{C}^2\left(\overline{\Omega}_T\right)$, удовлетворяющую условиям

$$u_{tt}\,(x,\,t) \;=\; a^2u_{xx}\,(x,\,t)+f\,(x,\,t)\,,\ 0<x<l,\ 0<l<T, \tag{4.1}$$

$$u(x,\,0) \;=\; \varphi(x),\ u_t(x,\,0)=\psi(x),\ 0\leqslant x\leqslant l, \tag{4.2}$$

$$u(0,\,t) \;=\; \mu_1(t),\ u(l,\,t)=\mu_2(t),\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{4.3}$$

В условиях (4.1)–(4.3): $f,\,\varphi,\,\psi,\,\mu_1,\,\mu_2$ — заданные функции. Сначала делаем условия (4.3) однородными. Для этого определим функцию

$$W\,(x,\,t) \;=\; \mu_1(t)+\frac{x}{l}\,(\mu_2(t)-\mu_1(t))\,,\ (x,\,t)\in\overline{\Omega}_T, \tag{4.4}$$

$$W(0,\,t) \;=\; \mu_1(t);\ W(l,\,t)=\mu_2(t). \tag{4.5}$$

Будем искать решение задачи (4.1)–(4.3) в виде:

$$u\,(x,\,t)=v\,(x,\,t)+W\,(x,\,t)\,, \tag{4.6}$$

где $W\,(x,\,t)$ — новая неизвестная функция.

Для $v\,(x,\,t)$:

$$
\begin{aligned}
v(0,\,t) &= u(0,\,t) - W(0,\,t) = 0, && (4.7)\\
v(l,\,t) &= u(l,\,t) - W(l,\,t) = 0. && (4.8)
\end{aligned}
$$

Подставляем в условия (4.1)–(4.3) функцию u в виде $u = v + W$:

$$
\begin{aligned}
v_{tt}\,(x,\,t) + W_{tt}\,(x,\,t) &= a^2 \left(v_{xx}\,(x,\,t) + \underbrace{W_{xx}\,(x,\,t)}_{0} \right) + f\,(x,\,t)\,, && (4.9)\\
v(x,\,0) + W(x,\,0) &= \varphi(x);\;\; v_t(x,\,0) + W_t(x,\,0) = \psi(x), && (4.10)\\
v(0,\,t) &= 0,\;\; v(l,\,t) = 0. && (4.11)
\end{aligned}
$$

Тогда для $v\,(x,\,t)$ получаем задачу

$$
\begin{aligned}
v_{tt}\,(x,\,t) &= a^2 v_{xx}\,(x,\,t) + \widetilde{f}\,(x,\,t)\,;\;\; \widetilde{f}\,(x,\,t) = f\,(x,\,t) - W_{tt}, && (4.12)\\
v(x,\,0) &= \widetilde{\varphi}(x),\;\; \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - W(x,\,0), && (4.13)\\
v_t(x,\,0) &= \widetilde{\psi}(x),\;\; \widetilde{\psi}(x) = \psi(x) - W_t(x,\,0), && (4.14)\\
v(0,\,t) &= 0,\;\; v(l,\,t) = 0. && (4.15)
\end{aligned}
$$

Будем искать функцию $v\,(x,\,t)$ в виде $v = v^{(1)} + v^{(2)}$, где

$$
\left\{
\begin{aligned}
v^{(1)}_{tt} &= a^2 v^{(1)}_{xx}\,,\\
v^{(1)}(x,\,0) &= \widetilde{\varphi}(x),\;\; v^{(1)}_t(x,\,0) = \widetilde{\psi}(x),\\
v^{(1)}(0,\,t) &= 0,\;\; v^{(1)}(l,\,t) = 0,
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{aligned}
v^{(2)}_{tt} &= a^2 v^{(2)}_{xx} + \widetilde{f}\,(x,\,t)\,,\\
v^{(2)}(x,\,0) &= 0,\;\; v^{(2)}_t(x,\,0) = 0,\\
v^{(2)}(0,\,t) &= 0,\;\; v^{(2)}(l,\,t) = 0.
\end{aligned}
\right.
\qquad (4.16)
$$

Проверим, что $v = v^{(1)} + v^{(2)}$. Заметим, что

$$
\left\{
\begin{aligned}
\left(v^{(1)} + v^{(2)}\right)_{tt} &= a^2 \left(v^{(1)} + v^{(2)}\right)_{xx} + \widetilde{f}\,(x,\,t)\,,\\
\left(v^{(1)} + v^{(2)}\right)(x,\,0) &= \widetilde{\varphi}(x),\;\; \left(v^{(1)} + v^{(2)}\right)_t(x,\,0) = \widetilde{\psi}(x),\\
(v^{(1)} + v^{(2)})(0,\,t) &= 0,\;\; (v^{(1)} + v^{(2)})(l,\,t) = 0.
\end{aligned}
\right.
\qquad (4.17)
$$

Для $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ — решения известны.

Алгоритм решения задачи (4.1)–(4.3):

1. Берем функцию $W\,(x,\,t) = \mu_1(t) + \dfrac{x}{l}\,(\mu_2(t) - \mu_1(t))$;
2. Находим $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, $\widetilde{f}$;
3. Находим $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ в виде ряда Фурье;
4. Находим $u = W + v^{(1)} + v^{(2)}$.

§5. Принцип максимума для параболического уравнения

Пусть $\Omega^*_T = \{(x,\,t) :\; 0 < x < l,\, 0 < l \leqslant T\}$. Рассмотрим в Ω^*_T следующее обозначение:

$$
\mathscr{L}_U = \rho\,(x,\,t)\,u_t\,(x,\,t) - \left(a\,(x,\,t)\,u_{xx}\,(x,\,t) + b\,(x,\,t)\,u_x(x,t) + c\,(x,\,t)\,u\,(x,\,t)\right), \qquad (5.1)
$$

где ρ, a, b, c — заданные функции.

Рассмотрим в Ω_T^* уравнения относительно $u\,(x,\,t)$:

$$(\mathscr{L}_U)\,(x,\,t) = f\,(x,\,t)\,,\;\;(x,\,t) \in \Omega_T^*. \tag{5.2}$$

В уравнении (5.2) $f\,(x,\,t)$ — заданная функция.

Будем предполагать: $\rho\,(x,\,t) \geqslant \rho_0 > 0$, $a\,(x,\,t) \geqslant a_0 > 0$, $c\,(x,\,t) \leqslant 0$, $\rho,\,a,\,b,\,c \in \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$ **??**.

Легко проверить, что (5.2) — параболическое уравнение с частными производными относительно $u\,(x,\,t)$: $a_{11} = -a\,(x,\,t)$; $a_{12} = 0$; $a_{22} = 0$; $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0\;\;\to$ параболический тип.

Определение 5.1. *Пусть* $\overline{\Omega}_T = \{(x,\,t):\;0 \leqslant x \leqslant l,\,0 \leqslant t \leqslant T\}$. *Тогда параболической границей множества* $\overline{\Omega}_T$ *называется множество точек*

$$\widetilde{\partial}\Omega_T = \{(x,\,t):\;0 \leqslant x \leqslant l,\,t = 0\} \cup \{(x,\,t):\;x = 0,\,0 \leqslant t \leqslant T\} \cup \{(x,\,t):\;x = l,\,0 \leqslant t \leqslant T\}\,. \tag{5.3}$$

$$\overline{\Omega}_T = \Omega_T^* \cup \widetilde{\partial}\Omega_T. \tag{5.4}$$

Под решением уравнения (5.2) будем понимать функцию $u \in \mathrm{C}^{2,1}_{x,t}\left(\Omega_T^*\right) \bigcap \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$.

Теорема 5.1. *Принцип максимума Пусть* $u \in \mathrm{C}^{2,1}_{x,t}\left(\Omega_T^*\right) \bigcap \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$. *Тогда, если* $(\mathscr{L}_U)\,(x,\,t) \leqslant 0$, $(x,\,t) \in \Omega_T^*$ $((\mathscr{L}_U)\,(x,\,t) \geqslant 0,\;(x,\,t) \in \Omega_T^*)$, *то* $u\,(x,\,t)$ *принимает значения положительного максимума (отрицательного минимума) на параболической границе.*

Замечание 1. Поскольку функция $u \in \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$, то она достигает своего максимального и минимального значения. При этом $(x_1,\,t_1)$ — точка, в которой достигается минимум, $(x_2,\,t_2)$ — точка, в которой достигается максимум:

$$u(x_1,\,t_1) \;=\; u_{min} = \min_{(x,\,t)\in\overline{\Omega}_T} u\,(x,\,t)\,, \tag{5.5}$$

$$u(x_2,\,t_2) \;=\; u_{max} = \max_{(x,\,t)\in\overline{\Omega}_T} u\,(x,\,t)\,. \tag{5.6}$$

Если $\mathscr{L}_U \leqslant 0$, то где-то на $\widetilde{\partial}\Omega_T$ есть точка $(x^*,\,t^*) \in \widetilde{\partial}\Omega_T$: $u(x^*,\,t^*) = u_{max}$. Аналогично, если $\mathscr{L}_U \geqslant 0$, то где-то на $\widetilde{\partial}\Omega_T$ есть точка $(x^*,\,t^*) \in \widetilde{\partial}\Omega_T$: $u(x^*,\,t^*) = u_{min}$.

Доказательство *(от противного)*.

□ Рассмотрим сначала случай положительного максимума, т.е. $\mathscr{L}_U \leqslant 0$, т.е. $\max\limits_{\overline{\Omega}_T} u\,(x,\,t) > 0$.

Пусть на $\widetilde{\partial}\Omega_T$ нет положительного максимума. Множество $\widetilde{\partial}\Omega_T$ — замкнутое ограниченное множество, следовательно, на $\widetilde{\partial}\Omega_T$ функция $u\,(x,\,t)$ имеет локальный максимум.

$$\exists\, M:\;\;\forall\,(x,\,t) \in \widetilde{\partial}\Omega_T\;\,u\,(x,\,t) \leqslant M, \tag{5.7}$$

$$\exists\,(x',\,t') \in \widetilde{\partial}\Omega_T:\;\,u(x',\,t') = M. \tag{5.8}$$

Так как на $\widetilde{\partial}\Omega_T$ нет положительного максимума, то он есть где-то на Ω_T^* (по теореме Вейерштрасса, он есть на $\overline{\Omega}_T = \widetilde{\partial}\Omega_T \cup \Omega_T^*$), следовательно, $\exists\,(x_0,\,t_0) \in \Omega_T^*:\;\;u(x_0,\,t_0) = u_{max} = \max\limits_{\overline{\Omega}_T} u\,(x,\,t) > 0$. При этом $0 < x_0 < l$, $0 < t_0 \leqslant T$.

Так как по предположению $M < u_{max}$, то $u_{max} = M + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v\,(x,\,t) = u\,(x,\,t) + k(t_0 - t),\;\;k > 0. \tag{5.9}$$

Выбираем $k > 0$: $kT < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $k(t_0 - t) \leqslant k|t_0 - t| \leqslant kT < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда на $\widetilde{\partial}\Omega_T$ $v\,(x,\,t) \leqslant \max\{u\,(x,\,t) + k(t_0 - t)\} < M + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Но при $t = t_0$, $x = x_0$: $v(x_0,\,t_0) = u(x_0,\,t_0) = M + \varepsilon$.

Следовательно, $v(x, t)$, как и функция $u(x, t)$, — не имеют на параболической границе глобального максимума $M+\varepsilon$. Но $v \in \mathrm{C}\left(\overline{\Omega}_T\right)$, следовательно, по теореме Вейерштрасса, где-то на $\overline{\Omega}_T$ функция v достигает максимума, пусть в точке $(x_1, t_1) \in \Omega_T^*$.

Могут быть 2 случая:

1. $0 < t_1 < T$

   Необходимые условия существования максимума в точке (x_1, t_1):

$$\begin{cases} v_x(x_1, t_1) & = & 0, \\ v_t(x_1, t_1) & = & 0, \\ v_{xx}(x_1, t_1) & \leqslant & 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

   Тогда в точке (x_1, t_1) для функции $v(x, t)$ получим:

$$u(x_1, t_1) = v(x_1, t_1) - k(t_0 - t_1) > M + \varepsilon - kT > M + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = M + \frac{\varepsilon}{2} > 0, \tag{5.11}$$

$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + k > 0, \tag{5.12}$$

$$u_x(x_1, t_1) = v_x(x_1, t_1) = 0, \tag{5.13}$$

$$u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leqslant 0. \tag{5.14}$$

   Тогда для $(\mathscr{L}_U)(x_1, t_1)$ получим:

$$\mathscr{L}_U(x_1, t_1) = \underbrace{\rho(x_1, t_1)}_{>0}\underbrace{u_t(x_1, t_1)}_{>0} - \\ - \left(\underbrace{a(x_1, t_1)}_{>0}\underbrace{u_{xx}(x_1, t_1)}_{\leqslant 0} + b(x_1, t_1)\underbrace{u_x(x_1, t_1)}_{0} + \underbrace{c(x_1, t_1)}_{<0}\underbrace{u(x_1, t_1)}_{>0}\right) > 0. \tag{5.15}$$

   Но по условию $(\mathscr{L}_U)(x, t) \leqslant 0$ для $\forall\ (x, t) \in \Omega_T^*$. Получили противоречие.

2. $t_1 = T$

$$v_t(x_1, T) \geqslant 0, \tag{5.16}$$

$$u_t(x_1, T) = v_t(x_1, T) + k > 0. \tag{5.17}$$

   Аналогично, $\mathscr{L}_U(x_1, T) > 0$. То есть опять получили противоречие с условием $\mathscr{L}_U \leqslant 0$. Следовательно, $\exists\,(x_*, t_*) \in \widetilde{\partial}\Omega_T$ такая, что $\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_T} u(x, t) = u(x_*, t_*)$.

