

Уравнение теплопроводности на прямой и полупрямой

№ 582, 586, 588, 574, 581, 583, 585, 587, 584.

1. Формула Пуассона

В n -мерном Евклидовом пространстве $E_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$ рассмотрим задачу Коши для простейшего случая уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(x, t), & x \in E_n, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in E_n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Опр. 1.1. Её решение задаётся **формулой Пуассона**:

$$u(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{E_n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{E_n} \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (1.2)$$

где $|x - \xi|^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \xi_k)^2$.

В частном случае, когда $n = 1$, формула Пуассона принимает вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (1.3)$$

2. № 582

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода (условие теплоизолированного конца):

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0; \\ v(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (2.2)$$

где функция $\varphi_1(x)$ построена по функции $\varphi(x)$ её **чётным продолжением** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при } x \geq 0; \\ \varphi(-x), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (2.2), то:

1) из первого равенства (2.2) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0, \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0;$$

2) из второго равенства (2.2) следует, что

$$v(x, 0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x, t)$ вспомогательной задачи (2.2) справедливо соотношение

$$v_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $f \equiv 0$:

$$v(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \varphi_1(\xi) d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

Тогда

$$v_x(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left[\left(-\frac{2(x-\xi)}{4a^2t} \right) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + \left(-\frac{2(x+\xi)}{4a^2t} \right) \cdot e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] \cdot \varphi_1(\xi) d\xi,$$

откуда для $v_x(0, t)$ получаем:

$$v_x(0, t) = \frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(\xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} - \xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} \right)}_{=0} \cdot \varphi(\xi) d\xi = 0.$$

Таким образом, найденная функция $v(x, t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2v_{xx} = 0$ и $v(x, 0) = \varphi(x)$, краевому условию

$$v_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x, t)$ вспомогательной задачи (2.2) является также решением задачи (2.1) на полупрямой¹:**

$$u(x, t) \equiv v(x, t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

3. № 586

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = f(x, t), & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2v_{xx} = f_1(x, t), & x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0; \\ v(x, 0) = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (3.2)$$

¹То, что другого решения у задачи (2.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

где функция $f_1(x, t)$ построена по функции $f(x, t)$ её чётным продолжением на всю числовую ось:

$$f_1(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{при } x \geq 0; \\ f(-x, t), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (3.2), то:

1) из первого равенства (3.2) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x, t) \equiv f(x, t), \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0;$$

2) из второго равенства (3.2) следует, что

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in (0, +\infty), \quad t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x, t)$ вспомогательной задачи (3.2) справедливо соотношение

$$v_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $\varphi(x) \equiv 0$:

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3.4)$$

Тогда

$$v_x(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{-2}{4a^2(t-\tau)} \cdot \frac{(x-\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + (x+\xi)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

откуда для $v_x(0, t)$ получаем:

$$v_x(0, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{-2}{4a^2(t-\tau)} \cdot \overbrace{\frac{-\xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} + \xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}}_{=0} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau = 0.$$

Таким образом, найденная функция $v(x, t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x, t)$ и $v(x, 0) = 0$, ещё и краевому условию

$$v_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x, t)$ вспомогательной задачи (3.2) является также решением задачи (3.1) на полупрямой²:**

Ответ:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

²То, что другого решения у задачи (3.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

4. № 588

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Шаг 1. Избавление от младшего слагаемого

Чтобы избавиться от слагаемого hu , которое отличает данную задачу от уже решённой в № 586, сделаем замену:

$$w(x, t) = u(x, t) \cdot e^{ht} \quad \implies \quad w_t = (u_t + hu) \cdot e^{ht}. \quad (4.2)$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x, t)$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = f(x, t) \cdot e^{ht}.$$

Таким образом, введённая функция $w(x, t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f_1(x, t) \equiv f(x, t) \cdot e^{ht}, & x > 0, t > 0; \\ w(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ w_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Шаг 2. Решение полученной задачи

Решение этой задачи мы получили в № 586. Воспользуемся результатом:

$$w(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \underbrace{f_1(\xi, \tau)}_{f(\xi, \tau) \cdot e^{h\tau}} d\xi d\tau.$$

Возвращаясь к функции $u(x, t) = w(x, t) \cdot e^{-ht}$, получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) \cdot e^{-h(t-\tau)} d\xi d\tau.$$

