Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера

№ 370, 438, I, II, 385, 439, 445, 371, III, IV, 372, 446.

1. № 370

Найти общее решение уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{1.1}$$

Шаг 1. Находим замену переменных
Способ 1 (через уравнения характеристик) Дискриминант характеристической квадратичной формы в данном случае равен a^2:

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = a^2 > 0, \qquad \Rightarrow \qquad \text{гиперболический тип.}$$

Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, составим уравнения характеристик $\frac{dx}{dt} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$:

$$\frac{dx}{dt} = \pm a, \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm at,$$

и первые интегралы имеют вид:

$$x + at = c, \qquad x - at = c.$$

Поэтому заменой, приводящей уравнние (1.1) к каноническому виду, является замена:

$$\begin{cases} \xi = x + at; \\ \eta = x - at. \end{cases} \tag{1.2}$$

Способ 2 (через характеристическую квадратичную форму) В данном случае нам удобнее (и это верно всегда для уравнения гиперболического типа на прямой, если мы хотим явно найти решение) привести квадратичную форму не к обычному её нормальному виду, а к виду $\tilde{Q} = \mu_1\mu_2$. Произведём необходимые преобразования:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 - a^2\lambda_2^2 = \Big[\text{как разность квадратов}\Big] = (\lambda_1 + a\lambda_2)(\lambda_1 - a\lambda_2) = \mu_1\mu_2,$$

где $\mu_{1,2}$ связаны с $\lambda_{1,2}$ по правилу

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Построим матрицу Γ замены переменных:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = \frac{1}{-2a} \begin{pmatrix} -a & -1 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2a} \end{pmatrix}$$

Откуда, учитывая, что λ_1 у нас соответствует производной по t, а λ_2 – по x, получаем, что замену переменных надо произвести по правилу:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2a}(x + at); \\ \eta = \frac{1}{2a}(x - at). \end{cases}$$

Итак, оба способа приводят нас к необходимости одной и той же замены (1.2) (с точностью до числового множителя).

Шаг 2. Приведение к каноническому виду

Пусть $v(\xi,\,\eta)=u(x,\,t)$. Замена (1.2) даёт нам следующие соотношения для производных:

$$u_x = v_\xi + v_\eta, \qquad u_t = a\left(v_\xi - v_\eta\right),$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \qquad u_{tt} = a^2\left(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right).$$

Подставив их в уравнение (1.1), получаем:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = a^2\left(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) - a^2\left(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) = 0,$$

или, после сокращения,

$$v_{\xi\eta} = 0. \tag{1.3}$$

Шаг 3. Решение уравнения

Уравнение (1.3) решить легко. В самом деле, раз производная по η от функции двух переменных $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ равна нулю, то $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ не зависит от η, то есть:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = h(\xi).$$

Проинтегрируем последнее равенство по ξ и учтём, что вместо константы интегрирования надо поставить произвольную функцию от η, так как дифференцирование по ξ любую $f_2(\eta)$ обратит в нуль.

$$v(\xi,\,\eta) = \underbrace{\int h(\xi)d\xi}_{=f_1(\xi)} + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Переходя к исходным переменным, получаем:

$$u(x,\,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at), \tag{1.4}$$

где $f_{1,2}$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Геометрический смысл равенства (1.4).

Пусть $f_2 \equiv 0$. Тогда в момент времени $t=0$ профиль струны задаётся равенством

$$u(x,\,0) = f_1(x),$$

в момент времени $t=1$ – равенством

$$u(x,\,1) = f_1(x+a),$$

то есть график f_1 к моменту $t=1$ сдвинулся влево на величину a, и так далее.

Если же, наоборот, $f_1 \equiv 0$. Тогда в момент времени $t=0$ профиль струны задаётся равенством

$$u(x,\,0) = f_2(x),$$

в момент времени $t=1$ – равенством

$$u(x,\,1) = f_2(x-a),$$

то есть график f_2 к моменту $t=1$ сдвинулся вправо на величину a, и так далее.

Вывод: Решение уравнения колебаний (1.1) представляет собой сумму двух волн, бегущих влево и вправо со скоростью a:

$$u(x,\,t) = \underbrace{f_1(x+at)}_{\longleftarrow} + \underbrace{f_2(x-at)}_{\longrightarrow}.$$

2. Формула Даламбера

Рассмотрим задачу Коши на прямой для простейшего случая волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x \in (-\infty,\, +\infty), \quad t \in (0,\, +\infty); \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \in (-\infty,\, +\infty); \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \in (-\infty,\, +\infty). \end{cases} \tag{2.1}$$

Теорема 2.1.