Рассмотрим отрицательный минимум: $\mathscr{L}_U \geqslant 0$.

Пусть это не так, т.е. $\exists\,(x_0, t_0) \in \Omega_T^*$: $u(x_0, t_0) = \min\limits_{\overline{\Omega}_T} u(x, t) = u_{min} < 0$. При этом, если $m = \min\limits_{\widetilde{\partial}\Omega_T} u(x, t)$, то $u_{min} < m$.

Рассмотрим функцию $W(x, t) = -u(x, t)$. Для нее $W(x, t) \leqslant W(x_0, t_0)$, т.к. $u(x, t) \geqslant (x_0, t_0)$. Следовательно, (x_0, t_0) — точка положительного максимума для функции $W(x, t)$. Но $(\mathscr{L}_W)(x, t) = \mathscr{L}(-u(x, t)) = -f(x, t) \leqslant 0$.

Но $-m \leqslant \max\limits_{\widetilde{\partial}\Omega_T} W(x, t) < -u_{min}$. Следовательно, $W(x, t)$ не достигает положительного максимума, т.е. получили противоречие. Следовательно, $u(x, t)$ достигает своего отрицательного минимума на параболической границе $\widetilde{\partial}\Omega_T$. ■

Следствие 1. *Первая краевая задача для уравнения теплопроводности не может иметь двух различных решений.*

Доказательство *(от противного)*.
□ Пусть $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$, $u^{(1)} \neq u^{(2)}$

$$\begin{aligned}
\rho u_t^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right) - q, u^{(2)} + f(x,t), && (5.18)\\
u^{(2)}(x,0) &= \varphi(x), && (5.19)\\
u^{(2)}(0,t) &= \mu_1(t), \qquad u^{(2)}(l,t) = \mu_2(t), && (5.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho u_t^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right) - q, u^{(1)} + f(x,t), && (5.21)\\
u^{(1)}(x,0) &= \varphi(x), && (5.22)\\
u^{(1)}(0,t) &= \mu_1(t), \qquad u^{(1)}(l,t) = \mu_2(t), && (5.23)
\end{aligned}$$

Тогда для функции $u = u^{(2)} - u^{(1)}$ получим задачу:

$$\begin{aligned}
\rho u_t &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) - qu, && (5.24)\\
u(x,0) &= 0, && (5.25)\\
u(0,t) &= 0, \qquad u(l,t) = 0. && (5.26)
\end{aligned}$$

Для уравнения (5.24) справедлив принцип максимума с $\mathscr{L}_U = \rho u_t - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) - qu\right)$, так как $\mathscr{L}_U \leqslant 0$, то u принимает значение положительного $\max$ на параболической границе, т.е. $u \geqslant 0$. Но из вида параболической границы (5.25)–(5.26) следует, что $u \leqslant 0$, получаем:

$$\begin{cases} u \geqslant 0 \\ u \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow\ u = 0. \qquad (5.27)$$

Противоречие, так как предполагали, что $u \neq 0$. ■

Следствие 2. *Третья краевая задача для уравнения теплопроводности не может иметь двух различных решений.*

Доказательство *(от противного)*.
□ Пусть $\exists\, u = u^{(2)} - u^{(1)} \neq 0$, тогда

$$\begin{aligned}
\rho u_t &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) - qu, && (5.28)\\
u(x,0) &= 0, && (5.29)\\
u_x(0,t) - h_1 u(0,t) &= 0, &&\\
u_x(l,t) + h_2 u(l,t) &= 0, \qquad (h_1 > 0, h_2 > 0). && (5.30)
\end{aligned}$$

Аналогично, $\mathscr{L}_U = \rho u_t - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) - qu\right)$ удовлетворяет условию принципа максимума.

Рассмотрим случай положительного максимума. При $t = 0$ нет положительного максимума. Пусть при $x = 0$, $t = t^*$ есть $u(0,t^*) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u(x,t)$. Рассмотрим $u_x(0,t^*) - h_1 u(0,t^*) = 0$.

Так как $u(0,t^*)>0$, $u_x(0,t^*)<0$ и $h_1>0$, то получаем, что $u_x(0,t^*)-h_1u(0,t^*)<0$. Противоречие. Аналогично рассматривается случай отрицательного минимума. ■

Следствие 3. *Вторая краевая задача для уравнения теплопроводности не может иметь двух различных решений.*

Доказательство.
□

$$
\begin{aligned}
u_t &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)-qu=ku_{xx}+k_xu_{xx}-qu, && (5.31)\\
u(x,0) &= 0, && (5.32)\\
u(0,t) &= 0, \qquad u(l,t)=0. && (5.33)
\end{aligned}
$$

Пусть $g(x)=1+\left(x-\dfrac{l}{2}\right)^2$ тогда $g(x)>0$, $x\in[0,l]$

$$
\begin{aligned}
g'(0) &= 2\left(x-\frac{l}{2}\right)\Bigg|_{x=0}=-l<0, && (5.34)\\
g'(l) &= 2\left(x-\frac{l}{2}\right)\Bigg|_{x=l}=l>0. && (5.35)
\end{aligned}
$$

Пусть $v(x,t)=\dfrac{u(x,t)}{g(x)}\not\equiv 0$ — по предположению, отсюда $u=vg\not\equiv 0$ подставим в уравнение (5.31):

$$
(\rho g)v_t=k(g_{xx}v+2g_xv_x+gv_{xx})+k_x(g_xv+v_xg)-q(x)gv. \tag{5.36}
$$

Для v получаем уравнение:

$$
(\rho g)v_t=\underbrace{(kg)}_{a(x)}v_{xx}+\underbrace{(2kg_x+k_xg)}_{b(x)}v_x+\underbrace{(kg_{xx}+k_xg_x-q(x)g)}_{p(x)}v. \tag{5.37}
$$

Рассмотрим функцию $p(x)=kg_{xx}+k_xg_x-q(x)g$. Если $p(x)\leqslant 0$ ничего делать не нужно, если $p(x)>0$ в какой-то точке из $(0,l)$, то, пусть $\bar p=\max\limits_{[0,\,l]}p(x)>0$, делаем замену:

$$
w(x,t)=\exp(-\beta t)v(x,t),\quad \text{где}\ \beta=\frac{\bar p}{\rho_0}\quad \rho(x,t)\geqslant\rho_0>0. \tag{5.38}
$$

Отсюда получаем $v(x,t)=\exp(\beta t)w(x,t)$, подставим его в (5.37):

$$
\rho g(\beta w+w_t)\exp(\beta t)=a(x)\exp(\beta t)w_{xx}+b(x)\exp(\beta t)w_x+p(x)w\exp(\beta t), \tag{5.39}
$$

после преобразований получим:

$$
(\rho g)w_t=a(x)w_xx+b(x)w_x+\underbrace{(p(x)-\rho g\beta)}_{c(x)}w. \tag{5.40}
$$

Принимая во внимание $g\geqslant 1$ (следует из определения $g(x)$) и (5.38) заметим, что $\rho g\beta\geqslant\rho_0\dfrac{\bar p}{\rho_0}=\bar p$, или $-\rho g\beta\leqslant-\bar p$ и рассмотрим $c(x)=p(x)-\rho g\beta\leqslant\bar p-\bar p=0$, то есть $c(x)\leqslant 0$.

К уравнению (5.40) применим принцип максимума. Рассмотрим условие на границе для $w(x,t)$:

$$
w(x,t)=\exp(-\beta t)v(x,t)=\exp(-\beta t)\frac{u}{g}\quad\Rightarrow\quad u(x,t)=g\exp(\beta t)w(x,t). \tag{5.41}
$$

Преобразуем $u_x(0,t)=0$ используя последнее выражение

$$g'(0)\exp(\beta t)w(0,t)+g(0)\exp(\beta t)w_x(0,t)=0 \quad \Rightarrow \quad w_x(0,t)+\frac{g'(0)}{g(0)}w(0,t)=0, \tag{5.42}$$

но $\dfrac{g_x(0)}{g(0)}=-\dfrac{l}{1+\left(\dfrac{l}{2}\right)^2}$, обозначим последнее через $-h_1<0$, тогда получим:

$$w_x(0,t)-h_1w(0,t)=0, \quad h_1=\frac{l}{1+\left(\dfrac{l}{2}\right)^2}>0. \tag{5.43}$$

Аналогично, получаем выражения для границы $u_x(l,t)=0$:

$$w_x(l,t)+h_2w(l,t)=0, \quad h_2=\frac{l}{1+\left(\dfrac{l}{2}\right)^2}>0. \tag{5.44}$$

Конечное условие $u(x,0)=0$, рассмотрим $w(x,0)$ для $\forall\, x$:

$$w(x,0)=\exp(-\beta t)\frac{u(x,0)}{g(x)}=0, \tag{5.45}$$

отсюда следует, что $w(x,t)$ удовлетворяет третьей краевой задаче с $f=0, \varphi=0, \mathscr{X}_1=0, \mathscr{X}_2=0$, откуда $w(x,t)\equiv 0 \Rightarrow u(x,t)\equiv 0$. Противоречие с предположением $u\not\equiv 0$. ■

§6. Построение решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье

Постановка задачи. Найти $u\in \mathrm{C}^{2,1}_{x,t}(\Omega^*_T)\cap \mathrm{C}(\overline{\Omega}_T)$ из условий:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= a^2u_{xx}(x,t), \quad (x,t)\in \mathrm{C}(\overline{\Omega}_T), && (6.1)\\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, && (6.2)\\ u(0,t) &= 0, \quad u(l,t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T. && (6.3)\end{aligned}$$

Шаг №1. Находим все решения уравнения (6.1) имеющие вид $u(x,t)=\mathscr{X}(x)\mathscr{T}(t)$ и удовлетворяющие краевым условиям (6.3).

$$\mathscr{X}(x)\mathscr{T}'(t)=a^2\mathscr{X}''(x)\mathscr{T}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathscr{T}'(t)}{a^2\mathscr{T}(t)}=\frac{\mathscr{X}''(x)}{\mathscr{X}(x)}=-\lambda. \tag{6.4}$$

Рассмотрим выражение для $\mathscr{X}(x)$: $\mathscr{X}''(x)+\lambda\mathscr{X}(x)=0$. Так как $u(0,t)=\mathscr{X}(0)$ и $\mathscr{T}(0)=0$, то из вида находимого решения следует, что $\mathscr{X}(0)=0$. Аналогично получается $\mathscr{X}(l)=0$. Для $\mathscr{X}(x)$ получили задачу Штурма-Лиувилля:

$$\mathscr{X}''(x)+\lambda\mathscr{X}(x)=0, \quad \mathscr{X}(0)=\mathscr{X}(l)=0. \tag{6.5}$$

Решение этой задачи, будет:

$$\mathscr{X}_k(x)=\sin\frac{\pi kx}{l}, \quad \lambda_k=\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2. \tag{6.6}$$

Для $\mathscr{T}_k(t)$ уравнение принимает вид:

$$\mathscr{T}_k^{'}(t) + a^2\lambda_k \mathscr{T}_k(t) = 0. \tag{6.7}$$

Соответственно, решение — $\mathscr{T}_k(t) = \mathscr{T}_k(0)\exp(-a^2\lambda_k t)$ и получаем выражения для $u_k(x,t)$:

$$u_k(x,t) = \mathscr{T}_k(0)\exp(-a^2\lambda_k t)\sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{6.8}$$

Шаг №2. Ищем функцию $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{T}_k(0)\exp(-a^2\lambda_k t)\sin\frac{\pi k x}{l}, \tag{6.9}$$

при $t = 0$ получается:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{T}_k(0)\sin\frac{\pi k x}{l}, \tag{6.10}$$

необходимо найти $\{\mathscr{T}_k(0)\}$. Умножим выражение (6.10) на $\sin\dfrac{\pi n x}{l}$, $n \in \mathbb{N}$, а затем проинтегрируем от 0 до l по x:

$$\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int\limits_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx}_{\substack{0, \quad n\neq k \\ \frac{l}{2}, \quad n=k}} = 0 + \dots + \frac{l}{2}\mathscr{T}_k(0) + \dots = \frac{l}{2}\mathscr{T}_k(0). \tag{6.11}$$

Из предыдущего выражения можно найти $\mathscr{T}_k(0)$:

$$\mathscr{T}_k(0) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi k \xi}{l}\,d\xi, \tag{6.12}$$

тогда $u(x,t)$ будет:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi k \xi}{l}\,d\xi \exp(-a^2\lambda_k t)\sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{6.13}$$

Шаг №3. Обоснование. Сначала покажем, что $u \in \mathrm{C}^{2,1}_{x,t}(\Omega_T^*) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega}_T)$. Получим условия согласования:

$$\lim_{t\to 0+0} u(0,t) = 0 = \varphi(0). \tag{6.14}$$

Следовательно, $\varphi(0) = 0$ — необходимое условие существования решения. Аналогично получается $\varphi(l) = 0$. Получаем условия согласования:

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0. \tag{6.15}$$

Теорема 6.1. *Пусть $\varphi \in \mathrm{C}^1[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, тогда существует единственное решение задачи* (6.1)–(6.3)*, представимое в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда* (6.13)

Доказательство.

