# 1. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных 2-го порядка

## 1.1. Классификация линейных УЧП 2-го порядка с 2-мя независимыми переменными

Рассмотрим общее УЧП 2-го порядка с 2-мя независимыми переменными:

$$F\left(x,\ y;\ u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}\right) = 0.$$

Его частным случаем является **квазилинейное уравнение**:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + f\left(x,\ y;\ u,\ u_x,\ u_y\right) = 0.$$

Мы же будем изучать, в основном, ещё более частный случай – **линейное уравнение**:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x,\ y), \tag{1.1}$$

где коэффициенты $a_{ij}$, $b_i$, $c$ являются, вообще говоря, функциями от $(x,\ y)$.

**Опр. 1.1.** **Характеристической квадратичной формой уравнения** (1.1) называется выражение:

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2. \tag{1.2}$$

Выражение

$$\Delta = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \tag{1.3}$$

называется **дискриминантом квадратичной формы** (1.2).

**Опр. 1.2.** Уравнение (1.1) относится к

1) **гиперболическому типу**, если $\Delta > 0$;
2) **эллиптическому типу**, если $\Delta < 0$;
3) **параболическому типу**, если $\Delta = 0$.

*Замечание* 1.1. В случае, когда коэффициенты $a_{ij}$, $b_i$, $c$ являются функциями от $(x,\ y)$, дискриминант $\Delta$ также есть функция от $(x,\ y)$. Поэтому уравнение с переменными коэффициентами может в разных областях плоскости $\mathbb{R}^2$ иметь разный тип.

*Замечание* 1.2. Тип уравнения не изменяется при невырожденной замене переменных

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,\ y); \\ \eta = \eta(x,\ y). \end{cases}$$

**Опр. 1.3. Каноническим видом** уравнения

1) гиперболического типа называется вид

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi + \beta_2 v_\eta + \gamma v = g(\xi,\, \eta), \quad \text{либо}$$
$$v_{\xi\eta} + \beta_1 v_\xi + \beta_2 v_\eta + \gamma v = g(\xi,\, \eta);$$

2) эллиптического типа называется вид

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi + \beta_2 v_\eta + \gamma v = g(\xi,\, \eta);$$

3) параболического типа называется вид

$$v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi + \beta_2 v_\eta + \gamma v = g(\xi,\, \eta);$$

## 1.2. Приведение к каноническому виду УЧП 2-го порядка с 2-мя независимыми переменными

**Алгоритм**.

1) Находим $\Delta$, определяем тип уравнения.
2) Находим первые интегралы **характеристических уравнений:**

   в случае, когда $a_{11} \neq 0$: $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$;

   в случае, когда $a_{22} \neq 0$: $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}}$.
3) Первые интегралы имеют вид:

   в случае гиперболического типа: $\quad \varphi(x,\, y) = c, \quad \psi(x,\, y) = c$;

   в случае эллиптического типа: $\quad \alpha(x,\, y) \pm i\beta(x,\, y) = c$;

   в случае параболического типа: $\quad \delta(x,\, y) = c$.
4) Делаем замену переменных:

   в случае гиперболического типа: $\quad \begin{cases} \xi = \varphi(x,\, y); \\ \eta = \psi(x,\, y). \end{cases}$;

   в случае эллиптического типа: $\quad \begin{cases} \xi = \alpha(x,\, y); \\ \eta = \beta(x,\, y). \end{cases}$;

   в случае параболического типа: $\quad \begin{cases} \xi = \delta(x,\, y); \\ \eta = \varepsilon(x,\, y). \end{cases}$,

   где $\varepsilon(x,\, y)$ – любая функция из $C^1$ такая, что: $\quad \begin{vmatrix} \delta_x & \delta_y \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y \end{vmatrix} \neq 0.$

Результатом произведённой замены будет канонический вид уравнения.

