1. Основные уравнения математической физики

В математической физике возникают самые разнообразные дифференциальные уравнения, описывающие различные физические процессы. Целью нашего курса является изучение трёх основных уравнений:
уравнения колебаний, уравнения теплопроводности и уравнения, которое мы пока будем называть стационарным уравнением.

Всюду ниже предполагаются выполненными условия:

$$c(x) \geqslant c_0 = const > 0, \quad \rho(x) \geqslant \rho_0 = const > 0, \quad k(x) \geqslant k_0 = const > 0. \tag{1.1}$$

1.1. Уравнение колебаний

Опр. 1.1. **Уравнением колебаний (волновым уравнением)** называется уравнение вида:

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{div}\,\left(k(x)\mathrm{grad}\,u\right) + q(x,\,t)u = F(x,\,t), \qquad x = (x_1,\,\ldots,\,x_n), \tag{1.2}$$

в котором ρ, p, q, F – заданные функции, а $u(x,\,t)$ – искомая функция и для функций $\rho(x)$ и $k(x)$ выполнены условия (1.1).
В случае, когда пространство x одномерно, уравнение принимает вид:

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,\,t)u = F(x,\,t), \qquad x = (x_1,\,\ldots,\,x_n), \tag{1.3}$$

Если $F(x,\,t) \equiv 0$, то уравнение (1.2) называется **однородным**, в противном случае – **неоднородным**.

Выражение $\mathrm{div}\,\left(k(x)\mathrm{grad}\,u\right)$ в n-мерном пространстве переменных x понимается следующим образом:

$$\mathrm{div}\,\left(k(x)\mathrm{grad}\,u\right) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right).$$

В частном случае, когда $k = k_0 = const$ и её можно вынести за знак производных и суммы, получаем:

$$\mathrm{div}\,\left(k_0\,\mathrm{grad}\,u\right) = k_0\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = \Delta u.$$

Уравнение (1.2) описывает, в частности, малые поперечные колебания струны (а при двумерном прсотранстве x – колебания мембраны), малые продольные колебания упругого стержня, электрические колебания в проводах. На примере уравнения поперечных колебаний струны рассмотрим смысл всех входящих в него функций.

- Искомая функция $u(x,\,t)$ представляет собой величину отклонения струны в точке x в момент времени t от её равновесного положения.
- Функция $\rho(x)$ имеет смысл линейной плотности струны (то есть $\rho(x)dx$ равняется массе кусочка струны длины dx в точке x).
- Функция $k(x)$ задаёт натяжение струны (а в случае продольных колебаний стержня постоянного сечения – модуль Юнга в точке x).

- Функция $q(x,\, t)$ определяет сопротивление среды и задаёт уровень затухания колебаний.
- Функция $F(x,\, t)$ называется «правой частью» и представляет собой внешнюю силу, действующую на струну.

В простейшем случае, когда

$$\rho(x) = \rho_0 = const > 0, \quad \frac{k(x)}{\rho_0} = a^2 = const > 0, \quad q \equiv 0,$$

уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,\, t), \qquad x = (x_1,\, \dots,\, x_n), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,\, t), \qquad n = 1, \tag{1.5}$$

где функция правой части $f(x,\, t) = \frac{F(x,t)}{\rho_0}$.

Замечание 1.1. Уравнения (1.4) – (1.5) также часто называют **волновым уравнением**.

1.2. Уравнение теплопроводности

Опр. 1.2. **Уравнением теплопроводности** называется уравнение вида:

$$c(x)\rho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}\,\left(k(x)\mathrm{grad}\, u\right) = F(x,\, t), \qquad x = (x_1,\, \dots,\, x_n), \tag{1.6}$$

в котором $\rho,\ k,\ F$ – заданные функции, а $u(x,\ t)$ – искомая функция и для функций $c(x),\ \rho(x)$ и $k(x)$ выполнены условия (1.1).
В случае, когда пространство x одномерно, уравнение принимает вид:

$$c(x)\rho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = F(x,\, t), \qquad x = (x_1,\, \dots,\, x_n), \tag{1.7}$$

Если $F(x,\, t) \equiv 0$, то уравнение (1.6) называется **однородным**, в противном случае – **неоднородным**.