$\square$ Сначала докажем, что ряд даёт непрерывную на $\overline{\Omega}$ функцию. Для этого по теореме Вейерштрасса построим ??фиксированный?? ряд. Оценка для этого:

$$\varphi_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi = \frac{l}{\pi k}a_k(\varphi') \quad \text{(интеграл взяли по частям.)} \tag{6.16}$$

Для $|u_k(x,t)|$ получаем оценку:

$$|u_k(x,t)| = \left|\exp(-a^2\lambda_k t)\sin\frac{\pi kx}{l}\frac{l}{\pi k}a_k(\varphi')\right| \leqslant \frac{l}{\pi k}\left|a_k(\varphi')\right|. \tag{6.17}$$

Используя неравенство $|\alpha||\beta| \leqslant \dfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$ преобразуем последнее выражение:

$$|u_k(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 + \left(\left|a_k(\varphi')\right|\right)^2\right) = m_k. \tag{6.18}$$

Затеим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k < +\infty$, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2}_{\text{сходится}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k(\varphi')\right|^2. \tag{6.19}$$

Рассмотрим последнее слагаемое предыдущего выражения. Используя неравенство Бесселя, получим:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k(\varphi')\right|^2 \leqslant \frac{1}{2}\frac{2}{l}\int\limits_0^l \left(\varphi'(\xi)\right)^2 d\xi. \tag{6.20}$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Тогда при $t=0$:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\,d\xi\sin\frac{\pi kx}{l} = \varphi(x) \quad \text{(по свойству рядов Фурье.)} \tag{6.21}$$

Покажем, что $u \in \mathrm{C}^{2,1}_{x,t}(\Omega^*_T)$. Для этого покажем, что ряд из производных u_{xx} и u_t сходится равномерно на любом множестве $\Omega^{t_1} = \{(x,t):\ 0 \leqslant x \leqslant l, 0 < t_1 \leqslant t \leqslant T\}$

Рассмотрим, например, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(u_k)_t$ на Ω^{t_1}:

$$(u_k)_t = \exp(-a^2\lambda_k t)(-a^2\lambda_k)\sin\frac{\pi kx}{l}\mathscr{T}_k(0). \tag{6.22}$$

Оценим $|(u_k)_t|$:

$$|(u_k)_t| \leqslant |\mathscr{T}_k(0)|\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 a^2\frac{1}{\exp\left(\left(\frac{\pi}{l}a\right)^2 t_1k^2\right)} = \left(\frac{\pi}{l}a\right)^2\frac{k^2}{\exp\left(\left(\frac{\pi}{l}a\right)^2 t_1k^2\right)}|\mathscr{T}_k(0)|. \tag{6.23}$$

Пусть $q = 1/\exp\left(\left(\dfrac{\pi}{l}a\right)^2 t_1\right) < 1$, тогда

$$|(u_k)_t| \leqslant \left(\frac{\pi}{l}a\right)^2 k^2 q^{k^2}|\mathscr{T}_k(0)|. \tag{6.24}$$

Оценим $|\mathscr{T}_k(0)|$, используя неравенство Коши-Буняковского:

$$|\mathscr{T}_k(0)| = \left|\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi\right| \leqslant \frac{2}{l}\sqrt{\int\limits_0^l \varphi^2(\xi)\,d\xi}\sqrt{\int\limits_0^l \sin^2\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi} = \frac{2}{l}\sqrt{\int\limits_0^l \varphi^2(\xi)\,d\xi}\sqrt{\frac{l}{2}} \leqslant M. \tag{6.25}$$

Подставим результат (6.25) в выражение (6.23), и получим:

$$|(u_k)_t| \leqslant \left(\frac{\pi}{l}a\right)^2 k^2 q^{k^2} M = m_k^{(2)}, \tag{6.26}$$

покажем, что данный ряд сходится. По признаку Даламбера:

$$\frac{m_{k+1}^{(2)}}{m_k^{(2)}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^2 q^{2k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{6.27}$$

следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k^{(2)} < +\infty$ и $u \in \mathrm{C}_t^1(\Omega^{t_1})$.

Аналогично доказывается $u_{xx} \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}^{t_1})$, получаем $u \in \mathrm{C}_{x,t}^{2,1}(\Omega_T^*)$. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}}_{0}\right) = 0, \tag{6.28}$$

уравнение становится вырожденным. При $x = 0$, $x = l$:

$$u(0,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0,t) = 0, \tag{6.29}$$

$$u(l,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(l,t) = 0. \tag{6.30}$$

Значит $u(x,t)$ — решение задачи (6.1)–(6.3).

■

Определение 6.1. *Функция*

$$G(x,\xi,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\exp(-a^2\lambda_k t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{6.31}$$

называется функцией Грина для задачи (6.1)–(6.3).

Теорема 6.2. *Ряд* (6.31) *сходится для* $\forall\, t > 0$*, то есть функция Грина определена при* $t > 0$*,* $0 \leqslant x \leqslant l$*,* $0 < \xi < l$ *и непрерывна на* Ω_{T^*}.

Доказательство.
□ Возьмём $t_1 > 0$: $\overline{\Omega}^{t_1} = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\, t_1 \leqslant t \leqslant T\}$, покажем, что в $\overline{\Omega}^{t_1}$ ряд (6.31) сходится равномерно. Оцениваем $|G_k(x,\xi,t)|$ (по аналогии с (6.23)):

$$|G_k(x,\xi,t)| = \left|\frac{2}{l}\exp(-a^2\lambda_k t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\sin\frac{\pi k x}{l}\right| \leqslant \left|\frac{2}{l}\underbrace{\exp\left(\left(-a\frac{\pi}{l}\right)^2 t_1\right)}_{q}{}^{k^2}\right| \leqslant \frac{2}{l}q^{k^2}. \tag{6.32}$$

Получили $|G_k(x,\xi,t)| \leqslant \dfrac{2}{l} q^{k^2} = m_k$ мажорирующий ряд, так как $q < 1$. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2}{l} q^k < +\infty$. Так как t_1 было выбрано произвольно, то ряд (6.31) сходится для $\forall t > 0$. ■

Следствие 1. *Решение задачи* (6.1)–(6.3) *для* $\forall\, \varphi \in \mathrm{C}^2[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ *имеет вид:*

$$u(x,t) = \int\limits_0^l G_k(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi. \tag{6.33}$$

Доказательство.

□ Рассмотрим $u(x,t)$ и так как ряд $u_k(x,t)$ сходится на $\overline{\Omega}^{t_1}$, $t_1 < t$, то:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi k \xi}{l}\, d\xi \exp(-a^2\lambda_k t) \sin\frac{\pi k x}{l} =$$

$$= \int\limits_0^l \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \exp(-a^2\lambda_k t) \sin\frac{\pi k x}{l} \sin\frac{\pi k \xi}{l}}_{G(x,\xi,t)} \varphi(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi. \tag{6.34}$$

■

§7. Построение решения неоднородного уравнения теплопроводности методом Фурье. Функция Грина.

Постановка задачи. Найти $u \in \mathrm{C}^{2,1}_{x,t}(\Omega_T^*) \bigcap \mathrm{C}(\overline{\Omega}_T)$ из условий:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad 0 \leqslant x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{7.1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{7.2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7.3}$$

Шаг №1. Находим все решения однородного уравнения (7.1) в виде $u(x,t) = \mathscr{X}(x)\mathscr{T}(t)$, при этом уравнение для $\mathscr{X}(x)$ будет (6.5) и его решение имеет вид (6.6).

Шаг №2. Получили решение в виде $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{T}_k(x)\mathscr{X}_k(x)$, где $\mathscr{T}_k(x)$ неизвестная функция. Подставим это решение в уравнение (7.1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{T}_k'(t)\mathscr{X}_k(x) = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{T}_k(t) \underbrace{\mathscr{X}_k''(t)}_{-\lambda_k \mathscr{X}_k} + f(x,t). \tag{7.4}$$

Преобразуя полученное выражение, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mathscr{T}_k'(t) + a^2\lambda_k \mathscr{T}_k(t)\Big)\, \mathscr{X}_k(x) = f(x,t), \tag{7.5}$$

домножим на $\mathscr{X}_n$, $n \in \mathbb{N}$ и проинтегрируем от 0 до l по x:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mathscr{T}_k'(t) + a^2\lambda_k \mathscr{T}_k(t)\Big) \underbrace{\int\limits_0^l \mathscr{X}_k(x)\mathscr{X}_n(x)\, dx}_{\begin{smallmatrix} 0, & n \neq k \\ \frac{l}{2}, & n = k \end{smallmatrix}} = \int\limits_0^l f(x,t)\mathscr{X}_n(x)\, dx. \tag{7.6}$$

Преобразуя, рассмотрим член ряда:

$$\mathscr{T}_k^{'}(t) + a^2\lambda_k \mathscr{T}_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\mathscr{X}_n(x)\,dx, \tag{7.7}$$

обозначим правую часть через $f_k(t)$:

$$\mathscr{T}_k^{'}(t) + a^2\lambda_k \mathscr{T}_k(t) = f_k(t). \tag{7.8}$$

Напоминание *(Из курса ОДУ)*

Пусть есть обыкновенное дифференциальное уравнение: $y^{'} + wy = p(t)$ и $y(0) = y_0$, тогда его решение будет:

$$y(t) = y_0\exp(-wt) + \int\limits_0^l \exp(-w(t-\tau))p(\tau)\,d\tau.$$

тогда

$$\mathscr{T}_k(t) = \mathscr{T}_k(0)\exp(-a^2\lambda_k t) + \int\limits_0^t \exp(-a^2\lambda_k(t-\tau)f_k(\tau)\,d\tau, \tag{7.9}$$

и

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathscr{T}_k(0)\exp(-a^2\lambda_k t)\sin\frac{\pi kx}{l} + \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^t \exp(-a^2\lambda_k(t-\tau)f_k(\tau)\,d\tau\sin\frac{\pi kx}{l}. \tag{7.10}$$

Рассмотрим условие $u(x,0) = 0$, тогда получается $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathscr{T}_k(0)\sin\dfrac{\pi kx}{l} = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Очевидно $\mathscr{T}_k(0) = 0$. Тогда решение задачи принимает вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^t \exp(-a^2\lambda_k(t-\tau))f_k(\tau)\,d\tau\sin\frac{\pi kx}{l}, \tag{7.11}$$

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi. \tag{7.12}$$

Шаг №3. Обоснование. Покажем, что функция, представленная рядом (7.11) является решение задачи (7.1)–(7.3).

Напоминание

Пусть для $\forall\, p(t), q(t) \in \mathrm{C}[0,l]$, $\int\limits_0^{l'} p(t)q(t)dt$ - скалярное произведение, то для этого скалярного произведения выполняется неравенство Коши-Буняковского $|(p,q)| \leqslant \sqrt{(p,p)}\sqrt{(q,q)}$, тогда для $\forall\, p(t), q(t) \in \mathrm{C}[0,l]$:

$$\left|\int\limits_0^{l'} p(t)q(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\int\limits_0^{l'} p^2(t)\,dt}\sqrt{\int\limits_0^{l'} q^2(t)\,dt}.$$

Покажем, что ряд (7.11) есть функция на $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$:

$$|u_k(x,t)| \leqslant \left| \int\limits_0^t \underbrace{\exp(-a^2\lambda_k(t-\tau))}_{p(t)} \underbrace{f_k(x,\tau)}_{q(t)}\, d\tau \right| \leqslant \sqrt{\int\limits_0^t \exp(-2a^2\lambda_k(t-\tau))\, d\tau} \sqrt{\int\limits_0^t f_k^2(\tau)\, d\tau} =$$

$$= \frac{l}{\sqrt{2}a\pi k}\sqrt{1-\exp(-2a^2\lambda_k t)}\sqrt{\int\limits_0^t f_k^2(\tau)\, d\tau} \leqslant \frac{l}{\sqrt{2}a\pi k}\sqrt{\int\limits_0^t f_k^2(\tau)\, d\tau}. \quad (7.13)$$

применим к последнему выражению неравенство $|\alpha||\beta| \leqslant \dfrac{1}{2}\,(\alpha^2+\beta^2)$и заменим t на T:

$$|u_k(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{l^2}{a^2(\pi k)^2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^T f_k^2(\tau)\, d\tau = m_k. \quad (7.14)$$

Покажем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k < +\infty$, то есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k$ мажорирующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{l^2}{a^2\pi^2}\frac{1}{k^2}}_{\text{сходится}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^T \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(\tau)\, d\tau. \quad (7.15)$$

Рассмотрим последнее слагаемое и применим неравенство Бесселя $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2(\tau) \leqslant \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f^2(\xi,\tau)\, d\xi\right)$:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau \frac{2}{l}\int\limits_0^l f^2(\xi,\tau)\, d\xi < +\infty, \quad (7.16)$$

то есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k < +\infty$ и $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$.

Покажем, что $u \in \mathrm{C}^{2,1}_{x,t}(\Omega^*_T)$. Наложим ограничения на $f(x,t), f_t, f_x, f_{xx} \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ и условие согласования $f(0,t) = f(l,t) = 0$, $t \in [0,T]$. Получим оценку для f_k:

$$f_k(\tau) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\, d\xi. \quad (7.17)$$

Возьмём этот интеграл дважды по частям:

$$f_k(\tau) = -\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 \int\limits_0^l f''_x(\xi,\tau)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\, d\xi = -\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2 b_k(f'')(\tau). \quad (7.18)$$

Оценим $|(u_k)_{xx}|$:

$$|(u_k)_{xx}| = \left| -\int\limits_0^t \exp(-a^2\lambda_k(t-\tau)) b''_k(\tau)\left(\frac{l}{\pi k}\right)^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi k x}{l}\, d\tau \right|. \quad (7.19)$$

Используя свойство $|\alpha||\beta| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$, получим:

$$|(u_k)_{xx}| \leqslant \int\limits_0^t \frac{1}{2}\left[\exp(-2a^2\lambda_k(t-\tau)) + |b_k''(\tau)|^2\right] d\tau = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2a^2\lambda_k}(1-\exp(-2a^2\lambda_k t)) + \int\limits_0^t |b_k''(\tau)|^2\, d\tau\right]. \tag{7.20}$$

Заменим в последнем выражении t на T и преобразуем:

$$|(u_k)_{xx}| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{2a^2\lambda_k} + \frac{1}{2}\int\limits_0^T |b_k''(\tau)|^2\, d\tau = m_k^{(2)}. \tag{7.21}$$

Покажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k^{(2)} < +\infty$. Рассмотрим первое слагаемое неравенства (7.21):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{2a^2\lambda_k} \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty. \tag{7.22}$$

Рассмотрим второе слагаемое неравенства (7.21) и воспользуемся неравенством Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T |b_k''(\tau)|^2(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{2}{l}\int\limits_0^T\int\limits_0^l (f''(\xi,\tau)^2\, d\tau\, d\xi < +\infty, \tag{7.23}$$

следовательно $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k^{(2)}$ мажорирующий ряд, и $u_{xx} \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}_T)$ $(u_{xx} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k)_{xx})$.