**Пример 1.1. № 91**.
*Привести к каноническому виду в каждой области, где сохраняется тип, уравнение*

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

**Шаг 1.** Ищем дискриминант.
Так как в нашем случае $a_{11} = y, \ \ a_{12} = 0, \ \ a_{22} = 1$, то

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y.$$

Поэтому

**а)** в полуплоскости $y < 0$ дискриминант $\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad$ гиперболический тип;

**б)** в полуплоскости $y > 0$ дискриминант $\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad$ эллиптический тип;

**в)** на прямой $y = 0$ дискриминант $\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad$ параболический тип.

**Шаг 2.** Составим характеристические уравнения.
Так как $a_{22} = 1 \neq 0$, характеристические уравнения имеют вид:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}}, \qquad \text{то есть} \qquad \frac{dx}{dy} = \pm\sqrt{-y}. \tag{1.4}$$

Это – уравнения с разделяющимися переменными. Решаем их:

**а)** в полуплоскости $y < 0$

$$dx = \pm\sqrt{-y}dy \qquad \Rightarrow \qquad x + c = \mp\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому первые интегралы имеют вид:

$$\boxed{\varphi(x,\, y) = x + \tfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}} = c, \qquad \boxed{\psi(x,\, y) = x - \tfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}} = c \tag{1.5}$$

**б)** в полуплоскости $y > 0$

$$dx = \pm i\sqrt{y}dy \qquad \Rightarrow \qquad x + c = \pm i\frac{2}{3}\,y^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому первые интегралы имеют вид:

$$\alpha(x,\, y) \pm i\beta(x,\, y) = c, \qquad \text{где} \quad \boxed{\alpha(x,\, y) = x}, \qquad \boxed{\beta(x,\, y) = \tfrac{2}{3}\,y^{\frac{3}{2}}} \tag{1.6}$$

**в)** на прямой $y = 0$

$$dx = 0 \cdot dy \qquad \Rightarrow \qquad x = c$$

Поэтому первый интеграл (единственный линейно независимый) имеет вид:

$$\boxed{\delta(x,\, y) = x.} \tag{1.7}$$

**Шаг 3.** Замена переменных.
В соответствии с алгоритмом, необходимо произвести замену:

**а)** в полуплоскости $y < 0$

$$\begin{cases} \xi = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}; \\ \eta = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Тогда, введя функцию $v(\xi,\, \eta)$, получаем:

$$u_x = v_\xi + v_\eta, \qquad u_y = (-v_\xi + v_\eta)\sqrt{-y},$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \qquad u_{yy} = -y\left(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}\left(-v_\xi + v_\eta\right).$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение, получаем:

$$yu_{xx} + u_{yy} = y\left(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) - y\left(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}\left(-v_\xi + v_\eta\right) =$$

$$= y\left[4v_{\xi\eta} - \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\left(-v_\xi + v_\eta\right)\right] = 0.$$

Поделив на $4y$ и выразив $2(-y)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(\xi - \eta)$, получаем канонический вид:

$$v_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(-v_\xi + v_\eta\right) = 0.$$

**б)** в полуплоскости $y > 0$

$$\begin{cases} \xi = x; \\ \eta = \frac{2}{3}\,y^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Тогда, введя функцию $v(\xi,\,\eta)$, получаем:

$$u_x = v_\xi, \qquad u_y = v_\eta\,\sqrt{y},$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi}, \qquad u_{yy} = v_{\eta\eta}\,y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\,v_\eta.$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение, получаем:

$$yu_{xx} + u_{yy} = y\left(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}}\,v_\eta = y\left(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\,v_\eta\right) =$$

$$= \left[2y^{\frac{3}{2}} = 3\eta\right] = y\left(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}\,v_\eta\right) = 0.$$

Поделив на $y$, получаем канонический вид:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}\,v_\eta = 0.$$

**в)** на прямой $y = 0$

$$\begin{cases} \xi = x; \\ \eta = y. \end{cases}$$

(Нам надо было произвольным образом выбрать $\eta(x,\,y)$ так, чтобы функции $\xi$, $\eta$ образовывали линейно независимую пару.)
Введя функцию $v(\xi,\,\eta)$, получаем:

$$u_x = v_\xi, \qquad u_y = v_\eta, \qquad u_{xx} = v_{\xi\xi}, \qquad u_{yy} = v_{\eta\eta}.$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение при $y = 0$, получаем:

$$u_{yy} = v_{\eta\eta} = 0.$$

Итак, канонический вид исходного уравнения на прямой $y = 0$:

$$v_{\eta\eta} = 0 \qquad \text{или, что то же самое,} \qquad u_{yy} = 0.$$

**Ответ:**

$$\begin{cases} v_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(-v_\xi + v_\eta\right) = 0 & \text{в области} \quad y < 0, \quad \text{гиперболический тип;} \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}\, v_\eta = 0 & \text{в области} \quad y > 0, \quad \text{эллиптический тип;} \\ u_{yy} = 0 & \text{в области} \quad y = 0, \quad \text{параболический тип} \end{cases}$$

