1 Метод Фурье для неоднородного параболического уравнения с однородными краевыми условиями второго рода.

<u>№ 699^M.</u>

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{1.1}$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{1.2}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{1.3}$$

<u>Шаг 1.</u> Решение задачи Штурма–Лиувилля.

Рассмотрим задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.4}$$
$$X'(0) = X'(l) = 0. \tag{1.5}$$

Задача (1.4)–(1.5) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.4) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.6}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.7}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\,x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\,l = \pi k$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}\,x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$. Второе краевое условие $X'(l) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма–Лиувилля (1.4)–(1.5) имеет собственное число, равное нулю: $\lambda_0 = 0$. Ему соответствует собственная функцця $X_0(x) \equiv 1$

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.4)–(1.5).

<u>**Шаг 2.**</u> **Будем искать решение уравнения $u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде**
$u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имеют вид:

$$X_0(x) \equiv 1, \qquad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{1.11}$$

Заметим сразу, что каждое слагаемое приведённого ряда удовлетворяет краевым условиям (1.2), что достаточно (если ряд допускает почленный переход к пределу при $x \to 0+0$, $x \to l = -0$) для того, чтобы функция $u(x,t)$, определённая таким образом, также удовлетворяла краевым условиям (1.2).

Пусть функция $f(x,t)$ разложена при каждом $t \in [0,T]$ в ряд Фурье по косинусам

$$f(x,t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) f_n(t). \tag{1.12}$$

При этом, коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам:

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{1.13}$$

Тогда уравнение (1.1) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(X_n(x)T_n'(t) - a^2 X"_n(x)T_n(t)\right) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} &T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} && \text{для } \ n = 0 \\ &X_n(x)T_n'(t) - a^2 X"_n(x)T_n(t) = f_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) && \text{для } \ n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} &T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} && \text{для } \ n = 0 \\ &\left(T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2}T_n(t)\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = f_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) && \text{для } \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Это заведомо выполнено, если

$$T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} \qquad \text{для } \ n = 0 \tag{1.14}$$

$$T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2}T_n(t) = f_n(t) \qquad \text{для } \ n \in \mathbb{N}, \tag{1.15}$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$.

<u>**Шаг 3.**</u> **Решаем задачу** (1.1) – (1.3)**.**

Из условий задачи (1.1) – (1.3) мы ещё не использовали только начальные условия

$u(x,0) = \varphi(x)$. Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд по косинусам

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad x \in [0,l] \qquad \text{где} \tag{1.16}$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{1.17}$$

Подставим функцию $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальное условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы

$$T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \qquad \text{для} \;\; n = 0$$
$$T_n(0) = \varphi_n \qquad \text{для} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, из (1.14), (1.15) и (1.16) – (1.17), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} \\ T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \end{cases} \qquad \text{для} \;\; n = 0 \tag{1.18}$$

$$\begin{cases} T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases} \qquad \text{для} \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0,T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$.

При $n = 0$:

$$T_0(t) = \frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t f_0(\tau)d\tau. \tag{1.20}$$

При $n \in \mathbb{N}$:
сначала решаем однородное уравнение:

$$T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c\, e^{-\frac{(\pi n a)^2 t}{l^2}}.$$

Метод вариации постоянной позволяет нам искать решение уравнения (1.19) в виде

$$T_n(t) = c(t)e^{-\frac{(\pi n a)^2 t}{l^2}}, \qquad \Longrightarrow \qquad T_n'(t) = \left(c'(t) - \frac{(\pi n a)^2}{l^2}c(t)\right)e^{-\frac{(\pi n a)^2 t}{l^2}}.$$

Подставив эти равнества в (1.19), получим уравнение для нахождения $c(t)$:

$$c'(t) = f_n(t)e^{\frac{(\pi n a)^2 t}{l^2}},$$

откуда, с учётом начального условия $T_n(0) = \varphi_n$,

$$c(t) = \varphi_n + \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{\frac{(\pi n a)^2 \tau}{l^2}} d\tau. \qquad (1.21)$$

Таким образом,

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\frac{(\pi n a)^2 t}{l^2}} + \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-\frac{(\pi n a)^2 (t-\tau)}{l^2}} d\tau. \qquad (1.22)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (1.20), (1.22) в формулу

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Получаем ответ:

$$u(x,t) = \left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f_0(\tau) d\tau\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n e^{-\frac{(\pi n a)^2 t}{l^2}} + \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-\frac{(\pi n a)^2 (t-\tau)}{l^2}} d\tau\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

№ 669^{M2}.