Получили, что $u_t \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ и $u_{xx} \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}_T)$, откуда следует, что $u \in \mathrm{C}^{2,1}_{x,t}(\Omega_T^*) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega}_T)$.

Проверим, что $u(x,t)$ удовлетворяет условию (7.1)–(7.3):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{\pi k x}{l}, \tag{7.24}$$

по свойству рядов Фурье последнее выражение равно $f(x,t)$, и, следовательно, уравнение (7.1) выполняется. Получили:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}(x,0) = 0, \tag{7.25}$$

$$u(0,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(l,0) = 0, \quad \text{так как } u_k(0,t) = u_k(l,t) = 0. \tag{7.26}$$

Теорема 7.1. *Пусть* $f(x,t), f_t, f_x, f_{xx} \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}_T)$ *и* $f(0,t) = f(l,t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. *Тогда существует единственное решение задачи* (7.1)–(7.3) *представимое в виде абсолютно и равномерно сходящегося в* $\mathrm{C}(\overline{\Omega}_T)$ *ряда:*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int\limits_0^t \exp(-a^2\lambda_k(t-\tau))\int\limits_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\, d\xi\, d\tau \sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{7.27}$$

Следствие 1. *Решение задачи* (7.1)–(7.3) *можно представить через функцию Грина в виде:*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\, d\xi. \tag{7.28}$$

Доказательство.
□

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int\limits_0^t \exp(-a^2\lambda_k(t-\tau)) \int\limits_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{\pi k\xi}{l}\,d\xi\,d\tau \sin\frac{\pi k x}{l} =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \exp(-a^2\lambda_k(t-\tau)) \sin\frac{\pi k\xi}{l} \sin\frac{\pi k x}{l} \right) f(\xi,\tau)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi. \quad (7.29)$$

■

§8. Редукция общей краевой задачи для уравнения теплопроводности

Постановка задачи. Найти $u(x,t)$ из условий:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= a^2 u_{xx}(x,t), && (8.1)\\ u(x,0) &= \varphi(x), && (8.2)\\ u(0,t) &= \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t). && (8.3) \end{aligned}$$

Избавление от неоднородности в условии (8.1). Пусть $w(x,t) = \mu_1(t) + \dfrac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Заменим $u = v + W$, где v — пока неизвестная функция. Тогда наша задача принимает вид:

$$\begin{aligned} v_t(x,t) + W_t(x,t) &= a^2 v_t(x,t) + a^2 W_t(x,t) + f(x,t), && (8.4)\\ v(x,0) + W(x,0) &= \varphi(x), && (8.5)\\ v(0,t) + W(0,t) &= \mu_1(t), \quad v(l,t) + W(l,t) = \mu_2(t), && (8.6) \end{aligned}$$

из вида $w(x,t)$ видно, что $W(0,t) = \mu_1(t)$ и $W(l,t) = \mu_2(t)$, откуда после преобразований получаем задачу для $v(x,t)$:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= a^2 v_{xx}(x,t) + (f(x,t) - W_t(x,t)) = a^2 v_{xx}(x,t) + \widetilde{f}(x,t), && (8.7)\\ v(x,0) &= \varphi(x) - W(x,0) = \widetilde{\varphi}(x), && (8.8)\\ v(0,t) &= 0, \quad v(l,t) = 0. && (8.9) \end{aligned}$$

Ищем решение задачи (8.7)–(8.9) в виде $v = v^{(1)} + v^{(2)}$:

$$\begin{aligned} v^{(1)}(x,t) &= a^2 v^{(1)}_{xx}(x,t), && (8.10)\\ v^{(1)}(x,0) &= \widetilde{\varphi}(x), && (8.11)\\ v^{(1)}(0,t) &= 0, \quad v^{(1)}(l,t) = 0. && (8.12) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v^{(2)}(x,t) &= a^2 v^{(2)}_{xx}(x,t) + \widetilde{f}(x,t), && (8.13)\\
v^{(2)}(x,0) &= 0, && (8.14)\\
v^{(2)}(0,t) &= 0, \quad v^{(2)}(l,t) = 0. && (8.15)
\end{aligned}
$$

Находим $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ из §§5–6:

$$
u(x,t) = W(x,t) + v^{(1)} + v^{(2)} =
$$

$$
= \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + \int\limits_0^l G(x,\xi,t)\widetilde{\varphi}(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)\widetilde{f}(\xi,\tau)\, d\xi. \quad (8.16)
$$

§9. Гармонические функции. Теорема о среднем

Определение 9.1. *Пусть задана ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Функция u называется гармонической в Ω, если: $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ и $\Delta u(x,y) = \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$ для $\forall\,(x,y) \in \Omega$. $\Delta u = 0$ — уравнение Лапласа.*

Напоминание *(Формула Остроградского-Гаусса)*

Пусть Ω ограниченная область на плоскости. Пусть граница Ω — гладкая кривая $\partial\Omega$. Пусть кривая ориентирована так, что обходя Ω область остаётся слева. Пусть в $\overline{\Omega}$ задано векторное поле: для $\forall\,(x,y) \in \overline{\Omega}$, $\vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$, $w_1, w_2 \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$. $\operatorname{div}\vec{w} = \dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{\partial w_2}{\partial y}$, пусть $\vec{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, тогда

$$
\iint\limits_{\overline{\Omega}} \operatorname{div}\vec{w} = \int\limits_{\partial\Omega} \vec{w}\vec{n}\, dS.
$$

Зададим на плоскости следующие области:

$$
\begin{aligned}
B_R(x_0,\, y_0) &= \left\{(x,\, y)\colon \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < R\right\} && (9.1)\\
\overline{B}_R(x_0,\, y_0) &= \left\{(x,\, y)\colon \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leqslant R\right\} && (9.2)
\end{aligned}
$$

Теорема 9.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, где Ω — область, функция $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$, т.е u — гармоническая в Ω. Тогда для любого круга $\overline{B}_R \subset \Omega$ выполняется равенства*

$$
\begin{aligned}
u(x_0,\, y_0) &= \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\partial B_R} u(x,y)\, dS, && (9.3)\\
u(x_0,\, y_0) &= \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{B_R} u(x,y)\, dx\, dy. && (9.4)
\end{aligned}
$$

Доказательство.

$\square$ Пусть круг $\overline{B}_R \subset \Omega$, пусть $B_r(x_0,\, y_0) \subset \overline{B}_R(x_0,\, y_0)$ для $0 < r < R$. Пусть $\vec{w} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$,

то есть $\vec{w} = \operatorname{grad} u$. По формуле Остроградского-Гаусса:

$$\operatorname{div} \vec{w} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \Delta u = 0. \tag{9.5}$$

Следовательно, можно записать:

$$0 = \iint\limits_{B_R} \Delta u\, dx\, dy = \iint\limits_{B_R} \operatorname{div}\left(\operatorname{grad} u\right)\, dx\, dy = \tag{9.6}$$

применим формулу Остроградского:

$$= \int\limits_{\partial B_R} \left(\operatorname{grad} u,\, \vec{n}\right)\, dS = \int\limits_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0. \tag{9.7}$$

Перейдем в (9.7) к полярным координатам:

$$\begin{cases} x &= x_0 + \rho\cos\varphi \\ y &= y_0 + \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{9.8}$$

При этом $dS = r d\varphi$.

$$u(x,\, y) = u(x_0 + \rho\cos\varphi,\, y_0 + \rho\sin\varphi) = \widetilde{u}(\rho,\, \varphi) \tag{9.9}$$

Найдем $\dfrac{\partial u}{\partial n}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=r} = \lim_{\Delta\rho\to 0} \left.\frac{\widetilde{u}(\rho + \Delta\rho) - \widetilde{u}(\rho)}{\Delta\rho}\right|_{\rho=r} = \left.\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\rho}\right|_{\rho=r} \tag{9.10}$$

Значит, можно записать:

$$\int\limits_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \int\limits_{\partial B_R} \left.\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\rho}\right|_{\rho=r} r d\varphi = r\left[\left.\frac{d}{d\rho}\int\limits_0^{2\pi} \widetilde{u}(\rho,\, \varphi)\, d\varphi\right|_{\rho=r}\right] = r\left[\frac{d}{dr}\int\limits_0^{2\pi} \widetilde{u}(r,\, \varphi)\, d\varphi\right] =$$

$$= r\left[\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\int\limits_0^{2\pi} \widetilde{u}(r,\, \varphi)\, r d\varphi\right] = r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\int\limits_{\partial B_R} u(x,\, y)\, dS = 0 \tag{9.11}$$

Это значит, что

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\int\limits_{\partial B_R} u(x,\, y)\, dS = 0 \tag{9.12}$$

или, иными словами,

$$\frac{1}{r}\int\limits_{\partial B_R} u(x,\, y)\, dS \equiv const \text{ для } \forall\, r \in (0;\, R] \tag{9.13}$$

Из этого следует, что:

$$\frac{1}{r}\int\limits_{\partial B_R} u(x,\, y)\, dS = \frac{1}{R}\int\limits_{\partial B_R} u(x,\, y)\, dS \tag{9.14}$$

Воспользуемся интегральной теоремой о среднем. Согласно этой теореме для левой части равенства существует такая точка (x^*, y^*), что $\int\limits_{\partial B_R} u\,dS = 2\pi r u(x^*, y^*)$, и при этом точка (x^*, y^*) принадлежит окружности радиуса r с центром в точке (x_0, y_0). Следовательно, можно записать:

$$2\pi u(x^*, y^*) = \frac{1}{R}\int\limits_{\partial B_R} u(x, y)\,dS \tag{9.15}$$

Или

$$u(x^*, y^*) = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\partial B_R} u(x, y)\,dS \tag{9.16}$$

Устремим $r \to 0$. При этом (x^*, y^*) будет стремиться к точке (x_0, y_0). Переписав уравнение (9.16) при $r \to 0$ получим:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\partial B_R} u(x, y)\,dS \tag{9.17}$$

Получим теперь вторую формулу из условия теоремы. Для $\forall\, r \in (0, R]$ будет справедливо:

$$u(x_0, y_0)2\pi r = \int\limits_{\partial B_R} u(x, y)\,dS \tag{9.18}$$

Проинтегрируем это равенство по r от 0 до R:

$$u(x_0, y_0)\underbrace{\int\limits_0^R 2\pi r\,dr}_{\pi R^2} = \int\limits_0^R dr \int\limits_{\partial B_R} u(x, y)\,dS = \iint\limits_{B_R} u(x,y)\,dx\,dy \tag{9.19}$$

Таким образом, получаем требуемую формулу.

$$u(x_0\,y_0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{B_R} u(x,y)\,dx\,dy \tag{9.20}$$

■

§10. Принцип максимума для гармонических функций

Теорема 10.1. *Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ — решение уравнения $\Delta u = 0$ в области Ω. Пусть $M = \max\limits_{(x,\,y)\in\overline{\Omega}} u(x, y)$, $m = \min\limits_{(x,\,y)\in\overline{\Omega}} u(x, y)$. Тогда, если $\exists\,(x_0, y_0)\colon u(x_0, y_0) = M$ или $\exists\,(x_0, y_0)\colon u(x_0, y_0) = m$, то $u(x, y) \equiv const$ для $\forall\,(x, y) \in \overline{\Omega}$. Иными словами, отличная от постоянной гармоническая функция u не может внутри области Ω принимать свое максимальное или минимальное значение.*

Доказательство.

□ Пусть $M = \max\limits_{(x,\,y)\in\overline{\Omega}} u(x, y) = u(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0) \in \Omega$. Так как Ω — открытое множество (область), то, следовательно, $\exists\,\overline{B}_R(x_0, y_0) \subset \Omega$, а значит по теореме о среднем можно записать:

$$u(x_0\,y_0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{B_R(x_0,\,y_0)} u(x,y)\,dx\,dy \tag{10.1}$$

Вычтем из левой и правой части M:

$$0 = u(x_0\,y_0) - M = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{B_R(x_0,\,y_0)} u(x, y) - M\,dx\,dy \tag{10.2}$$

Рассмотрим правую часть этого уравнения. Если в некоторой точке $(\hat{x},\,\hat{y})$ окружности $B_R(x_0,\,y_0)$ $u(\hat{x},\,\hat{y}) \neq M$, то $u(\hat{x},\,\hat{y}) < M$. В силу непрерывности функции $u(x,\,y)$ $\exists\, B_{R_1}(\hat{x},\,\hat{y})$: $u(x,\,y) < M$ для $\forall (x,\,y) \in B_{R_1}(\hat{x},\,\hat{y})$. Значит в круге $B_{R_1}(\hat{x},\,\hat{y})$ выполняется $u(x,\,y) - M < 0$. Так как в выражении (10.2) под интегралом стоит функция $u - M \leqslant 0$ и в круге $B_{R_1}(\hat{x},\,\hat{y}$ $u - M < 0$ получаем:

$$\iint\limits_{B_R(x_0,\,y_0)} u(x, y)\,dx\,dy < 0 \tag{10.3}$$

Противоречие. Значит $u(x,\,y) \equiv M$ в круге $B_R(x_0,\,y_0)$. Кроме того, если $u(x_0,\,y_0) = M$, то для $\forall\, \overline{B}_R(x_0, y_0) \subset \Omega$ в этом круге выполняется $u(x,\,y) \equiv M$. Покажем, что из этого следует $u(x,\,y) \equiv const$ в Ω.