Усл. *Функции* $f(x,\, t) \in C\left((-\infty,\, +\infty) \times [0,\, +\infty)\right)$, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C(-\infty,\, +\infty)$.

Утв. *Решение задачи Коши* (2.1) *задаётся* ***формулой Даламбера****:*

$$u(x,\, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\, \tau) ds d\tau. \tag{2.2}$$

Доказательство. Полное доказательство мы приведём позже, в теме «Применение преобразования Фурье к решению уравнений математической физики», № 815, 816. Кроме того, его можно получить элементарной подстановкой формулы Даламбера в равенства (2.1)[1]. А здесь ограничимся случаем

$$f(x,\, t) \equiv 0.$$

Итак: мы убедились, что всякое решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ представляется в виде

$$u(x,\, t) = f_1(x+at) + f_2(x-at). \tag{1.4}$$

Подставим в это равенство начальное условие:

$$\begin{cases} u(x,\, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x); \\ u_t(x,\, 0) = a\left(f_1'(x) - f_2'(x)\right) = \psi(x). \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f_1(y) + f_2(y) = \varphi(y); \\ f_1(y) - f_2(y) = \frac{1}{a}\int\limits_0^y \psi(s) ds + 2c. \end{cases}$$

Найдя полусумму и полуразность этих равенств, получим:

$$\begin{cases} f_1(y) = \frac{\varphi(y)}{2} + \frac{1}{a}\int\limits_0^y \psi(s) ds + c; \\ f_2(y) = \frac{\varphi(y)}{2} - \frac{1}{a}\int\limits_0^y \psi(s) ds - c. \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} f_1(x+at) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} \psi(s) ds + c; \\ f_2(x-at) = \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at} \psi(s) ds - c. \end{cases}$$

[1] Заметим, что такой способ позволит убедиться лишь в том, что существует решение (2.1), задаваемое формулой (2.2). Но он не гарантирует, что нет других решений, задаваемых какими-то другими формулами.

Наконец, подставим $f_{1,2}$ в формулу (1.4):

$$u(x,\,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)=\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(s)ds+c+\frac{\varphi(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at}\psi(s)ds-c=$$

$$=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\underbrace{\frac{1}{2a}\left(\int\limits_0^{x+at}\psi(s)ds-\int\limits_0^{x-at}\psi(s)ds\right)}_{\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds}+c-c=$$

$$=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds.$$

$\square$

3. № 438^M

Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\beta x^2, & x\in(-\infty,\,+\infty),\quad t\in(0,\,+\infty);\\ u(x,\,0)=e^{-x}, & x\in(-\infty,\,+\infty);\\ u_t(x,\,0)=\gamma, & x\in(-\infty,\,+\infty).\end{cases}\tag{3.1}$$

Чтобы найти решение, нам достаточно применить формулу Даламбера. Вычислим сначала самый сложный входящий в неё интеграл:

$$\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\,\tau)dsd\tau=\frac{\beta}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}s^2dsd\tau=$$

$$=\frac{\beta}{2a}\int\limits_0^t\left.\frac{s^3}{3}\right|_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}d\tau=\frac{\beta}{6a}\int\limits_0^t\left((x+a(t-\tau))^3-(x-a(t-\tau))^3\right)d\tau=$$

$$=\frac{\beta}{6a}\int\limits_0^t\Big(\left(x^3+3x^2(t-\tau)+3x(t-\tau)^2+(t-\tau)^3\right)-\left(x^3-3x^2(t-\tau)+3x(t-\tau)^2-(t-\tau)^3\right)\Big)d\tau=$$

$$=\frac{\beta}{6a}\int\limits_0^t\left(6x^2(t-\tau)+2(t-\tau)^3\right)d\tau=\Big[\tau-t=p,\quad d\tau=dp\Big]=$$

$$=\frac{\beta}{6a}\int\limits_{-t}^0\left(6x^2(-p)+2p^3\right)dp=\frac{\beta}{6a}\left(-6x^2\left.\frac{p^2}{2}\right|_{p=-t}^{p=0}+2\left.\frac{p^4}{4}\right|_{p=-t}^{p=0}\right)=\frac{\beta}{12a}\left(6x^2t^2+t^4\right).$$

Тогда, из формулы Даламбера получаем:

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\,\tau)dsd\tau =$$

$$= \frac{e^{-x-at}+e^{-x+at}}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\gamma ds + \frac{\beta}{12a}\left(6x^2t^2+t^4\right) =$$

$$= e^{-x}\cdot\frac{e^{-at}+e^{+at}}{2} + \frac{\gamma}{2a}\Big((x+at)-(x-at)\Big) + \frac{\beta}{12a}\left(6x^2t^2+t^4\right) =$$

$$= e^{-x}\operatorname{ch}at + \gamma t + \frac{\beta}{12a}\left(6x^2t^2+t^4\right).$$