Уравнение (1.6) описывает, в частности, распространение тепла в тонком стрежне, тонкой мембране или объёмном теле, диффузию вещества. На примере распространение тепла в тонком стрежне рассмотрим смысл всех входящих в уравнение функций.

- Искомая функция $u(x,\, t)$ представляет собой температуру стержня в точке x в момент времени t.
- Функция $\rho(x)$ имеет смысл линейной плотности стержня.
- Функция $c(x)$ есть удельная теплоёмкость.
- $k(x)$ – коэффициент теплопроводности в точке x.
- Функция $F(x,\, t)$ называется «правой частью» и представляет собой плотность источников тепла.

В простейшем случае, когда

$$c(x) = c_0 = const > 0, \quad \rho(x) = \rho_0 = const > 0, \quad \frac{k(x)}{c_0\rho_0} = a^2 = const > 0,$$

уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,\,t), \qquad x = (x_1,\,\ldots,\,x_n), \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,\,t), \qquad n = 1, \tag{1.9}$$

где функция правой части $f(x,\,t) = \frac{F(x,t)}{c_0\rho_0}$.

Замечание 1.2. Уравнения (1.8) – (1.9) также часто называют **уравнением теплопроводности**.

1.3. Стационарные уравнения

Если уравнения колебаний или теплопроводности описывают процесс, установившийся во времени, и никакие входящие в уравнения функции уже от времени не зависят, то производные по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ обращаются в нуль, и уравнение принимает вид:

$$-\operatorname{div}\,(k(x)\operatorname{grad}u) + q(x)u = F(x), \qquad x = (x_1,\,\ldots,\,x_n). \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) описывает, в частности, стационарное распространение тепла в тонком стрежне, тонкой мембране или объёмном теле, установившуюся концентрацию вещества, равновесное положение мембраны по действием внешней постоянной силы и т.п. Смысл всех входящих в уравнение функций наследуется из нестационарного уравнения, из которого оно получилось.
В простейшем случае, когда

$$k(x) = a^2 = const > 0, \quad q(x) \equiv 0,$$

уравнение принимает вид уравнения Лапласа или Пуассона.

Опр. 1.3. **Уравнением Лапласа** называется уравнение вида:

$$\Delta u = 0, \qquad x = (x_1,\,\ldots,\,x_n), \tag{1.11}$$

в котором $u(x,\ t)$ – искомая функция.
Уравнением Пуассона называется уравнение вида:

$$\Delta u = f(x), \qquad x = (x_1,\,\ldots,\,x_n), \tag{1.12}$$

в котором $f = -\frac{F(x)}{a^2}$ – заданная функция, а $u(x,\ t)$ – искомая функция.

2. Основные задачи для уравнений математической физики

2.1. Задача Коши

Если рассмотреть бесконечную струну, то естественно предположить, что её колебания полностью описываются тремя равенствами: уравнением колебаний, начальным положением и скоростью в каждой точке $x \in (-\infty,\ +\infty)$ в начальный момент времени $t = 0$. Отсюда возникает понятие:

Опр. 2.1. Пусть

$$\Omega = \mathbb{R}^n = \{x = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \mid\ x_i \in (-\infty,\ +\infty)\}\,,$$
$$Q = \Omega \times (0,\ +\infty) = \{(x,\ t) \mid\ x \in \Omega,\ \ t > 0\}\,,$$
$$Q^* = \Omega \times [0,\ +\infty) = \{(x,\ t) \mid\ x \in \Omega,\ \ t \geqslant 0\}\,.$$

