1 Сведение неоднородных краевых условий к однородным.

Рассмотрим неоднородную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с неоднородными краевыми условиями первого рода.

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = \mu(t) \qquad t > 0, \tag{1.2}$$

$$u(l,t) = \nu(t), \qquad t > 0, \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{1.4}$$

Её легко свести к аналогичной задаче, но уже с однородными краевыми условиями. Это делается при помощи подходящей замены переменных:

$$v(x,\ t) = u(x,\ t) - \left(\frac{l-x}{l}\, \mu(t) + \frac{x}{l}\, \nu(t) \right). \tag{1.5}$$

В самом деле, при $x = 0$

$$v(0,\ t) = u(0,\ t) - \left(\frac{l}{l}\, \mu(t) + \frac{0}{l}\, \nu(t) \right) = \mu(t) - \mu(t) = 0.$$

А при $x = l$

$$v(l,\ t) = u(l,\ t) - \left(\frac{l-l}{l}\, \mu(t) + \frac{l}{l}\, \nu(t) \right) = \nu(t) - \nu(t) = 0.$$

Что же после такой замены произойдёт с уравнением и начальным условием? Изучим этот вопрос. Поскольку

$$u_t = v_t + \left(\frac{l-x}{l}\, \mu'(t) + \frac{x}{l}\, \nu'(t) \right), \qquad u_{xx} = v_{xx},$$

то уравнение примет вид

$$v_t - a^2 v_{xx} = f(x,t) - \left(\frac{l-x}{l}\, \mu'(t) + \frac{x}{l}\, \nu'(t) \right) = f_1(x,t).$$

Начальное условие преобразуется следующим образом:

$$v(x,0) = \varphi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\, \mu(0) + \frac{x}{l}\, \nu(0) \right) = \varphi_1(x).$$

Итак, исходная задача свелась к задаче нахождения функции $v(x,t)$ с однородными краевыми условиями:

$$v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x,t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0,$$

$$v(0,t) = 0 \qquad t > 0,$$

$$v(l,t) = 0, \qquad t > 0,$$

$$v(x,0) = \varphi_1(x), \qquad x \in [0,l],$$

где

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \left(\frac{l-x}{l}\, \mu'(t) + \frac{x}{l}\, \nu'(t) \right), \qquad \varphi_1(x) = \varphi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\, \mu(0) + \frac{x}{l}\, \nu(0) \right).$$

Замечание 1.1. В случае любых краевых условий, кроме условий II-го рода на обоих концах, можно подобрать функцию

$$w(x,\ t) = (a_1 x + b_1)\mu(t) + (a_2 x + b_2)\nu(t)$$

так, чтобы для функции $v(x,\ t) = u(x,\ t) - w(x,\ t)$ выполнялись однородные краевые условия того же вида.
Отдельный случай представляют собой условия II-го рода на обоих концах. В этом случае функцию w в виде $w(x,t) = (a_1 x + b_1)\mu(t) + (a_2 x + b_2)\nu(t)$ найти можно не всегда, но всегда её можно найти в виде

$$w(x,t) = (a_1 x^2 + b_1 x)\mu(t) + (a_2 x^2 + b_2 x)\nu(t).$$

Пример 1.1. Краевые условия

$$u_x(0,t) + hu(0,t) = \mu(t), \qquad u_x(l,t) = \nu(t)$$

сводятся к однородным так:
найдём $w(x,t) = (a_1 x + b_1)\mu(t) + (a_2 x + b_2)\nu(t)$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w_x(0,t) + hw(0,t) = \mu(t), \qquad w_x(l,t) = \nu(t).$$

Тогда

$$w(0,t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t), \qquad w_x(0,t) = a_1\mu(t) + a_2\nu(t), \qquad w_x(l,t) = a_1\mu(t) + a_2\nu(t).$$

Из второго краевого условия

$$\nu(t) = a_1\mu(t) + a_2\nu(t)$$

получаем:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1.$$

А из первого краевого условия с учётом найденных $a_{1,2}$

$$\mu(t) = (a_1\mu(t) + a_2\nu(t)) + h\left(b_1\mu(t) + b_2\nu(t)\right) = hb_1\mu(t) + (1 + hb_2)\nu(t)$$

находим:

$$b_1 = \frac{1}{h}, \quad b_2 = -\frac{1}{h}.$$

Наконец,

$$w(x,t) = \frac{1}{h}\mu(t) + \frac{xh - 1}{h}\nu(t).$$

Пример 1.2. Краевые условия II-го рода

$$u_x(0,t) = \mu(t), \qquad u_x(l,t) = \nu(t)$$

сводятся к однородным так:
найдём $w(x,t) = (a_1 x^2 + b_1 x)\mu(t) + (a_2 x^2 + b_2 x)\nu(t)$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w_x(0,t) = \mu(t), \qquad w_x(l,t) = \nu(t)$$