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$\begin{array}{lll} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in (0,l), \quad t > 0, & (2.1) \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t > 0, & (2.2) \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l]. & (2.3) \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0,l]. & (2.4) \\ & & (2.5) \end{array}$$

Шаг 1. Решение задачи Штурма–Лиувилля.
Этот шаг полностью повторяет Шаг 1. задачи № 699^M.

Шаг 2. Будем искать решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде
$u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имеют вид:

$$X_0(x) \equiv 1, \qquad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \qquad (2.6)$$

Пусть функция $f(x,t)$ разложена при каждом $t \in [0,T]$ в ряд Фурье по косинусам

$$f(x,t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) f_n(t). \qquad (2.7)$$

При этом, коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам:

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \qquad (2.8)$$

Тогда уравнение (2.1) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(X_n(x)T"_n(t)-a^2X"_n(x)T_n(t)\right)=\frac{f_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$T"_0(t)=\frac{f_0(t)}{2} \qquad \text{для } n=0$$
$$X_n(x)T"_n(t)-a^2X"_n(x)T_n(t)=f_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) \qquad \text{для } n\in\mathbb{N},$$

то есть

$$T"_0(t)=\frac{f_0(t)}{2} \qquad \text{для } n=0$$
$$\left(T"_n(t)+\frac{(\pi na)^2}{l^2}T_n(t)\right)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=f_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) \qquad \text{для } n\in\mathbb{N}.$$

Это заведомо выполнено, если

$$T"_0(t)=\frac{f_0(t)}{2} \qquad \text{для } n=0 \tag{2.9}$$
$$T"_n(t)+\frac{(\pi na)^2}{l^2}T_n(t)=f_n(t) \qquad \text{для } n\in\mathbb{N}, \tag{2.10}$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$.

Шаг 3. Решаем задачу (2.1) – (2.4)**.**

Из условий задачи (2.1) – (2.4) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд по косинусам

$$\varphi(x)=\frac{\varphi_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad x\in[0,l] \qquad \text{где} \tag{2.11}$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx. \tag{2.12}$$

$$\psi(x)=\frac{\psi_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad x\in[0,l] \qquad \text{где} \tag{2.13}$$

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\psi(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx. \tag{2.14}$$

Подставим функцию $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальные условия:

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n(0)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=\frac{\varphi_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для выполнения этих равенств достаточно, чтобы

$$T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \qquad T_0'(0) = \frac{\psi_0}{2} \qquad \text{для } \ n = 0$$

$$T_n(0) = \varphi_n \qquad T_n'(0) = \psi_n \qquad \text{для } \ n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, из (2.9), (2.10) и (2.11) – (2.12), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T"_0(t) = \frac{f_0(t)}{2} \\ T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \\ T_0'(0) = \frac{\psi_0}{2} \end{cases} \qquad \text{для } \ n = 0 \qquad (2.15)$$

$$\begin{cases} T"_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases} \qquad \text{для } \ n \in \mathbb{N}. \qquad (2.16)$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0, T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}, \ \ \psi_n \in \mathbb{R}$.

При $n = 0$:

$$T_0(t) = \frac{\varphi_0}{2} + \int_0^t \left(\frac{\psi_0}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\tau f_0(\varkappa)d\varkappa\right) d\tau. \qquad (2.17)$$

При $n \in \mathbb{N}$:
сначала решаем однородное уравнение:

$$T"_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin\frac{\pi n a t}{l} + c_2 \cos\frac{\pi n a t}{l}.$$

Метод вариации постоянной позволяет нам искать решение уравнения (2.16) в виде

$$T_n(t) = c_1(t)\sin\frac{\pi n a t}{l} + c_2(t)\cos\frac{\pi n a t}{l}, \qquad \text{где } \ c_{1,2}(t) \text{ – есть решения системы}$$

$$\begin{cases} c_1'(t)\sin\frac{\pi n a t}{l} + c_2'(t)\cos\frac{\pi n a t}{l} = 0; \\ \frac{\pi n a}{l}\left(c_1'(t)\cos\frac{\pi n a t}{l} - c_2'(t)\sin\frac{\pi n a t}{l}\right) = f_n(t). \end{cases}$$

откуда

$$c_1'(t) = \frac{l}{\pi n a}\, f_n(t)\cos\frac{\pi n a t}{l}, \qquad c_2'(t) = -\,\frac{l}{\pi n a}\, f_n(t)\sin\frac{\pi n a t}{l}.$$