задачей Коши для уравнения колебаний называется задача:
Найти функцию $u(x,\ t) \in C^2(Q) \bigcap C(Q^*)$ из условий:

$$\begin{cases} \rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\ (k(x) \operatorname{grad} u) + q(x,\ t)u = F(x,\ t), & (x,\ t) \in Q; \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = \psi(x), & x \in \Omega;, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные функции, называемые **начальными данными** или **данными Коши**, а для заданных функций $\rho(x)$, $k(x)$, $q(x,\ t)$ и $F(x,\ t)$ выполнены условия (1.1) и:

$$\rho,\ \varphi,\ \psi \in C(\Omega), \quad k \in C^1(\Omega), \qquad q,\ F \in C(Q^*).$$

Аналогично определяется задача Коши для уравнения теплопроводности:

Опр. 2.2. **задачей Коши для уравнения теплопроводности** называется задача:
Найти функцию $u(x,\ t)u(x,\ t) \in C^{2,1}(Q) \bigcap C(Q^*)$ из условий:

$$\begin{cases} c(x)\rho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\ (k(x) \operatorname{grad} u) = F(x,\ t), & (x,\ t) \in Q; \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция, называемая **начальными данными** или **данными Коши**, а для заданных функций $c(x)$, $\rho(x)$, $k(x)$ и $F(x,\ t)$ выполнены условия (1.1) и:

$$c,\ \rho,\ \varphi \in C(\Omega), \quad k \in C^1(\Omega), \qquad F \in C(Q^*).$$

Для стационарного уравнения определять задачу Коши бессмысленно, поскольку раз решение от времени не зависит, то оно должно совпадать со своим начальным условием $\varphi(x)$.

2.2. Виды краевых условий

Перейдём к рассмотрению уравнений в ограниченных областях. Пусть

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n\ \ –\ \ \text{ограниченная область с гладкой границей} \quad \partial\Omega \in C^2.$$

Тогда поведение решения уравнения будет, очевидно зависеть от того, что с ним происходит на границе. Например, края колеблющейся мембраны можно закрепить, отпустить или закрепить упруго (на пружинках).

Опр. 2.3. **Краевым (граничным) условием I-го рода** называется условие:

$$u(x,\,t)\Big|_{\partial\Omega} = \mu(x,\,t), \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0 \tag{2.3}$$

с заданной функцией $\mu(x,\,t)$.
Краевым (граничным) условием II-го рода называется условие:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = \nu(x,\,t), \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{2.4}$$

где $\vec{n}$ – внешняя единичная нормаль к поверхности $\partial\Omega$, а функция $\nu(x,\,t)$ задана.
Краевым (граничным) условием III-го рода называется условие:

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \beta u\right)\Big|_{\partial\Omega} = \chi(x,\,t), \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0 \tag{2.5}$$

с заданной функцией $\chi(x,\,t)$.
Краевое уловие называется **однородным**, если функция в его правой части (μ, ν или χ) равна всюду нулю, и **неоднородным** в противном случае.

Замечание 2.1. Краевое условие III-го рода является наиболее общим, так как при $\alpha = 0$ оно превращается в условие I-го рода, а при $\beta = 0$ – в условие II-го рода.
Заметим также, что α и β могут быть функциями.

Опр. 2.4. Однородное граничное условие I-го рода называют **условием Дирихле**:

$$u(x,\,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Однородное граничное условие II-го рода называют **условием Неймана**:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Замечание 2.2. Неоднородное краевое условие I-го рода также иногда называют условием Дирихле, а неоднородное краевое условие II-го рода – условием Неймана.
Условие I-го рода в случае уравнения колебаний имеет смысл **жёстко закреплённого края**, условие Неймана – **свободного края**, а условие III-го рода – **края, закреплённого упруго**.
В случае уравнения теплопроводности условие I-го рода означает **край, на котором поддерживается заданная температура**, условие Неймана – **теплоизолированный край**, а условие III-го рода – **край, на котором происходит конвективный теплообмен с окружающей средой**.