При этом

$$\begin{cases} \xi = y - x + 2\sqrt{x}, \qquad \eta = y - x - 2\sqrt{x} & \text{в области} \quad y < 0; \\ \xi = y - x, \qquad \eta = 2\sqrt{-x} & \text{в области} \quad y > 0; \\ \xi = x, \qquad \eta = y & \text{в области} \quad y = 0. \end{cases}$$

## 1.3. Приведение к каноническому виду УЧП 2-го порядка с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы будем рассматривать УЧП 2-го порядка с постоянными коэффициентами и $n$ независимыми переменными:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i x_j} + f(x_1,\, \ldots,\, x_n;\; u,\, u_{x_1},\, \ldots,\, u_{x_n}) = 0, \tag{1.8}$$

$a_{ij} = const \in \mathbb{R}, \quad i,\, j = \overline{1,\, n}.$

**Опр. 1.4.** **Характеристической квадратичной формой уравнения** (1.8) называется выражение:

$$Q(\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \lambda_i \lambda_j. \tag{1.9}$$

**Нормальным видом квадратичной формы** (1.9) называется её вид

$$\tilde{Q}(\mu_1,\, \ldots,\, \mu_n) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, \mu_k^2, \qquad \beta_k \in \left\{-1,\; 0,\; 1\right\}. \tag{1.10}$$

**Каноническим видом** уравнения (1.8) называется вид, в котором его характеристическая квадратичная форма принимает нормальный (или канонический) вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k\, u_{x_k x_k} + g(x_1,\, \ldots,\, x_n;\; u,\, u_{x_1},\, \ldots,\, u_{x_n}) = 0. \tag{1.11}$$

**Опр. 1.5.** Уравнение (1.8) относится к

1) **гиперболическому типу**, если все коэффициенты $\beta_k$ отличны от нуля и не все одного знака;

2) **эллиптическому типу**, если все коэффициенты $\beta_k$ отличны от нуля и все одного знака;

3) **параболическому типу**, если хотя бы один из коэффициентов $\beta_k$ равен нулю.

**Алгоритм.**

1) Приводим характеристическую квадратичную форму к каноническому (нормальному) виду (1.10) (методом выделения полных квадратов). Выписываем матрицу преобразования, осуществляющую этот процесс:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \vdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \vdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \vdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \det A \neq 0. \tag{1.12}$$

2) Находим матрицу $\Gamma$ замены переменных по закону

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1}. \tag{1.13}$$

3) Производим замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \vdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \vdots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \vdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}}_{\Gamma} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

Результатом произведённой замены будет канонический вид (1.11) уравнения (1.8).

## 2. № 119

*Привести к каноническому виду уравнение:*

$$u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2}\,u_y = 0.$$

<u>**Шаг 1.**</u> Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \left[\begin{array}{l} \nu_1 = \lambda_1 + \lambda_2; \\ \nu_2 = \lambda_1 - \lambda_2; \\ \nu_3 = \lambda_3 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) - \left(\nu_1 + \nu_2\right)\nu_3 + \frac{1}{2}\left(\nu_1 - \nu_2\right)\nu_3 = \frac{1}{4}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) - \frac{1}{2}\nu_1\nu_3 - \frac{3}{2}\nu_2\nu_3 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\nu_1^2 - 2\nu_1\nu_3 + \nu_3^2\right) - \frac{1}{4}\left(\nu_2^2 + 6\nu_2\nu_3 + 9\nu_3^2\right) + 2\nu_3^2 = \frac{1}{4}\left(\nu_1 - \nu_3\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\nu_2 + 3\nu_3\right)^2 + 2\nu_3^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\,\varkappa_1^2 - \frac{1}{4}\,\varkappa_2^2 + 2\varkappa_3^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_3^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3\right); \\ \mu_2 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3\right); \\ \mu_3 = \sqrt{2}\,\lambda_3 \end{cases} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}.$$

**Шаг 2.** Найдём матрицу замены переменных $\Gamma$:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

**Шаг 3.** Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = x+y; \\ \eta = x-y; \\ \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x+2y+z\right). \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi,\,\eta,\,\zeta) = u(x,\,y,\,z)$$