Возьмем произвольную точку $(x^*,\,y^*) \in \Omega$. Покажем, что $u(x^*,\,y^*) = M$. т.к. Ω — область, то существует ломаная L с конечным числом звеньев, соединяющая точки $(x_0,\,y_0)$ и $(x^*,\,y^*)$. Определим

$$\operatorname{dist}(L,\,\partial\Omega) = \inf_{\substack{(\xi,\,\eta)\in\partial\Omega\\(x,\,y)\in L}} \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \tag{10.4}$$

Так как введенная функция является непрерывной по переменным ξ, η, x и y и определена на замкнутом ограниченном множестве $(\xi,\,\eta) \in \partial\Omega$, $(x,\,y) \in L$, то по теореме Вейерштрасса

$$\exists\,(x',\,y')(\xi_o,\,\eta_0) = \operatorname{dist}(L,\,\partial\Omega) = \sqrt{(\xi_o - x')^2 + (\eta_0 - y')^2} = q \tag{10.5}$$

Круг $B_q(x\,y)$ для $\forall\,(x,\,y) \in L$ лежит в области Ω. Значит, для любого круга $B_{q/2}(x,\,y)$, $(x,\,y) \in L$ будет выполнено $B_{q/2}(x,\,y) \subset \Omega$.

Найдем точку $(x_1,\,y_1) = \partial B_{q/2}(x_0,\,y_0) \cap L$. Очевидно, что $u(x_1,\,y_1) = M$. Построим круг $B_{q/2}(x_1,\,y_1)$. В этом круге функция $u \equiv M$. Найдем точку $(x_2,\,y_2) = \partial B_{q/2}(x_1,\,y_1) \cap L$. Продолжим построение аналогичным образом. Т.к. длина ломаной конечна, то за конечное число шагов можно дойти до точки $(x_k,\,y_k)$ такой, что $(x^*,\,y^*) \in B_{q/2}(x_k,\,y_k)$, а значит $u(x^*,\,y^*) = M$.

Так как точка $(x^*,\,y^*)$ была выбрана произвольной, то $u(x,\,y) \equiv M$ в Ω. Получили противоречие.

Теперь проведем доказательство для точки минимума. Пусть $u(x_0,\,y_0) = \min\limits_{(x,\,y)\in\overline{\Omega}} u(x,\,y) = m$, $(x_0,\,y_0) \in \Omega$. Рассмотрим функцию $V(x,\,y) = -u(x,\,y)$. Т.к. для $\forall\,(x,\,y) \in \Omega$ $u(x,\,y) \geqslant m$, следовательно $V(x,\,y) \leqslant -m$ для $\forall\,(x,\,y) \in \Omega$. Так как $\Delta V = \Delta(-u) = 0$, то по предыдущему $V \equiv const = -m$, т.к. V достигает максимума равного $-m$ в точке $(x_0,\,y_0)$. Получаем $u \equiv const = m$. ■

Следствие 1. *Пусть $u \in \mathrm{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ — гармоническая в Ω функция, тогда для $\forall\,(x,\,y) \in \overline{\Omega}$ выполняется:*

$$\min_{\partial\Omega} u(x,\,y) \leqslant u(x,\,y) \leqslant \max_{\partial\Omega} u(x,\,y) \tag{10.6}$$

Доказательство.

□ Пусть для начала $u \equiv const = C$, тогда

$$\min_{\partial\Omega} u(x,\,y) = u(x,\,y) = \max_{\partial\Omega} u(x,\,y) = C \tag{10.7}$$

Значит для функции $u(x,\,y) \equiv const$ следствие выполнено.

Пусть теперь $u(x,\, y) \not\equiv const$. Тогда согласно предыдущей теореме для $\forall\,(x,\, y) \in \overline{\Omega}$

$$u(x,\, y) \leqslant \max_{\overline{\Omega}} u(x,\, y) = \max_{\partial\Omega} u(x,\, y) \tag{10.8}$$

и для $\forall\,(x,\, y) \in \overline{\Omega}$

$$\min_{\partial\Omega} u(x,\, y) = \min_{\overline{\Omega}} u(x,\, y) \leqslant u(x,\, y) \tag{10.9}$$

Объединяя, получим

$$\min_{\partial\Omega} u(x,\, y) \leqslant u(x,\, y) \leqslant \max_{\partial\Omega} u(x,\, y) \tag{10.10}$$

■

Определение 10.1. *Задачей Дирихле для уравнения Лапласа в области* Ω *называется задача определения функции* $u \in \mathrm{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ *из условий:*

$$\begin{aligned} \Delta u(x,\, y) &= 0, \quad (x,\, y) \in \Omega && (10.11) \\ u(x,\, y) &= \varphi(x,\, y), \quad (x,\, y) \in \partial\Omega && (10.12) \end{aligned}$$

Уравнение (10.12) *называется граничными (краевыми) условиями первого рода.*

Определение 10.2. *Уравнением Пуассона в области* Ω *называется уравнение вида:*

$$\Delta u = f(x,\, y), \quad (x,\, y) \in \Omega \tag{10.13}$$

где $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ *— подлежащая определению функция,* $f \in \mathrm{C}(\Omega)$ *— заданная функция.*

Определение 10.3. *Задачей Дирихле для уравнения Пуассона* (10.13) *называется задача определения функции* $u \in \mathrm{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ *из условий:*

$$\begin{aligned} \Delta u(x,\, y) &= f(x,\, y), \quad (x,\, y) \in \Omega && (10.14) \\ u(x,\, y) &= \varphi(x,\, y), \quad (x,\, y) \in \partial\Omega && (10.15) \end{aligned}$$

Уравнение (10.15) *называется граничными (краевыми) условиями первого рода.*

Следствие 2. *Задача Дирихле для уравнения Пуассона (Лапласа) не может иметь двух различных решений.*

Доказательство.
□ Пусть $\exists\, u^{(1)}(x,\, y),\, u^{(2)}(x,\, y),\, u^{(1)} \not\equiv u^{(2)}$ и

$$\begin{aligned} \Delta u^{(1)} &= f(x,\, y) && (10.16) \\ u^{(1)}\big|_{\partial\Omega} &= \varphi(x,\, y) && (10.17) \\ \Delta u^{(2)} &= f(x,\, y) && (10.18) \\ u^{(2)}\big|_{\partial\Omega} &= \varphi(x,\, y) && (10.19) \end{aligned}$$

Введем функцию $u = u^{(2)} - u^{(1)}$. Для нее получаем задачу Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && (10.20) \\ u(x,\, y) &= 0, \quad (x,\, y) \in \partial\Omega && (10.21) \end{aligned}$$

Но по следствию 1 для $\forall\,(x,\, y) \in \partial\Omega$:

$$\min_{\partial\Omega} u(x,\, y) \leqslant u(x,\, y) \leqslant \max_{\partial\Omega} u(x,\, y) \tag{10.22}$$

Следовательно $u \equiv 0$. Получаем противоречие ■

§11. Уравнение Лапласа в круге

Пусть

$$\begin{aligned} \Omega &= O_R = \left\{(x,\,y)\colon x^2+y^2<R^2\right\} && (11.1)\\ \overline{\Omega} &= \overline{O}_R = \left\{(x,\,y)\colon x^2+y^2\leqslant R^2\right\} && (11.2)\end{aligned}$$

Постановка задачи: найти функцию $u\in \mathrm{C}^2(\Omega)\cap\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ из условий:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad (x,\,y)\in O_R && (11.3)\\ u(x,\,y) &= f(x,\,y), \quad x^2+y^2=R^2 && (11.4)\end{aligned}$$

Делаем замену переменных

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & 0<\rho\leqslant R\\ y = \rho\sin\varphi, & 0<\varphi<2\pi\end{cases} \qquad (11.5)$$

$$u(x,\,y)=u(\rho\cos\varphi,\,\rho\sin\varphi)=\widetilde{u}(\rho,\,\varphi) \qquad (11.6)$$

Ранее было показано, что

$$\Delta\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (11.7)$$

Получаем задачу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\varphi^2} &= 0, \quad 0<\rho<R && (11.8)\\ \widetilde{u}(R,\,\varphi) = f(R\cos\varphi,\,R\sin\varphi) &= \widetilde{f}(\varphi), \quad 0<\varphi<2\pi && (11.9)\end{aligned}$$

При $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ возникают новые краевые условия:

$$\begin{cases} \widetilde{u}(\rho,\,0+0) = \widetilde{u}(\rho,\,2\pi-0)\\ \widetilde{u}_\varphi(\rho,\,0+0) = \widetilde{u}_\varphi(\rho,\,2\pi-0)\\ \lim\limits_{\rho\to0+0}|\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)| < +\infty\end{cases} \qquad (11.10)$$

Решаем задачу (11.8)–(11.10) методом Фурье.

Шаг №1. Ищем решение в виде $u(\rho,\,\varphi)=\mathscr{R}(\rho)\Phi(\varphi)$, удовлетворяющее (11.8), $u\not\equiv0$ и краевым условиям (11.10)

Подставим его в (11.8):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\mathscr{R}'(\rho)\Phi(\varphi)\right)+\frac{1}{\rho^2}\Phi''(\varphi)\mathscr{R}(\rho)=0 \qquad (11.11)$$

$$\underbrace{\frac{\rho^2\mathscr{R}''+\rho\mathscr{R}'}{\mathscr{R}}}_{\text{зависит только от }\rho}+\underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{\text{зависит только от }\varphi}=0 \qquad (11.12)$$

Можем решать по частям. Для $\Phi(\varphi)$:

$$\begin{cases} \Phi''+\lambda\Phi = 0, & 0<\varphi<2\pi\\ \Phi(0+0) = \Phi(2\pi-0)\\ \Phi'(0+0) = \Phi'(2\pi-0)\end{cases} \qquad (11.13)$$

1. Пусть $\lambda = 0$, тогда:

$$\begin{array}{rcllcrcl} \Phi''(\varphi) & = & 0 & \Rightarrow & \Phi(\varphi) & = & A\,2\,\varphi + B & \\ \Phi(0) & = & \Phi(2\,\pi) & \Rightarrow & B & = & A\,2\,\pi + B & \Rightarrow \; A \; = \; 0 \\ \Phi'(0) & = & \Phi'(2\,\pi) & \Rightarrow & & & & \end{array} \tag{11.14}$$

$$\lambda_0 = 0, \quad \Phi(\varphi) \equiv 1 \tag{11.15}$$

2. Пусть $\lambda \neq 0$, тогда:

$$\Phi(\varphi) = A \sin \sqrt{\lambda}\varphi + B \cos \sqrt{\lambda}\varphi \tag{11.16}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi(0) & = & \Phi(2\,\pi) \\ \Phi'(0) & = & \Phi'(2\,\pi) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} B & = & A \sin \sqrt{\lambda} 2\,\pi + B \cos \sqrt{\lambda} 2\,\pi \\ A\sqrt{\lambda} & = & A\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} 2\,\pi - B \sin \sqrt{\lambda} 2\,\pi \end{array} \right. \Rightarrow \tag{11.17}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A \sin \sqrt{\lambda} 2\,\pi + B(\cos \sqrt{\lambda} 2\,\pi - 1) & = & 0 \\ A(\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} 2\,\pi - 1) - B \sin \sqrt{\lambda} 2\,\pi & = & 0 \end{array} \right. \quad A^2 + B^2 \neq 0 \tag{11.18}$$

Система (11.18) имеет нетривиальное решение, что равносильно

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin 2\,\pi\sqrt{\lambda} & \cos 2\,\pi\sqrt{\lambda} - 1 \\ \cos 2\,\pi\sqrt{\lambda} - 1 & -\sin 2\,\pi\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 0 \tag{11.19}$$

$$\sin^2 2\,\pi\sqrt{\lambda} + \left(\cos^2 2\,\pi\sqrt{\lambda} - 1\right) = 0 \Rightarrow \tag{11.20}$$

$$\cos 2\,\pi\sqrt{\lambda} = 1 \rightarrow 2\,\pi\sqrt{\lambda} = 2\,\pi k \tag{11.21}$$

$$\lambda_k = k^2, \quad k = 1,\, 2 \ldots \tag{11.22}$$

Получили собственные значения системы:

$$\lambda_k = k^2, \quad k = 0,\, 1 \ldots \tag{11.23}$$

Собственные функции:

$$\{\Phi_k(\varphi)\} = \{1,\, \cos k\varphi,\, \sin k\varphi\} \tag{11.24}$$

Найдем $\mathscr{R}_k(\rho)$. Для него:

$$\rho^2 \mathscr{R}_k''(\rho) + \rho \mathscr{R}_k'(\rho) + k^2 \mathscr{R}_k(\rho) = 0 \tag{11.25}$$

1. Пусть $k = 0$, тогда

$$\rho^2 \mathscr{R}_0''(\rho) + \rho \mathscr{R}_0'(\rho) = 0 \tag{11.26}$$

Введем замену $\mathscr{R}_0' = y$

$$\rho y' + y = 0 \tag{11.27}$$

Будем решать методом разделения переменных:

$$\rho \frac{dy}{d\rho} = -y \tag{11.28}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dy}{y} \tag{11.29}$$

$$\ln \rho = -\ln y + \ln B_0 \tag{11.30}$$

$$\rho y = B_0 \tag{11.31}$$

$$y = \frac{B_0}{\rho} \tag{11.32}$$

Проведем обратную замену

$$\begin{aligned}\mathscr{R}'(\rho) &= \frac{B_0}{\rho} &(11.33)\\ \mathscr{R}(\rho) &= A_0 + B_0\ln\rho &(11.34)\end{aligned}$$

2. Пусть теперь $k > 0$. Получено уравнение Эйлера. Введем замену $\mathscr{R}_k(\rho) = \rho^\mu$

$$\mu(\mu-1)\rho^\mu + \mu\rho^\mu - k^2\rho^\mu = 0 \tag{11.35}$$

В силу введенного преобразования координат $\rho > 0$, следовательно, можно разделить обе части уравнения на ρ^μ:

$$\mu(\mu-1) + \mu - k^2 = 0 \tag{11.36}$$

$$\begin{aligned}\mu^2 &= k^2 &(11.37)\\ \mu &= \pm k &(11.38)\end{aligned}$$

Таким образом, для $\mathscr{R}_k$ получаем пару линейнонезависимых решений:

$$\mathscr{R}_k(\rho) = \left\{\rho^k,\, \rho^{-k}\right\} \tag{11.39}$$

Получаем общее решение как их линейную комбинацию.

$$\mathscr{R}_k(\rho) = A_k\rho^k + B_k\rho^{-k} \tag{11.40}$$

Общее решение системы:

$$u_k(\rho,\, \varphi) = \left\{A_0 + B_0\ln\rho,\, \left(A_k\rho^k + B_k\rho^{-k}\right)\cos k\varphi,\, \left(C_k\rho^k + D_k\rho^{-k}\right)\sin k\varphi\right\} \tag{11.41}$$

Согласно решению уравнений Лапласа в полярных координатах, это множество содержит все возможные решения в вида $\Phi(\varphi)\mathscr{R}(\rho)$.