2.3. Задача Дирихле для стационарного уравнения

Если рассмотреть ограниченную струну, мембрану или ёмкость, где происходила диффузия или теплообмен, то естественно предположить, что решение уравнения будет зависеть от того, что происходит на границе данного тела. К примеру, форма мембраны не может не зависеть от её же профиля на границе. Поэтому вводят определение:

Опр. 2.5. Пусть

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \; - \; \text{ограниченная область с гладкой границей} \quad \partial\Omega \in C^3;$$

$$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega \; - \; \text{её замыкание.}$$

Задачей Дирихле для стационарного уравнения (граничной задачей I-го рода) называется задача:
Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ *из условий:*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,\left(k(x)\mathrm{grad}\, u\right) + q(x)u = F(x), & x \in \Omega; \\ u(x) = \mu(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.8}$$

где $\mu(x)$ – заданная непрерывная функция, называемая **данными Дирихле**, а для заданных функций $k(x)$, $q(x)$ и $F(x)$ выполнены условия (1.1) и:

$$q(x) \geqslant 0, \qquad k \in C^1(\Omega), \qquad q,\; F \in C(\Omega).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = F(x), & x \in (0,\; l); \\ u(0) = u_0, & \\ u(l) = u_1. & \end{cases} \tag{2.9}$$

Самый простой случай, когда

$$k(x) \equiv a^2 = const > 0, \qquad q(x) \equiv 0, \qquad n = 1,$$

получим краевую задачу I-го рода для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) = -F(x), & x \in \Omega; \\ u(x) = \mu(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

а если и $F \equiv 0$, – задачу Дирихле для уравнения Лапласа.

2.4. Задача Неймана для стационарного уравнения

Кроме условий Дирихле, на границе могут быть условия других видов. Например,

Опр. 2.6. Пусть

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \ \text{ — ограниченная область с гладкой границей } \quad \partial\Omega \in C^3;$$

$$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega \ \text{ — её замыкание.}$$

Задачей Неймана для стационарного уравнения (граничной задачей II-го рода) называется задача:
Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ *из условий:*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\ (k(x)\mathrm{grad}\ u) + q(x)u = F(x), & x \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = \nu(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.11}$$

где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности Ω, $\nu(x)$ – заданная непрерывная функция, называемая **данными Неймана**, а для заданных функций $k(x)$, $q(x)$ и $F(x)$ выполнены условия (1.1) и:

$$q(x) \geqslant 0, \qquad k \in C^1(\Omega), \qquad q,\ F \in C(\Omega).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = F(x), & x \in (0,\ l); \\ u'(0) = u_0, \\ u'(l) = u_1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Самый простой случай, когда

$$k(x) \equiv a^2 = const > 0, \qquad q(x) \equiv 0, \qquad n = 1,$$

получим краевую задачу II-го рода для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) = -F(x), & x \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = \nu(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.13}$$

а если и $F \equiv 0$, – задачу Неймана для уравнения Лапласа.

Замечание 2.3. Условие II-го рода в одномерном случае принимает вид

$$u'(0) = u_0, \qquad u'(l) = u_1$$

в силу того факта, что под нормалью к границе в случае одномерной ограниченной области (отрезка) понимается вектор, направленный вправо, на правом конце отрезка, и вектор, направленный влево, на левом его конце, откуда:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(0) = -u'(0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(l) = u'(l).$$

2.5. Третья краевая задача

Кроме условий Дирихле, на границе могут быть условия других видов. Например,

Опр. 2.7. Пусть

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \ \text{ – ограниченная область с гладкой границей } \quad \partial\Omega \in C^3;$$

$$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega \ \text{ – её замыкание.}$$

Краевой задачей III-го рода) называется задача:
Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ *из условий:*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\ (k(x)\operatorname{grad} u) + q(x)u = F(x), & x \in \Omega; \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) + \beta u(x) = \chi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.14}$$