и найдём $u_x,\ u_y,\ u_{xy},\ u_{xz},\ u_{yz}$ как производные сложной функции $v\left(\xi(x,\,y,\,z),\ \eta(x,\,y,\,z),\ \zeta(x,\,y,\,z)\right)$:

$$u_x = v_\xi + v_\eta - \frac{\sqrt{2}}{2} v_\zeta, \qquad u_y = v_\xi - v_\eta + \sqrt{2} v_\zeta;$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}\cdot(-1) + v_{\eta\xi}\cdot 1 - v_{\eta\eta} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta}\cdot 2 + v_{\eta\zeta}\cdot 2\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\zeta\xi} - v_{\zeta\eta} + \sqrt{2}\,v_{\zeta\zeta}\right) \Rightarrow$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} + 3v_{\eta\zeta}\right);$$

$$u_{xz} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} + v_{\eta\zeta}\right) - \frac{1}{2} v_{\zeta\zeta};$$

$$u_{yz} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} - v_{\eta\zeta}\right) + v_{\zeta\zeta};$$

Подставляя найденный производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2}u_y = \left(v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} + 3v_{\eta\zeta}\right)\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} + v_{\eta\zeta}\right) - \frac{1}{2}v_{\zeta\zeta}\right) +$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} - v_{\eta\zeta}\right) + v_{\zeta\zeta}\right) + \left(v_\xi + v_\eta - \frac{\sqrt{2}}{2} v_\zeta\right) + \frac{1}{2}\left(v_\xi - v_\eta + \sqrt{2} v_\zeta\right) =$$

$$= v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2} v_\xi + \frac{1}{2} v_\eta.$$

**Ответ:** уравнение имеет гиперболический тип,

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2} v_\xi + \frac{1}{2} v_\eta = 0, \qquad \text{где}$$

$$\xi = x + y; \qquad \eta = x - y; \qquad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x + 2y + z\right).$$

*Замечание* 2.1. Поскольку преобразование, приводящее квадратичную форму к нормальному виду, определено неоднозначно, то и замена переменных, приводящая уравнение к каноническому виду, также определено неоднозначно, поэтому правильных ответов много. Но в любом случае разница между количеством «плюсов» и «минусов» при вторых проихводных не зависит от способа решения.

*Замечание* 2.2. Старшие коэффициенты уравнения в канонической форме совпадают с коэффициентами нормального вида квадратичной формы. Поэтому, строго говоря, можно было бы не вычислять и не подставлять $u_{xy},\ u_{xz},\ u_{yz}$ в исходное уравнение, а подставить туда лишь младшие производные $u_x,\ u_y$. Однако проделанная полностью подстановка помогает находить ошибки, допущенные на предыдущих шагах.

## 3. № 74

*Привести к каноническому виду уравнение:*

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0.$$

**Шаг 1.** Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (2\lambda_2)^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2; \\ \mu_2 = 2\lambda_2 \end{cases} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

**Шаг 2.** Найдём матрицу замены переменных $\Gamma$:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Шаг 3.** Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = x; \\ \eta = \frac{1}{2}\left(-x + y\right). \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi,\, \eta) = u(x,\, y)$$

и найдём $u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}$ как производные сложной функции $v\left(\xi(x,\, y),\ \eta(x,\, y)\right)$:

$$u_x = v_\xi - \frac{1}{2}\, v_\eta, \qquad u_y = \frac{1}{2}\, v_\eta;$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\, v_{\eta\eta}, \qquad u_{xy} = \frac{1}{2}\, v_{\xi\eta} - \frac{1}{4}\, v_{\eta\eta}, \qquad u_{yy} = \frac{1}{4}\, v_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденный производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = \left(v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\,v_{\eta\eta}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\,v_{\xi\eta} - \frac{1}{4}\,v_{\eta\eta}\right) + 5\left(\frac{1}{4}\,v_{\eta\eta}\right) - 32v = \\ = v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 32v.$$

**Ответ:** уравнение имеет эллиптический тип,

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 32v = 0, \qquad \text{где} \qquad \xi = x; \qquad \eta = \frac{1}{2}\,(-x+y)\,.$$

# 4. № 75

*Привести к каноническому виду уравнение:*

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0.$$

**Шаг 1.** Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \mu_1^2 + 0\cdot\mu_2^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 - \lambda_2; \\ \mu_2 = \lambda_2 \end{cases} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}.$$

(В качестве $\mu_2$ можно было взять любую линейную комбинацию $\lambda_1$ и $\lambda_2$, такую чтобы матрица замены переменных была невырождена.)