4. № I

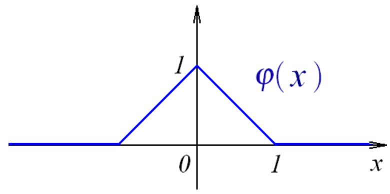
Нарисовать профиль бесконечной струны в моменты времени $t = \frac{1}{4a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{3}{4a},\ \frac{1}{a},\ \frac{2}{a}$, *если её колебания описываются задачей Коши:*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x\in(-\infty,\,+\infty), \quad t\in(0,\,+\infty); \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x\in(-\infty,\,+\infty); \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x\in(-\infty,\,+\infty), \end{cases} \tag{4.1}$$

где функция

$$\psi(x)\equiv 0,$$

а функция $\varphi(x)$ *имеет вид, приведённый на рисунке.*

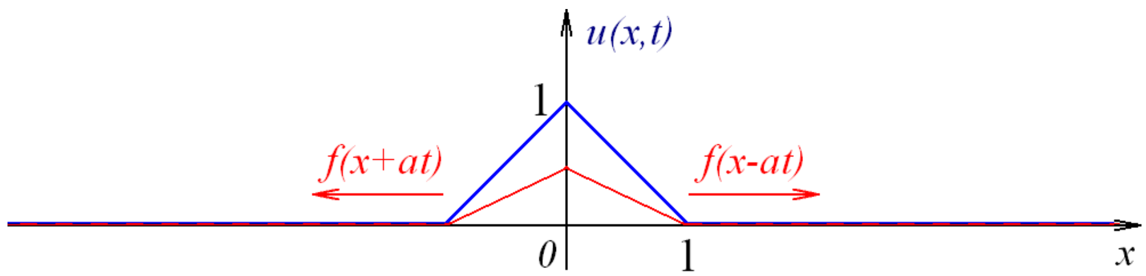


Решение: По формуле Даламбера (2.2) при $f\equiv 0$ и $\psi(x)\equiv 0$ получаем:

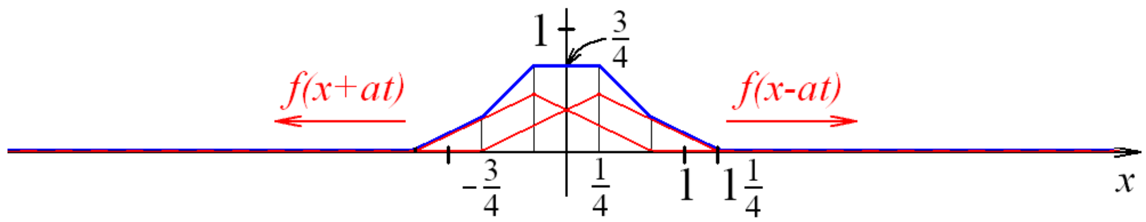
$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}$$

Отсюда можно сделать вывод, что функция $u(x,\,t)$ есть сумма двух волн одинакового профиля $f = \frac{\varphi}{2}$, одна из которых бежит влево, а другая вправо. Тогда

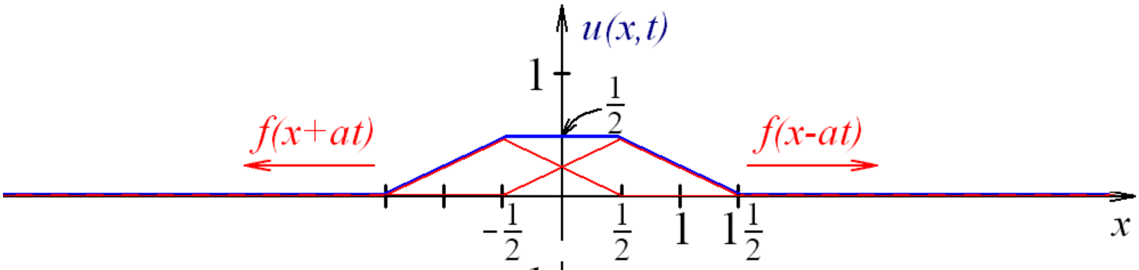
при $t=0$:



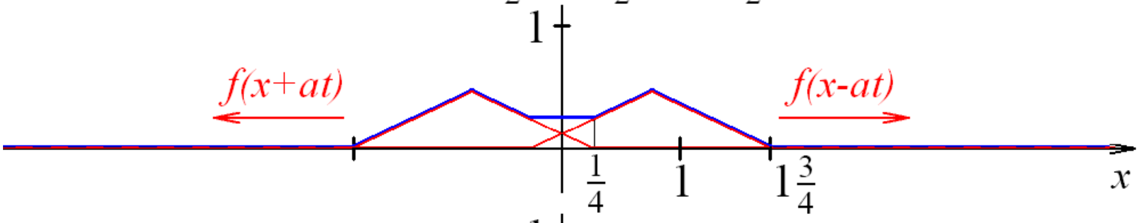
при $t=\frac{1}{4a}$:



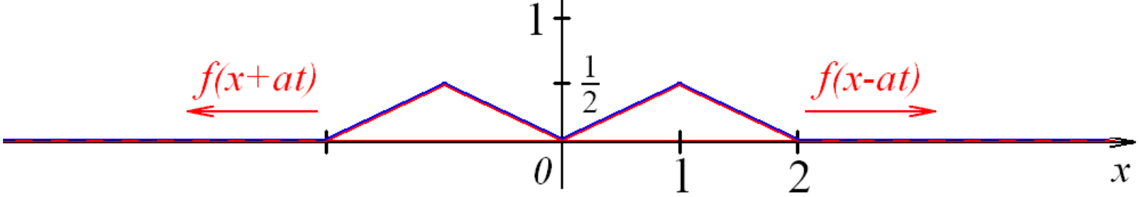
при $t = \frac{1}{2a}$:



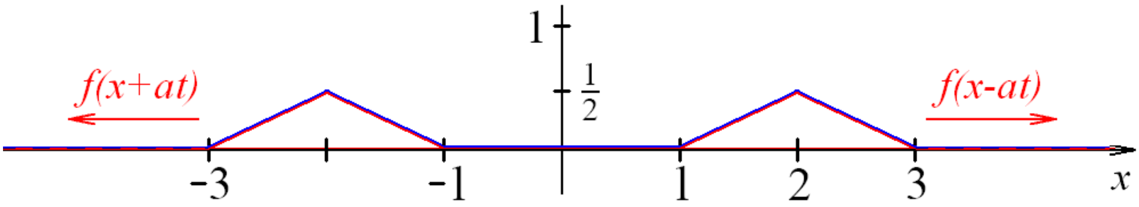
при $t = \frac{3}{4a}$:



при $t = \frac{1}{a}$:



при $t = \frac{2}{a}$:



5. № II

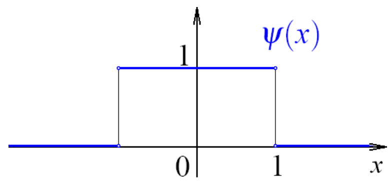
Нарисовать профиль бесконечной струны в моменты времени $t = \frac{1}{4a}, \frac{1}{2a}, \frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \frac{3}{a}$, *если её колебания описываются задачей Коши:*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty,\ +\infty), \quad t \in (0,\ +\infty); \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ u_t(x,\ 0) = \psi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty), \end{cases} \tag{5.1}$$

где функция

$$\varphi(x) \equiv 0,$$

а функция $\psi(x)$ *имеет вид, приведённый на рисунке.*



Решение: По формуле Даламбера (2.2) при $f \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$ получаем:

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds = \Psi(x+at) - \Psi(x-at),$$

где $\Psi(y)$ – некоторая первообразная функции $\frac{\psi(x)}{2a}$, например, функция

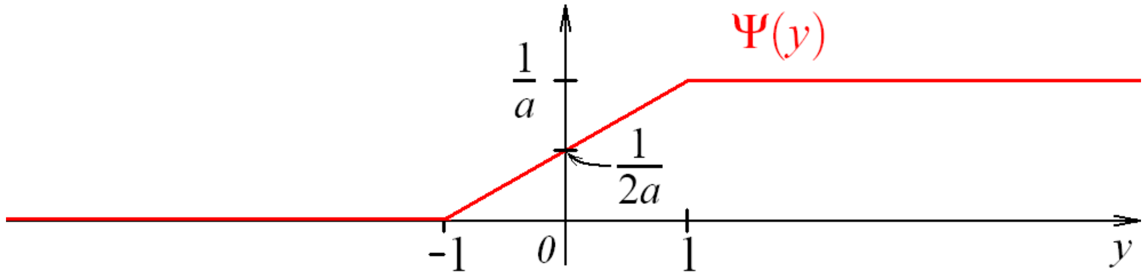
$$\Psi(y) = \frac{1}{2a} \int\limits_{-1}^{y} \psi(s)ds.$$

(В качестве нижнего предела мы взяли (-1), поскольку все изменения с функцией $\psi(x)$ происходят только справа от этого числа.)