где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности Ω, $\chi(x)$ – заданная непрерывная функция, называемая **функцией краевого условия**, а для заданных функций $k(x)$, $q(x)$ и $F(x)$ выполнены условия (1.1) и:

$$q(x) \geqslant 0, \qquad k \in C^1(\Omega), \qquad q,\ F \in C(\Omega).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = F(x), & x \in (0,\ l); \\ -\alpha u'(0) + \beta u(0) = u_0, & \\ \alpha u'(l) + \beta u(l) = u_1. & \end{cases} \tag{2.15}$$

(Минус перед α во второй строчке возник в силу рассуждений, приведённых в замечании 2.3.)

Самый простой случай, когда

$$k(x) \equiv a^2 = const > 0, \qquad q(x) \equiv 0, \qquad n = 1,$$

получим краевую задачу III-го рода для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) = -F(x), & x \in \Omega; \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) + \beta u(x) = \chi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.16}$$

а если и $F \equiv 0$, – задачу III-го рода для уравнения Лапласа.

2.6. Начально-краевые задачи

Наконец, если нестационарный процесс колебаний или телообмена происходит в ограниченной области, для корректной постановки задач нам потребуются как данные Коши, так и краевые условия.

Опр. 2.8. Пусть

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \ - \ \text{ограниченная область с гладкой границей} \quad \partial\Omega \in C^3;$$

$$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega \ - \ \text{её замыкание;}$$

$$Q = \Omega \times (0,\ +\infty) = \{(x,\ t) \mid \ x \in \Omega, \ \ t > 0\};$$

$$Q^* = \Omega \times [0,\ +\infty) = \{(x,\ t) \mid \ x \in \Omega, \ \ t \geqslant 0\};$$

$$\overline{Q} = \overline{\Omega} \times [0,\ +\infty) = \big\{(x,\ t) \mid \ x \in \overline{\Omega}, \ \ t \geqslant 0\big\}.$$

Начально-краевой задачей для уравнения колебаний называется задача:
Найти функцию $u(x) \in C^2(Q) \bigcap C(Q^*)$ *из условий:*

$$\begin{cases} \rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\,(k(x)\operatorname{grad} u) + q(x,\ t)u = F(x,\ t), & (x,\ t) \in Q; \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ u_t(x,\ 0) = \psi(x), & x \in (0,\ l); \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = \psi(x), & x \in \Omega, \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) + \beta u(x) = \chi(x,\ t), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.17}$$

где $\chi(x,\ t)$ – заданная непрерывная функция, называемая **функцией краевого условия**, $\varphi(x),\ \psi(x) \in C(\overline{\Omega})$ – **данные Коши**, а для заданных функций $\rho(x),\ k(x),\ q(x)$ и $F(x,\ t)$ выполнены условия (1.1) и:

$$\rho \in C(\overline{\Omega}), \quad k \in C^1(\overline{\Omega}), \qquad q,\ F \in C(\overline{Q}).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} \rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,\ t)u = F(x,\ t), & x \in (0,\ l); \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in (0,\ l); \\ u_t(x,\ 0) = \psi(x), & x \in (0,\ l); \\ -\alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}(0) + \beta u(0) = \mu(t), & \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}(l) + \beta u(l) = \nu(t). & \end{cases} \tag{2.18}$$

В случае, когда $\alpha = 0$ получаем I-ю начально-краевую задачу, в случае $\beta = 0$ – II-ю, а при $\alpha \cdot \beta \neq 0$ – III-ю.