С учётом начальных условий $T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n$ окончательно получаем

$$c_1(t) = \frac{l}{\pi n a}\psi_n + \frac{l}{\pi n a}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi n a \tau}{l}d\tau, \qquad c_2(t) = \varphi_n - \ \frac{l}{\pi n a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi n a \tau}{l}d\tau. \qquad (2.18)$$

Таким образом,

$$T_n(t) = \varphi_n \sin\frac{\pi nat}{l} + \psi_n \frac{l}{\pi na} \cos\frac{\pi nat}{l} +$$
$$+ \frac{l}{\pi na}\left(\sin\frac{\pi nat}{l}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi na\tau}{l}d\tau - \cos\frac{\pi nat}{l}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi na\tau}{l}d\tau\right). \quad (2.19)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (2.17), (2.19) в формулу

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right).$$

№ 654^M. Классический способ.

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x), && x\in(0,l),\ \ t>0, && (3.1)\\
&u(0,t) = u(l,t) = 0, && t>0, && (3.2)\\
&u(x,0) = \frac{\beta-\alpha}{l}x+\alpha, && x\in[0,l]. && (3.3)\\
&u_t(x,0) = 0, && x\in[0,l]. && (3.4)\\
& && && (3.5)
\end{aligned}$$

<u>Шаг 1.</u> Решение задачи Штурма–Лиувилля.
Рассмотрим задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.6)$$
$$X(0) = X(l) = 0. \quad (3.7)$$

Задача (3.6)–(3.7) есть задача Штурма–Лиувилля. Её решение нам уже известно:

$$\lambda_n = \frac{(\pi nx)^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \quad n\in\mathbb{N}.$$

<u>Шаг 2.</u> Будем искать решение уравнения $u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде
$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_nT_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имеют вид:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \quad n\in\mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Пусть функция $f(x)$ разложена в ряд Фурье по синусам (так как в данном примере f не зависит от t, то f_n тут просто константы, не зависящие от t)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)f_n. \quad (3.9)$$

При этом, коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам:

$$f_n = (f, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx. \quad (3.10)$$

Тогда уравнение (3.1) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(X_n(x)T"_n(t)-a^2X"_n(x)T_n(t)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$X_n(x)T"_n(t)-a^2X"_n(x)T_n(t)=f_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\qquad \text{для}\ \ n\in\mathbb{N},$$

то есть

$$\left(T"_n(t)+\frac{(\pi na)^2}{l^2}T_n(t)\right)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=f_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\qquad \text{для}\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Это заведомо выполнено, если

$$T"_n(t)+\frac{(\pi na)^2}{l^2}T_n(t)=f_n\qquad \text{для}\ \ n\in\mathbb{N}, \tag{3.11}$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$ с краевыми условиями $u(0,t)=u(l,t)=0$.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (3.1) – (3.4)**.**

Из условий задачи (3.1) – (3.4) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0)=\varphi(x)=\frac{\alpha-\beta}{l}x-\alpha$, $u_t(x,0)=\psi=0$. Найдём разложение функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, входящих в начальные условия, в ряд по синусам

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right),\qquad \text{где}\quad \varphi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx. \tag{3.12}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right),\qquad \text{где}\quad \psi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\psi(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx. \tag{3.13}$$

Подставим функцию $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальные условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T'_n(0)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right).$$

Для выполнения этих равенств достаточно, чтобы

$$T_n(0)=\varphi_n\qquad T'_n(0)=\psi_n\qquad \text{для}\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, из (3.11) и (3.12) – (3.13), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T"_n(t)+\frac{(\pi na)^2}{l^2}T_n(t)=f_n \\ T_n(0)=\varphi_n \\ T'_n(0)=\psi_n \end{cases}\qquad \text{для}\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{3.14}$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in \mathbb{R}$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$, $\psi_n \in \mathbb{R}$.
Найдём φ_n, ψ_n из (3.12), (3.13) с учётом, что

$$\varphi(x) = \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha, \qquad \psi = 0.$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \left(- \frac{l}{\pi n} \frac{\beta - \alpha}{l} x \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \Bigg|_{x=0}^{x=l} + \right.$$

$$\left. + \frac{l}{\pi n} \frac{\alpha - \beta}{l} \underbrace{\int\limits_0^l \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx}_{0} + \alpha \int\limits_0^l \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx \right) =$$

$$= \frac{2}{l} \left(- \frac{(-1)^n l (\beta - \alpha)}{\pi n} + \frac{\alpha\, l\, (1 - (-1)^n)}{\pi n} \right) = \frac{2}{\pi n} \left(\alpha - (-1)^n \beta \right),$$