**Шаг 2.** Найдём матрицу замены переменных $\Gamma$:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

**Шаг 3.** Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = x; \\ \eta = x + y. \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi,\,\eta) = u(x,\,y)$$

и найдём $u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}$ как производные сложной функции $v\left(\xi(x,\,y),\ \eta(x,\,y)\right)$:

$$u_x = v_\xi + v_\eta, \qquad u_y = v_\eta;$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \qquad u_{xy} = v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \qquad u_{yy} = v_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденный производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = (v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) - 2\,(v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) + (v_{\eta\eta}) + 9\,(v_\xi + v_\eta) + 9\,(v_\eta) - 9v = \\ = v_{\xi\xi} + 9v_\xi + 18v_\eta - 9v.$$

**Ответ:** уравнение имеет параболический тип,

$$v_{\xi\xi} + 9v_\xi + 18v_\eta - 9v = 0, \qquad \text{где} \qquad \xi = x; \qquad \eta = x + y.$$

## 5. № 76

*Привести к каноническому виду уравнение:*

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0.$$

**<u>Шаг 1.</u>** Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \left(\frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_2; \\ \mu_2 = \frac{1}{2}\lambda_1 \end{cases} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}.$$

**<u>Шаг 2.</u>** Найдём матрицу замены переменных $\Gamma$:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = -2\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

**<u>Шаг 3.</u>** Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = y; \\ \eta = 2x - 3y. \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi,\, \eta) = u(x,\, y)$$

и найдём $u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}$ как производные сложной функции $v\left(\xi(x,\, y),\ \eta(x,\, y)\right)$:

$$u_x = 2v_\eta, \qquad u_y = v_\xi - 3v_\eta;$$

$$u_{xx} = 4v_{\eta\eta}, \qquad u_{xy} = 2v_{\xi\eta} - 6v_{\eta\eta}, \qquad u_{yy} = v_{\xi\xi} - 6v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденный производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$\begin{aligned} &2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = \\ &\quad = 2\left(4v_{\eta\eta}\right) + 3\left(2v_{\xi\eta} - 6v_{\eta\eta}\right) + \left(v_{\xi\xi} - 6v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta}\right) + 7\left(2v_\eta\right) + 4\left(v_\xi - 3v_\eta\right) - 2v = \\ &\qquad = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 4v_\xi + 2v_\eta - 2v. \end{aligned}$$

**<u>Ответ:</u>** уравнение имеет гиперболический тип,

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 4v_\xi + 2v_\eta - 2v = 0, \qquad \text{где} \qquad \xi = y; \qquad \eta = 2x - 3y.$$

# 6. № 77

*Привести к каноническому виду уравнение:*

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$$

**Шаг 1.** Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2 = \left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\lambda_2\right)^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2; \\ \mu_2 = \frac{3}{2}\lambda_2 \end{cases} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

**Шаг 2.** Найдём матрицу замены переменных Γ:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

**Шаг 3.** Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = x; \\ \eta = \frac{-x+2y}{3}. \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi,\, \eta) = u(x,\, y)$$

и найдём $u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}$ как производные сложной функции $v\left(\xi(x,\, y),\ \eta(x,\, y)\right)$:

$$u_x = v_\xi - \frac{1}{3}v_\eta, \qquad u_y = \frac{2}{3}v_\eta;$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} - \frac{2}{3}v_{\xi\eta} + \frac{1}{9}v_{\eta\eta}, \qquad u_{xy} = \frac{2}{3}v_{\xi\eta} - \frac{2}{9}v_{\eta\eta}, \qquad u_{yy} = \frac{4}{9}v_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденный производные (а также $\xi$ вместо $x$) в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$\begin{aligned} & u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = \\ & = \left(v_{\xi\xi} - \frac{2}{3}v_{\xi\eta} + \frac{1}{9}v_{\eta\eta}\right) - 2\left(\frac{2}{3}v_{\xi\eta} - \frac{2}{9}v_{\eta\eta}\right) - 2\left(\frac{4}{9}v_{\eta\eta}\right) - 3\left(v_\xi - \frac{1}{3}v_\eta\right) - 15\left(\frac{2}{3}v_\eta\right) + 27\xi = \\ & \qquad = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - 3v_\xi - 5v_\eta + 27\xi. \end{aligned}$$