Самый простой случай, когда краевые условия I-го рода,

$$\rho(x) = \rho_0 = const > 0, \quad \frac{k(x)}{\rho_0} \equiv a^2 = const > 0, \qquad q(x) \equiv 0,$$

получим I-ую начально-краевую задачу для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,\ t) = \frac{F(x,t)}{\rho_0}, & x \in \Omega; \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ u_t(x,\ 0) = \psi(x), & x \in \Omega; \\ u(x,\ t) = \mu(t), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.19}$$

Опр. 2.9. Пусть Ω, $\overline{\Omega}$, Q и Q^* такие же, как в определении 2.8.
Начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности называется задача:
Найти функцию $u(x) \in C^{2,1}(Q) \bigcap C(Q^*)$ *из условий:*

$$\begin{cases} c(x)\rho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\,(k(x)\operatorname{grad} u) = F(x,\,t), & (x,\ t) \in Q; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) + \beta u(x) = \chi(x,\ t), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.20}$$

где $\chi(x,\ t)$ – заданная непрерывная функция, называемая **функцией краевого условия**, $\varphi(x) \in C(\overline{\Omega})$ – **данные Коши**, а для заданных функций $c(x)$, $\rho(x)$, $k(x)$ и $F(x,\ t)$ выполнены условия (1.1) и:

$$c(x) \geqslant c_0 > 0, \quad \rho(x) \geqslant \rho_0 > 0, \quad k(x) \geqslant k_0 > 0, \qquad \rho \in C(\overline{\Omega}), \quad k \in C^1(\overline{\Omega}), \qquad F \in C(\overline{Q}).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} -\,\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = F(x), & x \in (0,\ l); \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \in (0,\ l); \\ -\alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}(0) + \beta u(0) = \mu(t), & t > 0; \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}(l) + \beta u(l) = \nu(t) & t > 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

В случае, когда $\alpha = 0$ получаем I-ю начально-краевую задачу, в случае $\beta = 0$ – II-ю, а при $\alpha \cdot \beta \neq 0$ – III-ю.

Самый простой случай, когда краевые условия I-го рода,

$$c(x) = c_0 = const > 0, \quad \rho(x) = \rho_0 = const > 0, \quad \frac{k(x)}{c_0\rho_0} \equiv a^2 = const > 0,$$

получим I-ую начально-краевую задачу вида:

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,\,t) = \frac{F(x,t)}{c_0\rho_0}, & x \in \Omega; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ u(x,\,t) = \mu(t), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.22}$$

Пример 2.1. *Поставить начально-краевую задачу для уравнения колебаний струны на отрезке* $x \in [0,\ l]$ *с начальным отклонением* $\varphi(x)$*, нулевой начальной скоростью струны и однородными краевыми условиями*

- *I-го рода на левом конце и*
- *II-го рода на правом.*

Уравнение колебаний на отрезке $[0,\ l]$ принимает вид:

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,\ t)u = F(x,\ t), \qquad x \in (0,\ l).$$

Начальное отклонение $\varphi(x)$ означает, что:

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \qquad x \in (0,\ l).$$

Начальная скорость равна нулю, то есть:

$$u_t(x,\,0) = 0, \qquad x \in (0,\ l).$$

Однородное краевое условие I-го рода на левом конце (при $x = 0$) имеет вид:

$$u(0,\ t) = 0, \qquad t > 0,$$

а однородное краевое условие II-го рода на правом конце (при $x = l$), соответственно, вид:

$$u_x(0,\ t) = 0, \qquad t > 0.$$

Собрав все эти условия воедино, получаем задачу:
Найти функцию $u(x) \in C^2(Q) \bigcap C(Q^*)$, где Q и Q^* заданы в определении 2.8, из условий:

$$\begin{cases} \rho(x)\, u_{tt} - \ (k(x)u_x)_x + q(x,\ t)u = F(x,\ t), & x \in (0,\ l); \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in (0,\ l); \\ u_t(x,\ 0) = 0, & x \in (0,\ l); \\ u(0,\ t) = 0, & t > 0; \\ u_x(l,\ t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C[0,\ l]$, а для заданных функций $\rho(x)$, $k(x)$, $q(x)$ и $F(x,\ t)$ выполнены обычные условия:

$$\rho(x) \geqslant \rho_0 > 0, \quad k(x) \geqslant k_0 > 0, \qquad \rho \in C[0,\ l], \quad k \in C^1[0,\ l], \qquad q,\ F \in C\left([0,\ l] \times [0,\ +\infty)\right).$$