$\psi_n = 0.$

При $n \in \mathbb{N}$:
сначала решаем однородное уравнение:

$$T"_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin \frac{\pi n a t}{l} + c_2 \cos \frac{\pi n a t}{l}.$$

Простой вид правой части позволяет нам угадать частное решение неоднородного уравнения (3.14) в виде константы: $\frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}$. Поэтому общее решение (3.14) имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin \frac{\pi n a t}{l} + c_2 \cos \frac{\pi n a t}{l} + \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}.$$

Из начального условия $T_n'(0) = \psi_n = 0$ следует, что

$$c_1 = 0.$$

А второе начальное условие $T_n(0) = \varphi_n = \frac{2}{\pi n} \left(\alpha - (-1)^n \beta \right)$ даёт нам

$$c_2 = \frac{2}{\pi n} \left(\alpha - (-1)^n \beta \right) - \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}.$$

Таким образом,

$$T_n(t) = \left(\frac{2}{\pi n} \left(\alpha - (-1)^n \beta \right) - \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2} \right) \cos \frac{\pi n a t}{l} + \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}. \tag{3.15}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (3.15) в формулу

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Получим ответ:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n}\left(\alpha-(-1)^n\beta\right) - \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}\right)\cos\frac{\pi n a t}{l}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

№ 654^M. Короткий способ.

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{4.1}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{4.2}$$
$$u(x,0) = \frac{\beta-\alpha}{l}x + \alpha, \qquad x \in [0,l]. \tag{4.3}$$
$$u_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \tag{4.4}$$
$$\tag{4.5}$$

Шаг 1. Так как правые части всех равенств в этой задаче не зависят от времени, будем искать решение задачи в виде суммы $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$.
Найдём $w = w(x)$ такую, чтобы

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{4.6}$$
$$w(0,t) = w(l,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{4.7}$$

Раз $w = w(x)$, то $w_{tt} = 0$, и задача (4.6) – (4.7) принимает более простой вид:

$$w"(x) = -\frac{f(x)}{a^2}, \qquad x \in (0,l), \tag{4.8}$$
$$w(0) = w(l) = 0. \tag{4.9}$$

Проинтегрируем уравнение (4.8) один раз:

$$w'(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x f(s)ds + c_1.$$

Проинтегрируем второй раз:

$$w(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x\int_0^y f(s)dsdy + c_1 x + c_2.$$

Из краевого условия $w(0) = 0$ получаем, что $c_2 = 0$, а из $w(l) = 0$, – что

$$0 = -\frac{1}{a^2}\int_0^l\int_0^y f(s)dsdy + c_1 l,$$

откуда

$$c_1 = \frac{1}{la^2}\int\limits_0^l \int\limits_0^y f(s)dsdy.$$

Итак, функция $w(x)$ нам полностью известна:

$$w(x) = \frac{x}{la^2}\int\limits_0^l \int\limits_0^y f(s)dsdy - \frac{1}{a^2}\int\limits_0^x \int\limits_0^y f(s)dsdy. \tag{4.10}$$

Тогда для $v(x,t) = u(x,t) - w(x)$ получается задача

$$\begin{aligned}
&v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, && x \in (0,l), \quad t > 0, && (4.11)\\
&v(0,t) = v(l,t) = 0, && t > 0, && (4.12)\\
&v(x,0) = \frac{\beta-\alpha}{l}x + \alpha - w(x) = \varphi(x), && x \in [0,l]. && (4.13)\\
&v_t(x,0) = 0, && x \in [0,l]. && (4.14)\\
& && && (4.15)
\end{aligned}$$

Такую задачу мы уже умеем решать (см. номер 643). Её ответ:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\right), \tag{4.16}$$

где A_n и B_n задаются равенствами

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx; \tag{4.17}$$

$$B_n = \frac{2}{a\pi n}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{4.18}$$

В нашем случае $\psi = 0$, а $\varphi = \frac{\beta-\alpha}{l}x + \alpha - w(x)$, откуда

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \left(\frac{\beta-\alpha}{l}x + \alpha - w(x)\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx, \qquad B_n = 0$$

и функция v имеет вид

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n a t}{l}\right). \tag{4.19}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

найденные функции v и wиз (4.19) и (4.10).

№ 667.