**Ответ:** уравнение имеет гиперболический тип,

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - 3v_\xi - 5v_\eta + 27\xi = 0, \qquad \text{где} \qquad \xi = x; \qquad \eta = \frac{-x+2y}{3}.$$

 

# 7. Избавление от младших производных

В УЧП 2-го порядка с постоянными коэффициентами всегда можно избавиться от первых производных **при помощи замены**

$$v(\xi_1, \ldots, \xi_n) = w(\xi_1, \ldots, \xi_n) \cdot e^{a_1\xi_1+\ldots+a_n\xi_n}.$$

**Пример 7.1.** После приведения уравнения из № 77 к каноническому виду

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - 3v_\xi - 5v_\eta + 27\xi = 0,$$

сделаем замену:

$$v(\xi, \eta) = w(\xi, \eta) \cdot e^{a\xi+b\eta}, \qquad \text{откуда}$$

$$v_\xi = (w_\xi + aw) \cdot e^{a\xi+b\eta}, \qquad v_\eta = (w_\eta + bw) \cdot e^{a\xi+b\eta},$$

$$v_{\xi\xi} = \left(w_{\xi\xi} + 2aw_\xi + a^2 w\right) \cdot e^{a\xi+b\eta}, \qquad v_{\eta\eta} = \left(w_{\eta\eta} + 2aw_\eta + a^2 w\right) \cdot e^{a\xi+b\eta}.$$

Подставим эти выражения в левую часть уравнния:

$$\begin{aligned} & v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - 3v_\xi - 5v_\eta + 27\xi = \\ & \quad = \left[\left(w_{\xi\xi} + 2aw_\xi + a^2w\right) - \left(w_{\eta\eta} + 2bw_\eta + b^2w\right) - 3\left(w_\xi + aw\right) - 5\left(w_\eta + bw\right)\right] \cdot e^{a\xi+b\eta} + 27\xi = \\ & \quad\quad = \left[w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + (2a-3)\, w_\xi + (-2b-5)\, w_\eta + \left(a^2 - b^2 - 3a - 5b\right) w + 27\xi \cdot e^{-a\xi-b\eta}\right] \cdot e^{a\xi+b\eta}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем выбрать $a$ и $b$ так, чтобы скобки, умножаемые на $w_\xi$ и $w_\eta$ стали равны нулю:

$$a = \frac{3}{2}, \qquad b = -\frac{5}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad a^2 - b^2 - 3a - 5b = \frac{9 - 25 - 18 - 50}{4} = -\frac{84}{4} = -21.$$

После подстановки найденных $a$ и $b$ и сокращения на $e^{a\xi+b\eta}$ получим:

$$w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} - 21w + 27\xi \cdot e^{-\frac{3}{2}\xi+\frac{5}{2}\eta} = 0$$

# Задание на самостоятельную работу:

1) *Привести к каноническому виду уравнение*[1]*:*

$$4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_x + u_z = 0.$$

**Ответ:**

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + v_\eta = 0, \qquad \text{где} \qquad \xi = \frac{1}{2}x; \quad \eta = \frac{1}{2}x + y, \quad \zeta = -\frac{1}{2}x - y + z.$$

2) № 95: *Привести к каноническому виду уравнение:*

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$$

*и избавиться от младших производных.* **Ответ:**

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + \frac{19}{2}w = 0, \qquad \text{где} \qquad \xi = 2x + y; \quad \eta = x, \quad \zeta = -\frac{1}{2}x - y + z.$$

[1]Этот пример решён в методической разработке А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко, А.И. Прилепко «Классификация уравнений математической физики. Решение задач для уравнений эллиптического типа», стр. 15 – 17.

3) № 90*: *Привести к каноническому виду в каждой области, где сохраняется тип, уравнение*

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0.$$

**Ответ:**

$$\begin{cases} v_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi-\eta)}\left(v_\xi - v_\eta\right) = 0 & \text{в области} \quad x > 0, \quad \text{гиперболический тип;} \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta} v_\eta = 0 & \text{в области} \quad x < 0, \quad \text{эллиптический тип;} \\ u_{yy} = 0 & \text{в области} \quad x = 0, \quad \text{параболический тип.} \end{cases}$$