Шаг №2. Ищем решение задачи:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\varphi^2} &= 0, \quad 0 < \rho < R &(11.42)\\ \widetilde{u}(R,\, \varphi) = f(R\cos\varphi,\, R\sin\varphi) &= \widetilde{f}(\varphi), \quad 0 < \varphi < 2\pi &(11.43)\end{aligned}$$

Так как при $\rho \to 0$ краевые условия являются ограниченными функциями, то базис решений имеет вид:

$$u_k(\rho,\, \varphi) = \left\{A_0,\, A_k\rho^k\cos k\varphi,\, C_k\rho^k\sin k\varphi\right\} \tag{11.44}$$

Будем искать решение задачи (11.42)–(11.43) в следующем виде:

$$\widetilde{u}(\rho,\, \varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\left(A_k\cos k\varphi + C_k\sin k\varphi\right) \tag{11.45}$$

Потребуем для решения выполнения условия (11.43)

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}R^k\left(A_k\cos k\varphi + C_k\sin k\varphi\right) = \widetilde{f}(\varphi) \tag{11.46}$$

Будем предполагать, что $\widetilde{f}(\rho,\, \varphi)$ определена периодически на всей числовой оси. Так как нас интересует решение только на интервале $\varphi \in (0,\, 2\pi)$, то, строго говоря, нас не интересует поведение функции вне этого интервала. Однако, в силу периодичности решения, естественно будет полагать, что (11.46) определено для $\forall\,\varphi \in \mathbb{R}$. Значит, можно записать:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k \left(A_k \cos k\varphi + C_k \sin k\varphi\right) = \widetilde{f}(\varphi), \quad \varphi \in [0,\, 2\,\pi] \tag{11.47}$$

Найдем из условия (11.47) необходимые константы A_0, $\{A_k\}$, $\{C_k\}$. Для этого проинтегрируем обе части равенства (11.47) по φ от $-\pi$ до π.

$$A_0 \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} R^k \left(A_k \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos k\varphi\, d\varphi}_{0} + C_k \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin k\varphi\, d\varphi}_{0} \right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi)\, d\varphi \tag{11.48}$$

$$A_0 2\,\pi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi)\, d\varphi \tag{11.49}$$

$$A_0 = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi)\, d\varphi \tag{11.50}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Умножим равенство (11.47) сначала на $\cos n\varphi$ и проинтегрируем по φ от $-\pi$ до π, а затем его же на $\sin n\varphi$ и также проинтегрируем по φ от $-\pi$ до π. Получим:

$$A_0 \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos n\varphi\, d\varphi}_{0} + \sum_{k=1}^{\infty} R^k \left(A_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos k\varphi \cos n\varphi\, d\varphi + C_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin k\varphi \cos n\varphi\, d\varphi \right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi \tag{11.51}$$

$$A_0 \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin n\varphi\, d\varphi}_{0} + \sum_{k=1}^{\infty} R^k \left(A_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos k\varphi \sin n\varphi\, d\varphi + C_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin k\varphi \sin n\varphi\, d\varphi \right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi) \sin n\varphi\, d\varphi \tag{11.52}$$

Напоминание

Из теории рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos k\varphi' \cos n\varphi'\, d\varphi' &= \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \pi, & k = n \end{cases} \\
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos k\varphi' \sin n\varphi'\, d\varphi' &= 0 \\
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin k\varphi' \sin n\varphi'\, d\varphi' &= \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \pi, & k = n \end{cases}
\end{aligned}$$

Получаем равенства:

$$R^k A_k \pi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi') \cos k\varphi'\, d\varphi' \tag{11.53}$$

$$R^k C_k \pi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi') \sin k\varphi'\, d\varphi' \tag{11.54}$$

После преобразования получаем:

$$A_k = \frac{1}{\pi R^k} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi') \cos k\varphi'\, d\varphi' \tag{11.55}$$

$$C_k = \frac{1}{\pi R^k} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi') \sin k\varphi'\, d\varphi' \tag{11.56}$$

Тогда итоговое решение будет иметь вид:

$$\widetilde{u}(\rho,\, \varphi) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi)\, d\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi') \cos k\varphi'\, d\varphi' \cos k\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi') \sin k\varphi'\, d\varphi' \sin k\varphi \right) \tag{11.57}$$

Представим выражение (11.57) в удобном виде:

$$\widetilde{u}(\rho,\, \varphi) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi') \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k (\cos k\varphi' \cos k\varphi + \sin k\varphi' \sin k\varphi) \right\} d\varphi' =$$
$$= \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi') \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k\, (\varphi' - \varphi) \right\} d\varphi' \tag{11.58}$$

Рассмотрим выражение в фигурных скобках подробнее. Воспользуемся выражением Эйлера, согласно которому $e^{i\lambda} = \cos\lambda + i\sin\lambda$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k\,(\varphi'-\varphi) = \Re\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k e^{ik(\varphi'-\varphi)} = \Re\sum_{k=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi'-\varphi)}}_{q}\right)^k \tag{11.59}$$

Так как

$$|q| = \left|\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi'-\varphi)}\right| = \frac{\rho}{R} < 1 \tag{11.60}$$

то можно воспользоваться выражением

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q} \tag{11.61}$$

Продолжаем выражение

$$\Re\sum_{k=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi'-\varphi)}}_{q}\right)^k = \Re\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi'-\varphi)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi'-\varphi)}} = \Re\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi'-\varphi)}\left(1-\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi'-\varphi)}\right)}{\left(1-\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi'-\varphi)}\right)\left(1-\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi'-\varphi)}\right)} =$$
$$= \Re\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi'-\varphi)} - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{R}\underbrace{\frac{e^{i(\varphi'-\varphi)}+e^{-i(\varphi'-\varphi)}}{2}}_{\cos(\varphi'-\varphi)}+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2} = \Re\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi'-\varphi)} - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{R}\cos(\varphi'-\varphi)+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2} \tag{11.62}$$

Вновь воспользуемся выражением Эйлера и возьмем действительную часть

$$\Re\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi'-\varphi)} - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{R}\cos(\varphi'-\varphi)+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2} = \frac{\frac{\rho}{R}\cos(\varphi'-\varphi) - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{R}\cos(\varphi'-\varphi)+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2} \tag{11.63}$$

Таким образом, получаем:

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\cos k\,(\varphi'-\varphi) = 1+\frac{\frac{\rho}{R}\cos(\varphi'-\varphi) - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{R}\cos(\varphi'-\varphi)+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2} = \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos(\varphi'-\varphi)+\rho^2} \tag{11.64}$$

В результате имеем два представления решения:

$$\widetilde{u}(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(\varphi')\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos(\varphi'-\varphi)+\rho^2}\,d\varphi' \tag{11.65}$$

$$\widetilde{u}(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(\varphi')\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\cos k\,(\varphi'-\varphi)\right\}d\varphi' \tag{11.66}$$

Шаг №3. Обоснование.

Покажем, что формулы (11.57), (11.65), (11.66) являются решением задачи (11.42)–(11.43). Покажем сначала, что в формуле (11.65) интеграл существует для $\forall \widetilde{f}(\varphi) \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$. Для этого рассмотрим знаменатель дроби:

$$R^2 - 2\rho R\cos(\varphi' - \varphi) + \rho^2 \geqslant R^2 - 2\rho R + \rho^2 = (R-\rho)^2 > 0, \quad (\text{т.к. } 0 \leqslant \rho < R) \tag{11.67}$$

Поскольку знаменатель дроби всегда больше нуля, то дробь всегда имеет ограниченное значение, и, значит, интеграл существует для $\forall \widetilde{f}(\varphi) \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ как интеграл от произведения двух ограниченных функций.

Покажем, что $\widetilde{u}(\rho, \varphi)$ удовлетворяет условию (11.42). Сначала покажем, что $\widetilde{u}(\rho, \varphi) \in \mathrm{C}^2(O_R)$. Для этого оценим малость членов ряда. Выберем $\forall R_1\colon R_1 > \rho$, $R_1 < R$. Оценим члены ряда в круге $0 \leqslant \rho < R_1 < R$. Получаем:

$$\left|\left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k(\varphi' - \varphi)\right| \leqslant \underbrace{\left(\frac{R_1}{R}\right)}_{<1}^k = m_k \tag{11.68}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k < +\infty \tag{11.69}$$

Так как был найден сходящийся мажорирующий ряд, то функциональный ряд сходится равномерно в круге $\overline{O}_{R_1}$.

Докажем теперь непрерывность второй производной (непрерывность перовой доказывается аналогично).

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k(\varphi' - \varphi)\right\}\right| \leqslant k^2 \underbrace{\left(\frac{R_1}{R}\right)}_{q<1}^k = m_k^{(2)} \tag{11.70}$$

Покажем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k^{(2)} < +\infty$. Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\sqrt[k]{k^2 q^k} = q e^{\frac{2}{k}\ln k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} q < 1 \tag{11.71}$$

Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k^{(2)} < +\infty$.

$$\left|\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k(\varphi' - \varphi)\right\}\right| \leqslant k(k-1)\frac{1}{R^2} q^{k-2} = m_k^{(3)} \tag{11.72}$$

Покажем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k^{(3)} < +\infty$. Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\sqrt[k]{k(k-1)\frac{1}{R^2} q^{k-2}} = q^{1-\frac{2}{k}} \frac{1}{R^{2/k}} \sqrt[k]{1 - \frac{1}{k}} e^{\frac{2}{k}\ln k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} q < 1 \tag{11.73}$$

Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k^{(3)} < +\infty$.

Получаем, что $\widetilde{u}(\rho, \varphi) \in \mathrm{C}^2(O_R)$. Но тогда

$$\Delta_{\rho,\varphi}\widetilde{u}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(\varphi') \underbrace{\Delta_{\rho,\varphi}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k(\varphi' - \varphi)\right\}}_{0,\ \text{т.к } \Delta_{\rho,\varphi} u_k(\rho,\varphi) = 0} d\varphi' = 0 \tag{11.74}$$

Покажем, что выполняется условие (11.43), т.е $\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)=\widetilde{f}(\varphi)$. Для этого запишем $\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)$ в удобном для нас виде:

$$\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)=\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(\varphi')\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos\left(\varphi'-\varphi\right)+\rho^2}\,d\varphi'=|t=\varphi'-\varphi|=$$

$$=\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(\varphi+t)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos t+\rho^2}\,dt \quad (11.75)$$

Определение 11.1. *Ядром Пуассона называется выражение вида:*

$$P(\rho,\,t)=\frac{1}{2\,\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos t+\rho^2} \quad (11.76)$$

С помощью ядра Пуассона можно записать решение задачи (11.42)–(11.43) как:

$$\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)=\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(\varphi+t)P(\rho,\,t)\,dt \quad (11.77)$$

Свойства ядра Пуассона:

1. $P(\rho,\,t)\geqslant 0$ (Доказательство тривиально)
2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(\rho,\,t)\,dt=1$

Доказательство.
☐ Воспользуемся первоначальным представлением ядра Пуассона:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(\rho,\,t)\,dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2\,\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\cos k\left(\varphi'-\varphi\right)\right\}\,dt=$$

$$=1+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos k\left(\varphi'-\varphi\right)dt}_{0}=1 \quad (11.78)$$

■

Получили решение задачи (11.42)–(11.43) методом Фурье через ядро Пуассона:

$$\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)=\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(\varphi+t)P(\rho,\,t)\,dt. \quad (11.79)$$

Таким образом, при $0\leqslant\rho<R$ функция $\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)$ удовлетворяет уравнению (11.42).