Пример 2.2. *Поставить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $x \in [0,\ l]$ с начальным распределением температуры $\varphi(x)$ и однородными краевыми условиями*

- *III-го рода на левом конце и*
- *I-го рода на правом.*

Уравнение теплопроводности на отрезке $[0,\ l]$ принимает вид:

$$c(x)\rho(x)\, u_t - (k(x)u_x)_x = F(x,\ t), \qquad x \in (0,\ l).$$

Начальное распределением температуры $\varphi(x)$ означает, что:

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \qquad x \in (0,\ l).$$

Однородное краевое условие III-го рода на левом конце (при $x = 0$) имеет вид:

$$-\alpha u_x(0,\ t) + \beta u(0,\ t) = 0, \qquad t > 0,$$

а однородное краевое условие I-го рода на правом конце (при $x = l$), соответственно, вид:

$$u(0,\ t) = 0, \qquad t > 0.$$

Собрав все эти условия воедино, получаем задачу:
Найти функцию $u(x) \in C^{2,1}(Q) \bigcap C(Q^*)$, где Q и Q^* заданы в определении 2.8, из условий:

$$\begin{cases} c(x)\rho(x)\, u_{tt} - \ (k(x)u_x)_x = F(x,\ t), & x \in (0,\ l); \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in (0,\ l); \\ -\alpha u_x(0,\ t) + \beta u(0,\ t) = 0 = 0, & t > 0; \\ u(l,\ t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

где α, β – заданные числа, $\varphi(x) \in C[0,\ l]$, а для заданных функций $c(x)$, $\rho(x)$, $k(x)$ и $F(x,\ t)$ выполнены обычные условия:

$$c(x) \geqslant c_0 > 0, \quad \rho(x) \geqslant \rho_0 > 0, \quad k(x) \geqslant k_0 > 0, \qquad \rho \in C[0,\ l], \quad k \in C^1[0,\ l],$$
$$F \in C\left([0,\ l] \times [0,\ +\infty)\right).$$

Задание на самостоятельную работу:

1) подставить размерность всех физических величин, входящих в одномерные уравнения колебаний (1.3), теплопроводности (1.7) и двумерное уравнение (1.10) стационарного распределения температуры и убедиться, что эти уравнения не нарушают равенства размерностей;

2) Поставить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $x \in [0,\ l]$ с нулевым начальным распределением температуры и однородными краевыми условиями III-го рода на левом конце и II-го рода на правом;

3) Поставить начально-краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке $x \in [0,\ l]$ с нулевым начальным отклонением, начальной скоростью $\psi(x)$ и однородными краевыми условиями II-го рода на левом конце и I-го рода на правом;

4) Поставить краевую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике
$$x \in [0,\ l], \quad y \in [0,\ s]$$
однородными краевыми условиями II-го рода на левой и нижней сторонах и III-го рода на правой и верхней;

5) Поставить краевую задачу Неймана для уравнения Пуассона в прямоугольнике
$$x \in [0,\ l], \quad y \in [0,\ s];$$

6) Поставить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $x \in [0,\ l]$ с нулевым начальным распределением температуры и однородными краевыми условиями Дирихле на обоих концах;

7) Поставить начально-краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке $x \in [0,\ l]$ с начальным отклонением $\sin \frac{\pi x}{l}$, начальной скоростью 1 и однородными краевыми условиями Неймана на обоих концах;

8) Поставить краевую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике
$$x \in [0,\ l], \quad y \in [0,\ s]$$
однородными краевыми условиями Дирихле на левой и правой сторонах и Неймана на нижней и верхней;

9) Поставить краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике
$$x \in [0,\ l], \quad y \in [0,\ s].$$