Отсюда можно сделать вывод, что функция $u(x,\,t)$ есть разность двух волн одинакового профиля Ψ, одна из которых бежит влево, а другая вправо. Причём из волны, бегущей влево, вычитается волна, бегущая вправо. Найдём $\Psi(y)$ для нашего случая:

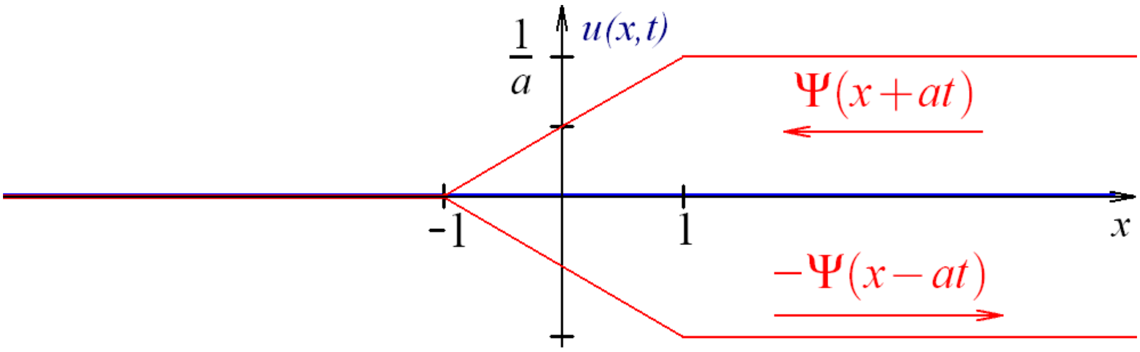
$$\Psi(y) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-1}^{y}\psi(s)ds = \begin{cases} 0, & \text{когда} \quad y \in (-\infty,\ -1]; \\ \frac{y+1}{2a}, & \text{когда} \quad y \in [-1,\ 1]; \\ \frac{1}{a}, & \text{когда} \quad y \in [1,\ +\infty). \end{cases}$$

График этой функции выглядит так:

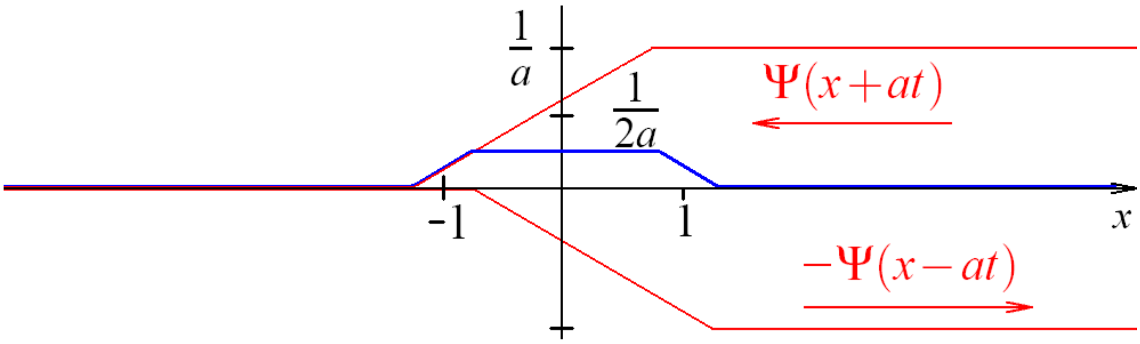


Поэтому профиль струны будет принимать в различные моменты времени форму:

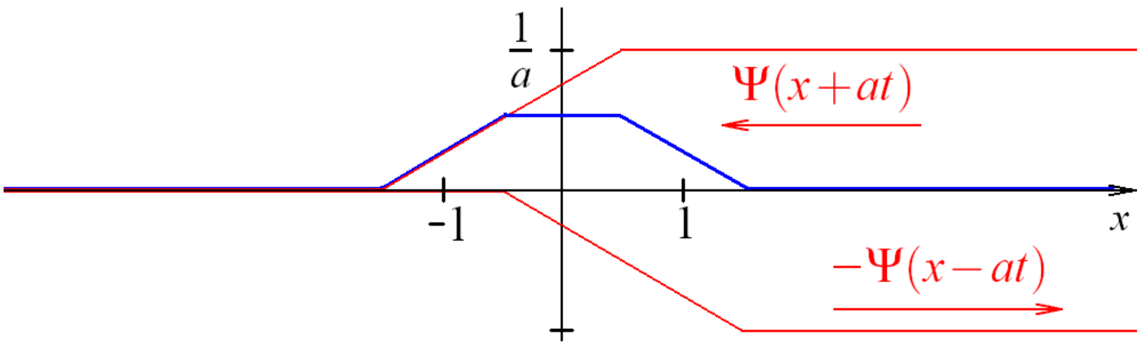
при $t = 0$:



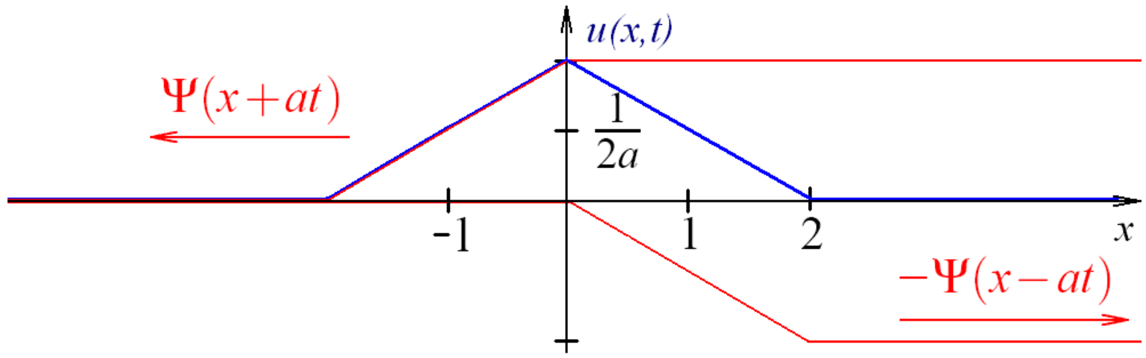
при $t = \frac{1}{4a}$:



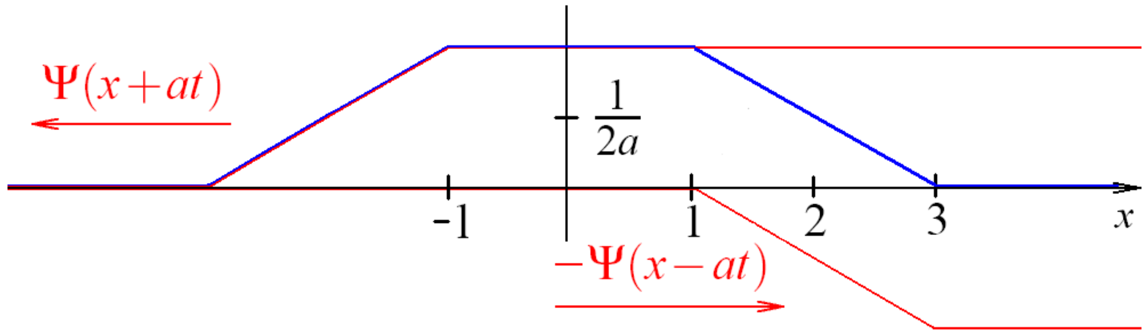
при $t = \frac{1}{2a}$:



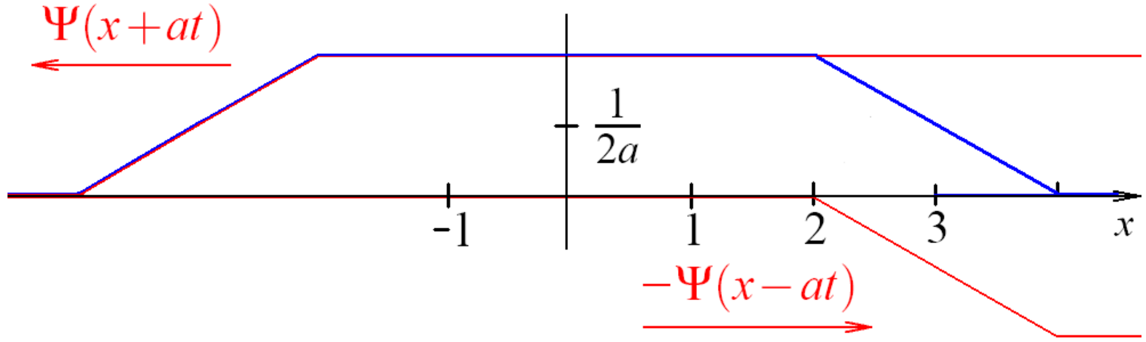
при $t = \frac{1}{a}$:



при $t = \frac{2}{a}$:



при $t = \frac{3}{a}$:



6. № 385

Найти решение задачи:

$$\begin{cases} u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0, & x \in (0,\ +\infty), \quad y \in (-\infty,\ +\infty); \\ u(0,\ y) = \varphi(y), & y \in (-\infty,\ +\infty); \\ u_x(0,\ y) = \psi(y), & y \in (-\infty,\ +\infty). \end{cases} \tag{6.1}$$

Прежде чем решать эту задачу, заметим, что если переименовать переменную x в t, а y – в x, то получится обычная задача Коши для УЧП 2-го порядка.