Теперь покажем, что выполнено уравнение (11.43). Зафиксируем $\varphi_0\in[-\pi,\,\pi]$ и покажем, что уравнениеи (11.42) выполнено при следующих условиях:

$$\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)\;\to\;\widetilde{f}(\varphi_0); \quad (11.80)$$

$$\rho\;\to\;R-0; \quad (11.81)$$

$$\varphi\;\to\;\varphi_0, \quad (11.82)$$

т.е. $\lim\limits_{\substack{\rho\to R-0\\ \varphi\to\varphi_0}}\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)=\widetilde{f}(\varphi_0)\Rightarrow\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;\forall\,\rho,\,\varphi\colon\;\sqrt{(\rho-R)^2+(\varphi-\varphi_0)^2}<\delta\Rightarrow\left|\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right|<\;\varepsilon.$

Рассмотрим

$$\left|\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right|=\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(\varphi+t)P(\rho,\,t)\,dt-\widetilde{f}(\varphi_0)\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(\rho,\,t)\,dt\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\widetilde{f}(\varphi+t)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right)P(\rho,\,t)\,dt\right|\leqslant\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\widetilde{f}(\varphi+t)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right|P(\rho,\,t)\,dt=\{\text{ пусть } 0<\eta<\pi\}=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{-\eta}\left|\widetilde{f}(\varphi+t)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right|P(\rho,\,t)\,dt+\int\limits_{-\eta}^{+\eta}\left|\widetilde{f}(\varphi+t)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right|P(\rho,\,t)\,dt+\int\limits_{\eta}^{\pi}\left|\widetilde{f}(\varphi+t)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right|P(\rho,\,t)\,dt=$$

$$=I_1+I_2+I_3. \quad (11.83)$$

Оценим I_2.

$$I_2=\int\limits_{-\eta}^{+\eta}\left|\widetilde{f}(\varphi+t)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right|P(\rho,\,t)\,dt. \quad (11.84)$$

Так как функция $\widetilde{f}(\varphi)$ непреравна в точке $\varphi_0\in[-\pi,\,\pi]$, то для $\forall\;\dfrac{\varepsilon}{3}>0\;\exists\,\delta^*>0$ такая, что для
$\forall\,\varphi\colon\;|\varphi-\varphi_0|<\delta^*,\,\varphi\in[-\pi,\,\pi]\Rightarrow\left|\widetilde{f}(\varphi)-\widetilde{(}\varphi_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Если взять $\eta=\dfrac{\delta^*}{6}$, то, так как

$$|\varphi+t-\varphi_0|\leqslant|\varphi-\varphi_0|+|t|\leqslant\widetilde{\delta}+2\eta=\widetilde{\delta}+2\frac{\delta^*}{6}=\frac{\delta^*}{6}+\frac{\delta^*}{3}=\frac{\delta^*}{2}<\delta^*, \quad (11.85)$$

следует:

$$\left|\widetilde{f}(\varphi+t)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \quad (11.86)$$

Следовательно,

$$I_2=\int\limits_{-\eta}^{\eta}\left|\widetilde{f}(\varphi+t)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right|P(\rho,\,t)\,dt\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\int\limits_{-\eta}^{\eta}P(\rho,\,t)\,dt<\frac{\varepsilon}{3}\underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(\rho,\,t)\,dt}_{=1}=\frac{\varepsilon}{3}. \quad (11.87)$$

Оценим I_3.

$$I_3=\int\limits_{\eta}^{\pi}\left|\widetilde{f}(\varphi+t)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right|P(\rho,\,t)\,dt. \quad (11.88)$$

Заметим, что $\widetilde{f}(\varphi)\in\mathrm{C}[-\pi,\,\pi]\Rightarrow\widetilde{f}(\varphi)$ ограничена, т.е. $\forall\,\varphi\in[-\pi\;\pi]\;\left|\widetilde{f}(\varphi)\right|\leqslant M$, то

$$\left|\widetilde{f}(\varphi+t)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right|\leqslant 2M. \quad (11.89)$$

$$I_3=\int\limits_{\delta_1}^{\pi}\left|\widetilde{f}(\varphi+t)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right|P(\rho,\,t)\,dt\leqslant 2M\int\limits_{\delta_1}^{\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos t+\rho^2}\,dt. \quad (11.90)$$

Так как $\rho \to R$, то считаем, что $\dfrac{R}{2} = \rho < R$, то

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2\rho R\cos t+\rho^2} = \frac{(R-\rho)(R+\rho)}{(R-\rho)^2+2\rho R(1-\cos t)} =$$
$$= \frac{(R+\rho)}{(R-\rho)^2+4\rho R\sin^2\dfrac{t}{2}}(R-\rho) \leqslant \frac{(R+\rho)}{4\rho R\sin^2\dfrac{t}{2}}(R-\rho) = \underbrace{\frac{2R}{4\dfrac{R}{2}R\sin^2\dfrac{\delta_1}{2}}}_{M_1}(R-\rho). \quad (11.91)$$

Таким образом,

$$I_3 \leqslant 2MM_1(R-\rho) < 2MM_1\delta_2 < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{при } \delta_2 < \frac{\varepsilon}{6MM_1}. \quad (11.92)$$

Аналогично I_3, показывается, что

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (11.93)$$

Следовательно, $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta = \sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}\colon \forall(\rho,\,\varphi)\colon \sqrt{(\rho-R)^2+(\varphi-\varphi_0)^2} = \sqrt{\delta_1+\delta_2} < \delta$ выполняется:

$$\left|\widetilde{u}(\rho,\,\varphi)-\widetilde{f}(\varphi_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = 3. \quad (11.94)$$

Теорема 11.1. *Для любой функции $f(x,\,y)$ непрерывной на множестве $\Omega = \{(x,\,y)\colon x^2+y^2 = R^2\}$ задача:*

$$\begin{aligned} \triangle u(x,\,y) &= 0, \quad (x,\,y)\in\Omega & (11.95)\\ u(x,\,y) &= f(x,\,y), \quad (x,\,y)\in\Omega & (11.96)\end{aligned}$$

имеет единственное решение.

Доказательство.

□ Без доказательства. ■

Пример. *Полярные координаты*

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(\rho,\,\varphi) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(\varphi+t)P(\rho,\,t)\,dt, \quad \text{где,} & (11.97)\\ \widetilde{f}(\varphi) &= f(R\cos\varphi,\,R\sin\varphi), & (11.98)\\ \widetilde{u}(\rho,\,\varphi) &= u(\rho\cos\varphi,\,\rho\sin\varphi), & (11.99)\\ P(\rho,\,t) &- \text{ядро Пуассона.} & (11.100)\end{aligned}$$

Глава 4

Задача Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности

§1. Задача Коши для волнового уравнения

Пусть
$$\Omega = \{(x,\, t) \colon x \in \mathbb{R},\, t > 0\}. \tag{1.1}$$

Постановка задача: требуется найти функцию $u \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}) \bigcap \mathrm{C}^2(\Omega)$ из условий

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, & (1.2)\\ u(x,\, 0) &= \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, & (1.3)\\ u_t(x,\, 0) &= \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty. & (1.4) \end{aligned}$$

Определение 1.1. *Задача* (1.2)–(1.4) *называется задачей Коши для волнового уравнения.*

Определение 1.2. *Область Ω называется выпуклой, если для $\forall\ A,\, B \in \Omega$ отрезок $[A,\, B]$ тоже принадлежит области Ω.*

Лемма 1.1. *Пусть в выпуклой области Ω дано уравнение:*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{1.5}$$

Тогда его общее решение в этой области имеет вид:

$$u(x,\, t) = f(x - at) + g(x + at), \quad \textit{где } f,\, g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}). \tag{1.6}$$

Доказательство.
□ Пусть функция $u(x,\, t)$ — решение уравнения (1.2). Произведем замену переменных

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= x + at, \\ \eta &= x - at. \end{aligned} \right. \tag{1.7}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi + \eta}{2}; & (1.8)\\ t &= \frac{\xi - \eta}{2a}; & (1.9)\\ \widetilde{u}(\xi, \eta) &= u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right). & (1.10)\\ & & (1.11) \end{aligned}$$

Область Ω отображается на область Ω' на плоскости (ξ, η). В силу взаимооднозначного отображения, получим:

$$u(x, t) = \widetilde{u}(\xi(x, t), \eta(x, t)). \tag{1.12}$$

Продифференцируем уравнение (1.12), получим:

$$\begin{aligned} u_x &= \widetilde{u}_\xi \xi_x + \widetilde{u}_\eta \eta_x = \widetilde{u}_\xi + \widetilde{u}_\eta; & (1.13)\\ u_t &= \widetilde{u}_\xi \xi_t + \widetilde{u}_\eta \eta_t = a\widetilde{u}_\xi - a\widetilde{u}_\eta; & (1.14)\\ u_{xx} &= (\widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_x) + (\widetilde{u}_{\eta\xi}\xi_x + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x) = \widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}; & (1.15)\\ u_{tt} &= a(\widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_t + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_t) - a(\widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_t + \widetilde{u}_{\xi\eta}\eta_t) = \widetilde{u}_{\xi\xi}a^2 - 2a^2\widetilde{u}_{\xi\eta} + a^2\widetilde{u}_{\eta\eta}. & (1.16) \end{aligned}$$

Подставим u_{xx} и u_{tt} в уравнение (1.2):

$$\widetilde{u}_{\xi\xi}a^2 - 2\widetilde{u}_{\xi\eta}^2 a + \widetilde{u}_{\eta\eta}a^2 = a^2(\widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{u}_{\eta\eta}) \Rightarrow 4a^2\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow \widetilde{u}_{\xi\eta} = 0. \tag{1.17}$$

Зафиксируем $\xi = \xi_0$.

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\widetilde{u}_\xi(\xi, \eta) = 0 \Rightarrow \widetilde{u}_\xi(\xi_0, \eta) = C_1(\xi_0). \tag{1.18}$$

Так как ξ_0 —любая точка из области $\widetilde{\Omega}$, то $C_1(\xi_0)$ — непрерывно дифференцируемая функция по ξ. Зафиксируем $\eta = \eta_0$ и проинтегрируем по ξ равенство:

$$\widetilde{u}_\xi(\xi, \eta) = C_1(\xi), \tag{1.19}$$

получим

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = \underbrace{\int C_1(\xi)\,d\xi}_{g(\xi)} + \underbrace{C_2(\eta)}_{f(\eta)}. \tag{1.20}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(\xi, \eta) &= g(\xi) + f(\eta), \quad g, f \in \mathrm{C}^2, \text{ т.к. } \widetilde{u}(\xi, \eta) \in \mathrm{C}^2; & (1.21)\\ u(x, t) &= \widetilde{u}(x + at, x - at) = f(x - at) + g(x + at); & (1.22) \end{aligned}$$

Таким образом, любое решение уравнения (1.2) имеет требуемый вид. Подставим функцию

$$u = f(x - at) + g(x + at) \tag{1.23}$$

в уравнение (1.2), получим:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 f'' + a^2 g'', \\ u_{xx} = f'' + g''. \end{cases} \tag{1.24}$$

Следовательно,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{1.25}$$

■

Теорема 1.1. *Пусть функции $\varphi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$. Тогда существует единственное решение задачи Коши* (1.2)–(1.4)*, имеющее вид:*

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha \quad \text{— формула Даламбера.} \tag{1.26}$$

Доказательство.

$\square$ Пусть функция $u(x,\,t)$ —решение задачи (1.2)–(1.4). По лемме (4.1.1), существуют функции $f, g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, такие что:

$$u(x,\,t) = f(x-at) + g(x+at). \tag{1.27}$$

При $t = 0$ получим условия Коши:

$$\begin{aligned} u(x,\,0) &= \varphi(x) = f(x) + g(x), \quad -\infty < x < \infty, && (1.28)\\ u_t(x,\,0) &= \psi(x) = -af'(x) + ag'(x), \quad -\infty < x < \infty. && (1.29)\end{aligned}$$

Тогда для определенных функций $f,\, g$ получаем уравнения:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -f'(x) + g'(x) = \dfrac{\psi(x)}{a}. \end{cases} \tag{1.30}$$

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -f(x) + g(x) = \dfrac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(\alpha)\,d\alpha + C_1. \end{cases} \tag{1.31}$$

Получим:

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\alpha)\,d\alpha + \dfrac{C_1}{2} \\ f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2} - \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\alpha)\,d\alpha - \dfrac{C_1}{2} \end{cases} \tag{1.32}$$

Всюду заменем x на z.

$$u(x,\,t) = \left(\frac{\varphi(z)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^z \psi(\alpha)\,d\alpha - \frac{C_1}{2}\right)\Bigg|_{z=x-at} + \left(\frac{\phi(z)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^z \psi(\alpha)\,d\alpha + \frac{C_1}{2}\right)\Bigg|_{z=x+at} =$$

$$= \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^0 \psi(\alpha)\,d\alpha. \tag{1.33}$$

Таким образом, если функция $u(x,\,t)$ является решением задачи (1.2)–(1.4), то верна формула (1.26). Следовательно, доказали единственность решения задачи.

Теперь докажем существование решения задачи (1.2)–(1.4). Для докозательства существования решения, покажем, что формулу (1.26) можно записать в виде:

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha + \frac{\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^0 \psi(\alpha)\,d\alpha = g(x+at) + f(x-at). \tag{1.34}$$

По лемме (4.1.1), это решение уравнения (1.2).

Проверим условия Коши, при $t = 0$:

$$u(x,\,0) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}\Bigg|_{t=0} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha\Bigg|_{t=0} = \varphi(x); \tag{1.35}$$

$$u_t(x,\,0) = \frac{a\varphi'(x+at) - a\varphi'(x-at)}{2}\Bigg|_{t=0} + \frac{1}{2a}\left(\psi(x+at)a - \psi(x-at)(-a)\right)\big|_{t=0} = \psi(x). \tag{1.36}$$

$\blacksquare$

§2. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения

Постановка задачи: требуется найти функцию $U \in \mathrm{C}^2(\Omega) \bigcap \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ из условий

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,\,t), \quad (x,t) \in \Omega, && (2.1)\\
u(x,\,0) &= 0, \quad u_t(x,\,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. && (2.2)
\end{aligned}
$$

Теорема 2.1. *Пусть* $f,\, f_x \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. *Тогда существует и единственное решение задачи* (2.1), (2.2)*, имеющее вид:*

$$
u(x,\,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\,\tau)\,d\xi. \tag{2.3}
$$

Доказательство.