5. № 574^M

Показать, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi, \quad (5.1)$$

где $\varphi(x)$ – непрерывная ограниченная на \mathbb{R} функция, является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Шаг 1. Формальное дифференцирование (5.1)

Найдём формально (то есть не задумываясь над правомощностью этих действий) производные от функции $u(x, t)$, входящие в уравнение (5.1).

$$u_t = -\frac{1}{4a\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi} t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t^2} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi;$$

далее, так как

$$\frac{d}{dx} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} = -\frac{2(x-\xi)}{4a^2t} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}, \quad \frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} = \left(-\frac{1}{2a^2t} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^4t^2}\right) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},$$

то для u_{xx} получаем выражение

$$u_{xx} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2a^2t} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^4t^2}\right) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

Шаг 2. Подстановка формальных производных в уравнение теплопроводности

Подставив найденные формальные производные u_t и u_{xx} в уравнение $u_t - a^2u_{xx} = 0$, видим, что окрашенные одинаково слагаемые друг друга сокращают, и уравнение превращается в верное тождество:

$$\begin{aligned} u_t - a^2u_{xx} = & -\frac{1}{4a\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi - \\ & - a^2 \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2a^2t} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^4t^2}\right) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi \equiv 0. \end{aligned}$$

Шаг 3. Формальная подстановка решения в начальное условие

Функция $u(x, t)$, заданная формулой (5.1), не определена при $t = 0$. Однако, её можно доопределить в начальный момент времени по непрерывности, то есть считать её равной в момент $t = 0$ её пределу при $t \rightarrow 0 + 0$:

$$\begin{aligned} u(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0+0} u(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow 0+0} \left(\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\right) \cdot \varphi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot \varphi(\xi) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы убедились, что формула (5.1) действительно задаёт решение задачи (5.2), если все формальные действия Шагов 1 и 3 являются правомощными.

Шаг 4. Обоснование правомощности формальных действий

Поскольку все интегралы, участвующие в наших формальных операциях, являются равномерно по параметрам x и t сходящимися в любом замкнутом прямоугольнике $(x, t) \in [x_1, x_2] \times [0, T]^3$, их можно в этом прямоугольнике дифференцировать по параметру и переходить к пределу по параметру.

А равномерная сходимостъ этих интегралов легко показать по признаку Вейерштрасса, например,

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi$$

в силу ограниченности $|\varphi(\xi)| \leq M$, можно мажорировать интегралом

$$\frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi,$$

³Предполагается, что эти интегралы доопределены при $t = 0$ нулём.

сходимость которого легко проверить:

$$\begin{aligned} \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi &= \left[\begin{array}{l} y = \frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}, \\ dy = \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} \end{array} \right] = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \\ &= \left[\text{как интеграл Эйлера – Пуассона} \right] = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{M}{2}. \end{aligned}$$

Итак, все проделанные на шагах 1–3 формальные действия мы действительно имели право делать.

6. № 581

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), t > 0; \\ v(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (6.2)$$

где функция $\varphi_1(x)$ построена по функции $\varphi(x)$ её нечётным продолжением на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при } x \geq 0; \\ -\varphi(-x), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (6.2), то:

1) из первого равенства (6.2) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0, \quad x \in (0, +\infty), t > 0;$$

2) из второго равенства (6.2) следует, что

$$v(x, 0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \quad x \in (0, +\infty), t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x, t)$ вспомогательной задачи (6.2) справедливо соотношение

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $f \equiv 0$:

$$v(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \varphi_1(\xi) d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

Тогда для $v(0, t)$ получаем:

$$v(0, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} \right)}_{=0} \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

Таким образом, найденная функция $v(x, t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = 0$ и $v(x, 0) = \varphi(x)$, краевому условию

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x, t)$ вспомогательной задачи (6.2) является также решением задачи (6.1) на полупрямой⁴:**

$$u(x, t) \equiv v(x, t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

7. № 583

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Шаг 1. Избавление от младшего слагаемого

Чтобы избавиться от слагаемого hu , которое отличает данную задачу от уже решённой в № 581, сделаем замену:

$$w(x, t) = u(x, t) \cdot e^{ht} \quad \implies \quad w_t = (u_t + hu) \cdot e^{ht}. \quad (7.2)$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = 0.$$