Шаг 1. Находим замену переменных

Способ 1 (через уравнения характеристик) Дискриминант характеристической квадратичной формы в данном случае равен a^2:

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (-1)^2 - 1 \cdot 0 = 1 > 0, \qquad \Rightarrow \qquad \text{гиперболический тип.}$$

Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, составим уравнения характеристик $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$:

$$\frac{dy}{dx} = -1 \pm 1 = \left[\begin{array}{l} 0, \\ -2, \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = c, \\ y = -2x + c, \end{array} \right.$$

и первые интегралы имеют вид:

$$y = c, \qquad y + 2x = c.$$

Поэтому заменой, приводящей уравнние (6.1) к каноническому виду, является замена:

$$\begin{cases} \xi = y; \\ \eta = y + 2x. \end{cases} \tag{6.2}$$

Способ 2 (через характеристическую квадратичную форму) В данном случае нам удобнее (как всегда для уравнения гиперболического типа на прямой) привести квадратичную форму не к обычному её нормальному виду, а к виду $\tilde{Q} = \mu_1\mu_2$. Произведём необходимые преобразования:

$$Q(\lambda_1,\, \lambda_2) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = (\lambda_1 - 2\lambda_2)\lambda_1 = \mu_1\mu_2,$$

где $\mu_{1,2}$ связаны с $\lambda_{1,2}$ по правилу

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Построим матрицу Γ замены переменных:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Откуда, учитывая, что λ_1 у нас соответствует производной <u>по x</u>, а λ_2 – <u>по y</u>, получаем, что замену переменных надо произвести по правилу:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = -\frac{1}{2}\cdot y; \\ \eta = \frac{1}{2}(2x + y). \end{cases}$$

Итак, оба способа приводят нас к необходимости одной и той же замены (6.2) (с точностью до числового множителя).

<u>Шаг 2.</u> Приведение к каноническому виду

Пусть $v(\xi,\, \eta) = u(x,\, t)$. Замена (6.2) даёт нам следующие соотношения для производных:

$$u_x = 2v_\eta, \qquad u_y = v_\xi + v_\eta,$$

$$u_{xx} = 4v_{\eta\eta}, \qquad u_{xy} = 2\left(v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right).$$

Подставив их в уравнение (6.1), получаем:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 4v_{\eta\eta} - 2\cdot 2\left(v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) + 4e^\xi = 0,$$

или, после сокращения,

$$v_{\xi\eta} = e^\xi. \tag{6.3}$$

<u>Шаг 3.</u> Решение уравнения

Уравнение (6.3) решить легко – достаточно проинтегрировать его по ξ и η. Сначала интегрируем по η:

$$v_\xi = \eta\cdot e^\xi + h(\xi).$$

(Напомним, что функция $h(\xi)$ появилась вместо и в качестве константы интегрирования.) Теперь проинтегрируем последнее равенство по ξ и учтём, что вместо константы интегрирования надо поставить произвольную функцию от η:

$$v(\xi,\, \eta) = \eta\cdot e^\xi + \underbrace{\int h(\xi)d\xi}_{=f_1(\xi)} + f_2(\eta) = \eta\cdot e^\xi + f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Переходя к исходным переменным, получаем:

$$u(x,\,t) = (y+2x)\cdot e^y + f_1(y) + f_2(y+2x), \tag{6.4}$$

где $f_{1,2}$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

<u>Шаг 4.</u> Использование начальных условий

Подставляя общее решение (6.4) уравнения в начальные условия, получаем:

$$\begin{cases} u(0,\,y) = \varphi(y), \\ u_x(0,\,y) = \psi(y), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ye^y + f_1(y) + f_2(y) = \varphi(y), \\ 2e^y + 2f_2'(y) = \psi(y). \end{cases}$$

Из последнего уравнения сразу находится $f_2(s)$:

$$f_2(s) = \int\limits_0^s \left(\frac{1}{2}\psi(y) - e^y\right)dy + c = \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_0^s \psi(y)dy}_{\Psi(s)} - e^y\Big|_0^s + c_1 = \frac{1}{2}\Psi(s) - e^s + 1 + c_1 =$$

$$= \Big[c = c_1 + 1\Big] = \frac{1}{2}\Psi(s) - e^s + c.$$

Подставляя найденную функцию $f_2(s) = \frac{1}{2}\Psi(s) - e^s + c$, в первое начальное условие, найдём $f_1(s)$:

$$f_1(s) = \varphi(s) - \frac{1}{2}\Psi(s) + e^s - c - se^s = \varphi(s) - \frac{1}{2}\Psi(s) + (1-s)e^s - c.$$