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), && x \in (0,l), \quad t > 0, && (5.1)\\
&u(0,t) = u_x(l,t) = 0, && t > 0, && (5.2)\\
&u(x,0) = 0, && x \in [0,l]. && (5.3)\\
&u_t(x,0) = 0, && x \in [0,l]. && (5.4)\\
& && && (5.5)
\end{aligned}
$$

Шаг 1. Решение задачи Штурма–Лиувилля.
Этот шаг мы проходили, когда решали задачу № 649^M. Результат:
бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2. Будем искать решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде
$u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имеют вид:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right). \tag{5.6}$$

Пусть функция $f(x,t)$ разложена при каждом $t \in [0,T]$ в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) f_n(t). \tag{5.7}$$

При этом, коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам (как мы убедились, решая № 649^M):

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) dx. \tag{5.8}$$

Тогда уравнение (5.1) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(X_n(x)T"_n(t) - a^2 X"_n(x)T_n(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$X_n(x)T"_n(t) - a^2 X"_n(x)T_n(t) = f_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) \qquad \text{для} \quad n \in \mathbb{N},$$

то есть

$$\left(T"_n(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2a^2}{4l^2}T_n(t)\right)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = f_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) \quad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Это заведомо выполнено, если

$$T"_n(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2a^2}{4l^2}T_n(t) = f_n(t) \qquad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.9}$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (5.1) – (5.4)**.**

Из условий задачи (5.1) – (5.4) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$. Функции $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд по функциям $X_n(x)$

$$\varphi(x) \equiv 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \qquad x \in [0,l] \quad \text{где } \ \varphi_n = 0, \tag{5.10}$$

$$\psi(x) \equiv 0 = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad x \in [0,l] \quad \text{где } \ \psi_n = 0 \tag{5.11}$$

Подставим функцию $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальные условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = 0.$$

Для выполнения этих равенств достаточно, чтобы

$$T_n(0) = \varphi_n = 0 \qquad\qquad T_n'(0) = \psi_n = 0 \qquad\qquad \text{для } \ n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, из (5.9) и (5.10) – (5.11), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T"_n(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2a^2}{4l^2} T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = 0 \\ T_n'(0) = 0 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.12}$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0,T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$, $\psi_n \in \mathbb{R}$.

сначала решаем однородное уравнение:

$$T"_n(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2a^2}{4l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2 \cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l}.$$

Метод вариации постоянной позволяет нам искать решение уравнения (5.12) в виде

$$T_n(t) = c_1(t)\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2(t)\cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l}, \qquad \text{где } \ c_{1,2}(t) \text{ – есть решения системы}$$

$$\begin{cases} c_1'(t)\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2'(t)\cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l} = 0; \\ \frac{\pi(2n-1)a}{2l}\left(c_1'(t)\cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l} - c_2'(t)\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l}\right) = f_n(t). \end{cases}$$

откуда

$$c_1'(t) = \frac{2l}{\pi(2n-1)a}\, f_n(t)\cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l}, \qquad c_2'(t) = -\frac{2l}{\pi(2n-1)a}\, f_n(t)\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l}.$$

С учётом начальных условий $T_n(0) = \varphi_n = 0$, $T_n'(0) = \psi_n = 0$ окончательно получаем

$$c_1(t) = \frac{2l}{\pi(2n-1)a}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l}d\tau, \qquad c_2(t) = -\frac{2l}{\pi(2n-1)a}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l}d\tau. \tag{5.13}$$

Таким образом,

$$T_n(t) = \frac{2l}{\pi(2n-1)a}\left(\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l}d\tau - \right.$$
$$\left. - \cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l}d\tau\right). \tag{5.14}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (5.14) в формулу

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2l}.$$

№ I.
Найти решение $u(x,t)$ задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t), && x\in(0,l),\ \ t>0, && (5.15)\\ &u(0,t) = u(l,t) = 0, && t>0, && (5.16)\\ &u(x,0) = \varphi(x), && x\in[0,l]. && (5.17)\\ &u_t(x,0) = 0, && x\in[0,l]. && (5.18)\\ & && && (5.19) \end{aligned}$$

<u>Решение:</u> см. № 654^M (Классический способ), стр. 7.

№ II.
Найти решение $u(x,t)$ задачи

$$\begin{aligned} &u_t - a^2u_{xx} = f(x), && x\in(0,l),\ \ t>0, && (5.20)\\ &u(0,t) = u(l,t) = 0, && t>0, && (5.21)\\ &u(x,0) = \varphi(x), && x\in[0,l]. && (5.22)\\ & && && (5.23) \end{aligned}$$

<u>Решение:</u> см. № 654^M (Короткий способ), стр. 10.