1 Метод Фурье для однородного параболического уравнения с однородными краевыми условиями.

№ 688.
Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X'(l) = 0. \tag{1.2}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.3}$$
$$X(0) = X'(l) = 0, \tag{1.4}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.5}$$

Задача (1.3)–(1.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.3) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.6}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.7}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

  $$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_1 = -c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}\, x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений $\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$, $X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)$, $n \in \mathbb{N}$ задачи (1.3), (1.4). Стало быть, рассматривать задачу (**??**) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.11}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{(\pi(2n-1)a)^2}{(2l)^2}t} \tag{1.12}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.1)**.**

Будем искать решение задачи (1.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right) A_n e^{-\frac{(\pi(2n-1)a)^2}{(2l)^2}t}. \tag{1.13}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{1.14}$$

$$\tag{1.15}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \tag{1.16}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого домножим (1.16) на $X_m = \sin\left(\pi\left(-\frac{1}{2} + m\right)x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l dx = \frac{l\alpha_m}{2},$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{1.17}$$

Таким образом, для коэффициентов A_n из представления (1.14) решения $u(x,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{1.18}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.14) найденные коэффициенты A_n из (1.18).

№ 687^M.

Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{1.20}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2X''(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.21}$$

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{1.22}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.23}$$

Задача (1.21)–(1.22) есть задача Штурма–Лиувилля (мы уже изучали её в № 643). Общее решение уравнения (1.21) имеет вид

$$X(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.24}$$

$$X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.25}$$

$$X(x) = c_1x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.26}$$

- При $\lambda > 0$ существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.27}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.28}$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ данная задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений
$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$
задачи (1.21), (1.22). Стало быть, рассматривать задачу (1.23) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:
$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.29}$$
Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:
$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \qquad t > 0, \tag{1.30}$$
где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.19)**.**

Будем искать решение задачи (1.19) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}. \tag{1.31}$$
Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие
$u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:
$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{1.32}$$
Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд Фурье по синусам:
$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad \text{где} \tag{1.33}$$
$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{1.34}$$
$$\tag{1.35}$$
Сопоставляя (1.32) и (1.33), (1.34) для коэффициентов $A_n \equiv b_n$ получим:
$$A_n \equiv b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{1.36}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.31) найденные коэффициенты A_n из (1.36).

№ 687.

Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = Ax, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1.37}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.

Мы уже несколько раз решали эту задачу, в частности в № 687^M. У неё есть бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Поэтому для функций $T_n(t)$ у нас получается семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.38}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \qquad t > 0, \tag{1.39}$$

где A_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (1.37).

Будем искать решение задачи (1.37) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}. \tag{1.40}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Но в данном случае функция $\varphi(x)$ нам задана:

$$\varphi(x) = Ax.$$

Поэтому воспользуемся формулами, полученными в № 687^M.

$$A_n \equiv b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \qquad \text{где} \tag{1.41}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{1.42}$$

Найдём коэффициенты $A_n \equiv b_n$:

$$A_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l Ax \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = -A\frac{2l}{\pi n l}\left(x\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_{x=0}^{x=l} - \int\limits_0^l \cos\left(\frac{\pi n x}{l} dx\right)\right) =$$

$$= -A\frac{2}{\pi n}\left((l(-1)^n - 0) - \frac{l}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) = \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Таким образом,

$$A_n = \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Подставляем найденные коэффициенты A_n в формулу (1.40):

$$u(x,t) = \frac{2Al}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t}.$$

№ 691.

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{1.43}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0$ в виде $\qquad U(x,t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X'(0) = X'(l) + hX(l) = 0. \tag{1.44}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$\frac{X"(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.45}$$

$$X'(0) = X'(l) + hX(l) = 0, \tag{1.46}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.47}$$

Задача (1.45)–(1.46) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.45) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.48}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.49}$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.50}$$

- При $\lambda > 0$ имеем

  $$X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,x) - c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$$

  И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) + hX(l) = 0$ получаем, что $-\sqrt{\lambda}\,\sin(\sqrt{\lambda}\,l) + h\cos(\sqrt{\lambda}\,l) = 0$, откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, т.к. тогда синус равнялся бы (± 1), и равенство не было бы выполнено)

  $$\sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\,l) = h \tag{1.51}$$

Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \sqrt{\lambda_n}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,l) = h, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.52}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.53}$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 0$), и второе краевое условие $X'(l) + hX(l) = 0$ даёт требование $c_2 = 0$, т.е. данная задача Штурма–Лиувилля при $\lambda = 0$ также не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n \quad - \quad \text{решения уравнения (1.51)}, \qquad X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.45), (1.46). Стало быть, рассматривать задачу (1.47) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.54}$$

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,a^2 t}, \qquad t > 0, \tag{1.55}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.43)**.**

Будем искать решение задачи (1.43) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) \cdot A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,a^2 t}. \tag{1.56}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{1.57}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \tag{1.58}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты $\alpha_n \equiv A_n$. Для этого домножим (1.58) на $X_m = \cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля всегда является ортогональной в смысле этого скалярного произведения:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int\limits_0^l \cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,x\right)dx = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l \left(1+\cos\left(2\sqrt{\lambda_m}\,x\right)\right)dx =$$
$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(l + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}}\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}\right) = \frac{\alpha_m}{2}\left(l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{2\sqrt{\lambda_m}}\right).$$

откуда, пользуясь тождествами $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем:

$$l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{2\sqrt{\lambda_m}} = \left[\sqrt{\lambda_m} = \frac{h}{\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,l)}\right] = l + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,l) =$$
$$= l + \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h} = l + \frac{1-\cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h} = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}\right] =$$
$$= l + \frac{1 - \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}}{h} = \left[\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right) = \frac{h^2}{\lambda_m}\right] = l + \frac{1-\frac{\lambda_m}{\lambda_m+h^2}}{h} =$$
$$= l + \frac{h^2}{h\left(\lambda_m+h^2\right)} = \frac{l\left(\lambda_m+h^2\right)+h}{\lambda_m+h^2}.$$

В итоге для коэффициентов $\alpha_n \equiv A_n$ получаем равенство:

$$A_n = \alpha_n = 2\frac{\lambda_n+h^2}{l\left(\lambda_n+h^2\right)+h}(\varphi, X_n) = 2\frac{\lambda_n+h^2}{l\left(\lambda_n+h^2\right)+h}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,l\right)dx. \tag{1.59}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.56) найденные коэффициенты A_n из (1.59).

<u>Ответ:</u> $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{2\frac{\lambda_n+h^2}{l(\lambda_n+h^2)+h}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,l\right)dx\right\}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)e^{-\sqrt{\lambda_n}\,a^2t}$.

<u>№ 692.</u>

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, \\ u(x,0) = U, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad h>0. \end{cases} \tag{1.60}$$

<u>Ответ:</u> $u(x,t) = 2U\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{h-(-1)^n\sqrt{\lambda_n+h^2}}{\lambda_n[l(\lambda_n+h^2)+h]}e^{-a^2\lambda_n t}\Phi_n(x)$, где

$\Phi_n = \sqrt{\lambda_n}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + h\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)$, λ_n – корни уравнения $h\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda}\,l\right) = -\sqrt{\lambda}$.