□ Докажем сначала существование решения задачи. Для этого покажем, что равенство (2.3) удовлетворяет условияем (2.1), (2.2).

$$
u(x,\,t)\big|_{t=0} = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\,\tau)\,d\xi\Bigg|_{t=0} = 0. \tag{2.4}
$$

Напоминание

$$
\left[\int\limits_{\mu_1(t)}^{\mu_2(t)} K(t,\,\tau)\,d\tau\right]_t' = K(t,\,\mu_2(t))\mu_2'(t) - K(t,\,\mu_1(t))\mu_1'(t) + \int\limits_{\mu_1(t)}^{\mu_2(t)} K_t(t,\,\tau)\,d\tau.
$$

$$
u_t(x,\,t) = \left(\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\,\tau)\,d\xi\right)_t' = \frac{1}{2a}\left(\int\limits_{-x}^{x} f(\xi,\,t)\,d\xi + \int\limits_0^t d\tau\left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\,\tau)\,d\xi\right)_t'\right) =
$$

$$
= \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(f(x+a(t-\tau),\,\tau)a - f(x-a(t-\tau),\,\tau)a\right)\,d\tau =
$$

$$
= \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(f(x+a(t-\tau),\,\tau) + f(x-a(t-\tau),\,\tau)\right)\,d\tau. \tag{2.5}
$$

$$
u_t(x,\,0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^0 \left(f(x+a(t-\tau),\,\tau) + f(x-a(t-\tau),\,\tau)\right)\,d\tau = 0. \tag{2.6}
$$

Следовательно, условие Коши (2.2) выполнено.

Докажем, что функция (2.3) является решением задачи (2.1).

$$u_t(x,\,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\,[f(x+a(t-\tau),\,\tau) + f(x-a(t-\tau),\,\tau)]\,. \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,\,t) = \frac{1}{2}\,[f(x,\,t) + f(x,\,t)] + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\,[f_\xi(x+a(t-\tau),\,\tau)(x+a(t-\tau)'_t + f_\xi(x-a(t-\tau),\tau)(x-a(t-\tau))'_t] = \\ = f(x,\,t) + \frac{a}{2}\int\limits_0^t d\tau\,[f_\xi(x+a(t-\tau),\,\tau) - f_\xi(x-a(t-\tau),\tau)]\,; \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$u_x(x,\,t) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\,\tau)\,d\xi = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\,[f(x+a(t-\tau),\,\tau) - f(x-a(t-\tau),\,\tau)]\,; \tag{2.9}$$

$$u_{xx}(x,\,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\,[f_\xi(x+a(t-\tau),\,\tau) - f_\xi(x-a(t-\tau),\,\tau)]\,. \tag{2.10}$$

Сравним $u_{xx}(x,\,t)$ и $u_{tt}(x,\,t)$. Получим:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,\,t). \tag{2.11}$$

Следовательно, функция (2.3) является решением задачи (2.1). Докажем единственность решения задачи Коши:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,\,t), \quad -\infty < x < +\infty,\, t > 0; && (2.12)\\ u(x,\,0) &= 0, \quad u_t(x,\,0) = 0 \quad -\infty < x < +\infty. && (2.13) \end{aligned}$$

Докажем от противного. Пусть существует два решения задачи Коши: $u^{(1)}(x,\,t)$, $u^{(2)}(x,\,t)$, $u^{(1)} \neq u^{(1}$ Для функции $u(x,\,t) = u^{(2)}(x,\,t) - u^{(1)}(x,\,t)$ получаем задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty,\, t > 0; && (2.14)\\ u(x,\,0) &= 0,\, u_t(x,\,0) = 0 \quad -\infty < x < +\infty, && (2.15) \end{aligned}$$

по даказанному $u \equiv 0$ ■

Следствие 1. *Задача определения функции* $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)\bigcap \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ *из условий:*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x,\,t); && (2.16)\\ u(x,\,0) &= \varphi(x), \quad u_t(x,\,0) = \psi(x), && (2.17) \end{aligned}$$

имеет единственное решение, определяемое по формуле:

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\,\tau)\,d\xi. \tag{2.18}$$

§3. Решение волнового уравнения на полупрямой

Пусть
$$\Omega = \{(x,\,t)\colon x > 0,\, t > 0\},\ R^T = \{x\colon x \geqslant 0\}. \tag{3.1}$$

Постановка задачи: требуется найти функцию $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)\bigcap \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ из условий:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0,\, t > 0, \tag{3.2}$$
$$u(0,\,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{3.3}$$
$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\,0) = \psi(x), \quad x \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Замечание 1. Условие (3.3) — краевые условия первого рода для краевых условий второго рода:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (x,\,t) \in \Omega, \tag{3.5}$$
$$u(0,\,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{3.6}$$
$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\,0) = \psi(x), \quad x \geqslant 0. \tag{3.7}$$

Теорема 3.1. *Пусть функция* $\varphi \in \mathrm{C}^2(R^T)$, $\psi \in \mathrm{C}^1(R^T)$ *и пусть выполнено условие согласования* $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.2) – (3.4).

Доказательство.
☐ Продолжим функцию $\varphi,\, \psi \in \mathbb{R}^T$ на всю ось $\mathbb{R}$, т.е. определим функцию:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geqslant 0, \\ -\psi(-x), & x > 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

В силу условий соглосования: $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ следует, что $\Phi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, $\Psi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$.

Рассмотрим задачу определения функции $u(x,\,t)$ из условий:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0, \tag{3.10}$$
$$u(x,\,0) = \Phi(x), \quad u_t(x,\,0) = \Psi(x),\, x \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Так как $\Phi \in \mathrm{C}^2, \Psi \in \mathrm{C}^1$, то по теореме (4.2.1) существует единственное решение задачи (3.10)–(3.11):

$$u(x,\,t) = \frac{\Phi(x-at) - \Phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\,d\alpha. \tag{3.12}$$

Рассмотрим функцию $u(x,\,t) = u(x,\,t), \quad (x,\,t) \in \Omega$. Функция u —след функции u на четверти плоскости. Покажем, что функция $u(x,\,t)$ — решение задачи (3.10)–(3.11)

Так как для $\forall\ (x,\,t) \in \Omega$
$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{3.13}$$

то условие (3.2) выполнено. Аналогично показывается, что условие (3.4) выполнено, т.к.

$$u(x,\,0) = u(x,\,0) = \Phi(x) = \varphi(x), \quad x \geqslant 0, \tag{3.14}$$
$$u_t(x,\,0) = u(x,\,0) = \Psi(x) = \psi(x), \quad x \geqslant 0. \tag{3.15}$$

Проверим условие (3.3):

$$u(0,\,t) = u(0,t) = \left.\left(\frac{\Phi(x-at)+\Phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)\,d\alpha\right)\right|_{x=0} =$$

$$= \underbrace{\frac{\Phi(-at)+\Phi(at)}{2}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at}\int\limits_{-at}^{at}\Psi(\alpha)\,d\alpha}_{=0} = 0. \quad (3.16)$$

Следовательно, доказано существование решения задачи (3.2)–(3.4).

Докажем единственность решения задачи (3.2)–(3.4). Докажем от противного. Пусть существуют решения $u^{(1)}(x,\,t)$, $u^{(2)}(x,\,t)$, $u^{(1)} \neq u^{(2)}$, удовлетворяющие условиям (3.2)–(3.4). Тогда для функции $u(x,\,t) = u^{(2)}(x,\,t) - u^{(1)}(x,\,t)$ получим задачу:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, && (3.17)\\ u(0,\,t) &= 0, && (3.18)\\ u(x,\,0) &= 0, \quad u_t(x,\,0) = 0. && (3.19) \end{aligned}$$

По лемме об общем решении волнового уравнения получим:

$$u(x,\,t) = f(x-at) + g(x+at). \quad (3.20)$$

При $t = 0$ получим:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 0, \\ -af'(x) + ag'(x) = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = 0, \\ -f'(x) + g'(x) = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Следовательно, $g'(x) = 0$, $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -C$, $x \geqslant 0$, $g(x) = C$, $x \geqslant 0$, тогда

$$u(x,\,t) = f(x-at) + g(x+at) = -C + C = 0. \quad (3.23)$$

Значит, при $x - at \geqslant 0, \quad u(x,\,t) \equiv 0$.

$$u(x,\,t) = f(x-at) + g(\underbrace{x+at}_{x\geqslant 0}) = f(x-at) + C. \quad (3.24)$$

Подставим в это равенство $x = 0$, тогда:

$$\begin{aligned} u(0,\,t) = f(\underbrace{-at}_{-at=z}) + C = 0; && (3.25)\\ f(z) + C = 0, \quad z \leqslant 0; && (3.26)\\ f(z) = -C, \quad z \leqslant 0; && (3.27)\\ u(x,\,t) = -C + C = 0, \quad t > \frac{x}{a}. && (3.28) \end{aligned}$$

■

§4. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Пусть

$$\Omega_T = \{(x,\,t)\colon x\in\mathbb{R},\ 0<t\leqslant T\}, \tag{4.1}$$
$$\overline{\Omega}_T = \{(x,\,t)\colon x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant t\leqslant T\} \tag{4.2}$$

Постановка задачи: требуется найти функцию $u(x,\,t)\in \mathrm{C}^{2,1}_{x,t}(\Omega_T)\bigcap \mathrm{C}(\overline{\Omega}_T)$, ограниченную на $\overline{\Omega}_T$ и удовлетворяющую условиям:

$$u_t = a^2 u_{xx},\quad (x,\,t)\in\Omega_T, \tag{4.3}$$
$$u(x,\,0)=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $u(x,\,t)$ *ограниченная функция, являющаяся решением задачи* (4.3)–(4.4)*, тогда для* $\forall(x,\,t)\in\overline{\Omega}_T$ *выполняется неравенство*

$$m\leqslant u(x,\,t)\leqslant M,\quad \textit{где} \tag{4.5}$$
$$M=\sup_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x),\ m=\inf_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x) \tag{4.6}$$

Доказательство.
□ Без доказательства. ■

Лемма 4.1.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi=\sqrt{\pi}\quad \textit{интеграл Пуассона.} \tag{4.7}$$

Доказательство.
□ Докажем, что этот интеграл существует. Рассмотрим любые точки $M_1>1$, $M_2>1$.

$$\int\limits_{-M_1}^{M_2} e^{-\xi^2}\,d\xi\leqslant \int\limits_{-M_1}^{-1} e^{-|\xi|}\,d\xi+\int\limits_{-1}^{1}d\xi+\int\limits_{1}^{M_2}e^{-|\xi|}\,d\xi = \\ =(e^{-1}-e^{-M_1})+2+(e^{-1}-e^{-M_1})<e^{-1}+2+e^{-1}<+\infty. \tag{4.8}$$

Следовательно, по признаку сравнения этот интеграл существует. Но тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy= \\ =\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\,d(\rho^2)=\pi. \tag{4.9}$$

Следовательно,

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\right)^2=\pi. \tag{4.10}$$

■

Определение 4.1. *Функция*

$$P(x-\xi,\,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}\tag{4.11}$$

называется ядро Пуассона.

Лемма 4.2. *Свойства ядра Пуассона*

1. $P(x-\xi,\,t)\geqslant 0.$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P(x-\xi,\,t)\,d\xi=1,\quad \forall.t>0$

Доказательство.

□

1. Доказательство очевидно.
2.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi=|x-\xi=s|=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}e^{-\dfrac{s^2}{4a^2t}}\,ds=$$
$$=2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}e^{-\dfrac{s^2}{4a^2t}}\,ds=\left|\alpha=\frac{s}{2a\sqrt{t}}\right|=2\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1\tag{4.12}$$

■

Лемма 4.3. *Ядро Пуассона при $t>0$ удовлетворяет равенству:*

$$\frac{\partial P}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2P}{\partial x^2}.\tag{4.13}$$

Доказательство.

□ Проверяется непосредственно подстановкой. ■

Теорема 4.2. *Для любой ограниченной функции $\varphi\in\mathrm{C}(\mathbb{R})$ существует единственное решение задачи Коши* (4.3)–(4.4) *имеющее вид:*

$$u(x,\,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P(x-\xi,\,t)\varphi(\xi)\,d\xi.\tag{4.14}$$

Доказательство.

□ Докажем единственность. Докажем от противного.

Пусть существуют решения $u^{(1)}(x,\,t)$, $u^{(2)}(x,\,t)$, $u^{(1)}\neq u^{(2)}$, удовлетворяющие условиям (4.3)–(4.4). Тогда для функции $u(x,\,t)=u^{(2)}(x,\,t)-u^{(1)}(x,\,t)$ получим задачу:

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\tag{4.15}$$
$$u(x,\,0)=0.\tag{4.16}$$

Тогда из принципа максимума получаем для $\forall (x,\, t) \in \overline{\Omega}_T$ так как $\varphi(x) \equiv 0$

$$0 \leqslant u(x,\, t) \leqslant 0 \tag{4.17}$$

Следовательно, $u(x,\, t) \equiv 0$. Получили противоречие.

Можно показать, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(x - \xi,\, t)\varphi(\xi)\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial P}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \varphi(\xi)\, d\xi \geqslant 0. \tag{4.18}$$

Можно показать, что

$$\lim_{t \to 0+0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(x - \xi,\, t)\varphi(\xi)\, d\xi = \varphi(x). \tag{4.19}$$

■