Осталось подставить

$$f_1(s) = \varphi(s) - \frac{1}{2}\Psi(s) + (1-s)e^s - c \qquad \text{и} \qquad f_2(s) = \frac{1}{2}\Psi(s) - e^s + c$$

в формулу общего решения (6.4).

$$\begin{aligned} u(x,\,t) &= (y+2x)\cdot e^y + f_1(y) + f_2(y+2x) = \\ &= (y+2x)\cdot e^y + \varphi(y) - \frac{1}{2}\Psi(y) + (1-y)e^y - c + \frac{1}{2}\Psi(y+2x) - e^{y+2x} + c = \\ &= (2x+1)\cdot e^y - e^{y+2x} + \varphi(y) + \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{y+2x}\psi(y)dy - \int\limits_0^{y}\psi(y)dy\right) = \\ &= (2x+1)\cdot e^y - e^{y+2x} + \varphi(y) + \frac{1}{2}\int\limits_y^{y+2x}\psi(y)dy. \end{aligned}$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,t) = (2x+1)\cdot e^y - e^{y+2x} + \varphi(y) + \frac{1}{2}\int\limits_y^{y+2x}\psi(y)dy.$$

Задание на самостоятельную работу:

1) **№ 349.** *Пользуясь формулой Даламбера, найти решение задачи Коши:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \alpha x t, & x \in (-\infty,\ +\infty), \quad t \in (0,\ +\infty); \\ u(x,\ 0) = x, & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ u_t(x,\ 0) = \sin x, & x \in (-\infty,\ +\infty). \end{cases}$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\ t) = x + \sin x \sin t + \frac{\alpha}{6} x t^3.$$

2) **№ 445.** *Доказать что в случае, когда* $f(x,\ t) \equiv 0$

а) из нечётности $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ и $\psi(-x) = -\psi(x)$ функций φ и ψ следует, что $u(0,\ t) = 0$;

б) из чётности $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и $\psi(-x) = \psi(x)$ функций φ и ψ следует, что $u_x(0,\ t) = 0$.

3) **№ 371.** *Найти общее решение уравнения:*

$$2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$$

<u>Ответ:</u> $u(x,\ t) = f_1(3x + 2y) + f_2(x + y)$, где $f_{1,2}$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

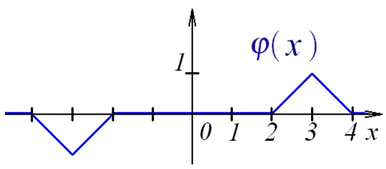
4) **III.** *Нарисовать профиль бесконечной струны в моменты времени* $t = 0,\ \frac{1}{4a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{9}{4a},\ \frac{3}{a},\ \frac{5}{a}$, *если её колебания описываются задачей Коши:*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty,\ +\infty), \quad t \in (0,\ +\infty); \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ u_t(x,\ 0) = \psi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty), \end{cases} \tag{6.5}$$

где функция

$$\psi(x) \equiv 0,$$

а функция $\varphi(x)$ *имеет вид, приведённый на рисунке.*



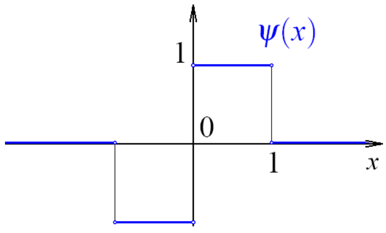
5) **IV.** *Нарисовать профиль бесконечной струны в моменты времени* $t = 0,\ \frac{1}{4a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{1}{a},\ \frac{2}{a},\ \frac{4}{a}$, *если её колебания описываются задачей Коши:*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty,\ +\infty), \quad t \in (0,\ +\infty); \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ u_t(x,\ 0) = \psi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty), \end{cases} \tag{6.6}$$

где функция

$$\varphi(x) \equiv 0,$$

а функция $\psi(x)$ *имеет вид, приведённый на рисунке.*



6) **№ 446.** *Доказать что в случае, когда* $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$

а) из нечётности $f(-x,\ t) = -f(x,\ t)$ функции f по x следует, что $u(0,\ t) = 0$;

б) из чётности $f(-x,\,t) = f(x,\,t)$ функции f по x следует, что $u_x(0,\,t) = 0$.

7) **№ 372.** *Найти общее решение уравнения:*

$$2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0.$$

<u>Ответ:</u> $u(x,\,t) = f_1(y-x) + f_2(2x-y)e^{\frac{x-y}{2}}$, где $f_{1,2}$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.