Таким образом, введённая функция $w(x, t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ w(x, 0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x) \cdot e^{h \cdot 0}, & x \geq 0; \\ w(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Шаг 2. Решение полученной задачи

Решение этой задачи мы получили в № 581. Воспользуемся результатом:

$$w(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \underbrace{\varphi_1(\xi)}_{=\varphi(\xi)} d\xi.$$

Возвращаясь к функции $u(x, t) = w(x, t) \cdot e^{-ht}$, получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

⁴То, что другого решения у задачи (6.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

8. № 585

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности :

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x, t), & x \in (-\infty, +\infty), t > 0; \\ v(x, 0) = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (8.2)$$

где функция $f_1(x, t)$ построена по функции $f(x, t)$ её нечётным продолжением на всю числовую ось:

$$f_1(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{при } x \geq 0; \\ -f(-x, t), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (8.3)$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (8.2), то:

1) из первого равенства (8.2) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x, t) \equiv f(x, t), \quad x \in (0, +\infty), t > 0;$$

2) из второго равенства (8.2) следует, что

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in (0, +\infty), t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x, t)$ вспомогательной задачи (8.2) справедливо соотношение

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $\varphi(x) \equiv 0$:

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (8.4)$$

Тогда для $v(0, t)$ получаем:

$$v(0, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \overbrace{\frac{e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}}_{=0} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau = 0.$$

Таким образом, найденная функция $v(x, t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x, t)$ и $v(x, 0) = 0$, ещё и краевому условию

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x, t)$ вспомогательной задачи (8.2) является также решением задачи (8.1) на полупрямой⁵:**

Ответ:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

⁵То, что другого решения у задачи (8.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

9. № 587

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x, t), & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Шаг 1. Избавление от младшего слагаемого

Чтобы избавиться от слагаемого hu , которое отличает данную задачу от уже решённой в № 585, сделаем замену:

$$w(x, t) = u(x, t) \cdot e^{ht} \quad \Longrightarrow \quad w_t = (u_t + hu) \cdot e^{ht}. \quad (9.2)$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x, t)$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = f(x, t) \cdot e^{ht}.$$

Таким образом, введённая функция $w(x, t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f_1(x, t) \equiv f(x, t) \cdot e^{ht}, & x > 0, t > 0; \\ w(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ w(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

Шаг 2. Решение полученной задачи

Решение этой задачи мы получили в № 585. Воспользуемся результатом:

$$w(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \underbrace{f_1(\xi, \tau)}_{f(\xi, \tau) \cdot e^{h\tau}} d\xi d\tau.$$

Возвращаясь к функции $u(x, t) = w(x, t) \cdot e^{-ht}$, получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi, \tau) \cdot e^{-h(t-\tau)} d\xi d\tau.$$

10. № 584

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0, & x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (10.1)$$

Шаг 1. Избавление от младшего слагаемого

Чтобы избавиться от слагаемого hu , которое отличает данную задачу от уже решённой в № 581, сделаем замену:

$$w(x, t) = u(x, t) \cdot e^{ht} \quad \Longrightarrow \quad w_t = (u_t + hu) \cdot e^{ht}. \quad (10.2)$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = 0.$$

Таким образом, введённая функция $w(x, t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, & x > 0, t > 0; \\ w(x, 0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x) \cdot e^{h \cdot 0}, & x \geq 0; \\ w_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (10.3)$$

Шаг 2. Решение полученной задачи

Решение этой задачи мы получили в № 582. Воспользуемся результатом:

$$w(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \underbrace{\varphi_1(\xi)}_{=\varphi(\xi)} d\xi.$$

Возвращаясь к функции $u(x, t) = w(x, t) \cdot e^{-ht}$, получаем:

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

Задание на самостоятельную работу:

1) **I.** Вычислить точное значение решения задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x, t > 0; \\ u(x, 0) = \sin 4x, & x \geq 0; \\ u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u(0, t) = \sin 9t, & t \geq 0 \end{cases}$$

в точке $x = \frac{3\pi}{4}$ в момент времени $t = \frac{2\pi}{3}$.

2) **II.** Вычислить точное значение решения задачи

$$\text{а) } \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = e^{-x^2}, & x, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x, t > 0; \\ u(x, 0) = \cos \pi x, & x \geq 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

в точке $x = 0$ в момент времени $t = 1$.