Тогда

$$w_x(0,t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t), \qquad w_x(l,t) = (2a_1 l + b_1)\mu(t) + (2a_2 l + b_2)\nu(t).$$

Из первого краевого условия

$$\mu(t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t)$$

получаем:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0.$$

А из второго краевого условия с учётом найденных $b_{1,2}$

$$\nu(t) = (2a_1 l + b_1)\mu(t) + (2a_2 l + b_2)\nu(t) = (2a_1 l + 1)\mu(t) + 2a_2 l\nu(t)$$

находим:

$$a_1 = -\frac{1}{2l}, \quad a_2 = \frac{1}{2l}.$$

Наконец,

$$w(x,t) = \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\mu(t) + \frac{x^2}{2l}\nu(t).$$

№ 659.

Свести задачу

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 0, && x \in (0,l), \quad t > 0, && (2.1)\\
&u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), && t > 0, && (2.2)\\
&u(x,0) = \varphi(x), && x \in [0,l], && (2.3)\\
&u_t(x,0) = \psi(x), && x \in [0,l] && (2.4)
\end{aligned}$$

к задаче с однородными краевыми условиями.

Шаг № 1. Построение вспомогательной функции.

Найдём $w(x,t) = (a_1 x + b_1)\mu(t) + (a_2 x + b_2)\nu(t)$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w(0,t) = \mu(t), \qquad w(l,t) = \nu(t)$$

Вид искомой функции $w(x,t)$ даёт на концах отрезка

$$w(0,t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t), \qquad w(l,t) = (a_1 l + b_1)\mu(t) + (a_2 l + b_2)\nu(t).$$

Из первого краевого условия

$$\mu(t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t)$$

получаем:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0.$$

А из второго краевого условия с учётом найденных $b_{1,2}$

$$\nu(t) = (a_1 l + b_1)\mu(t) + (a_2 l + b_2)\nu(t) = (a_1 l + 1)\mu(t) + a_2 l\nu(t)$$

находим:

$$a_1 = -\frac{1}{l}, \quad a_2 = \frac{1}{l}.$$

Наконец,

$$w(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu(t) + \frac{x}{l}\nu(t) = \frac{l-x}{l}\mu(t) + \frac{x}{l}\nu(t).$$

Для построенной таким образом функции $w(x,t)$ имеем:

$$w_t = \frac{l-x}{l}\mu'(t) + \frac{x}{l}\nu'(t), \quad w_{tt} = \frac{l-x}{l}\mu''(t) + \frac{x}{l}\nu''(t), \quad w_{xx} \equiv 0, \qquad w(x,0) = \frac{l-x}{l}\mu(0) + \frac{x}{l}\nu(0).$$

Поэтому $w(x,t)$ удовлетворяет равенствам:

$$w_{tt} - w_{xx} = \frac{l-x}{l}\mu''(t) + \frac{x}{l}\nu''(t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{2.5}$$
$$w(0,t) = \mu(t), \quad w(l,t) = \nu(t), \qquad t > 0, \tag{2.6}$$
$$w(x,0) = \frac{l-x}{l}\mu(0) + \frac{x}{l}\nu(0), \qquad x \in [0,l]. \tag{2.7}$$
$$w_t(x,0) = \frac{l-x}{l}\mu'(0) + \frac{x}{l}\nu'(0), \qquad x \in [0,l]. \tag{2.8}$$

<u>Шаг № 2.</u> Сведение к задаче с однородными краевыми условиями.
Для функции $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, вычитая из (**??**) – (**??**) равенства (2.5) – (2.8), получим задачу

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = -\frac{l-x}{l}\mu''(t) - \frac{x}{l}\nu''(t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{2.9}$$
$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{2.10}$$
$$v(x,0) = \varphi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\mu(0) + \frac{x}{l}\nu(0)\right), \qquad x \in [0,l]. \tag{2.11}$$
$$v_t(x,0) = \psi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\mu'(0) + \frac{x}{l}\nu'(0)\right), \qquad x \in [0,l]. \tag{2.12}$$

<u>№ 660.</u>

Свести задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{3.1}$$
$$u_x(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \qquad t > 0, \tag{3.2}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l], \tag{3.3}$$
$$u_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l] \tag{3.4}$$

к задаче с однородными краевыми условиями.
<u>Шаг № 1.</u> Построение вспомогательной функции.
Найдём $w(x,t) = (a_1 x + b_1)\mu(t) + (a_2 x + b_2)\nu(t)$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w(0,t) = \mu(t), \qquad w(l,t) = \nu(t)$$

Вид искомой функции $w(x,t)$ даёт на концах отрезка

$$w_x(0,t) = a_1\mu(t) + a_2\nu(t), \qquad w(l,t) = (a_1 l + b_1)\mu(t) + (a_2 l + b_2)\nu(t).$$

Из первого краевого условия

$$\mu(t) = a_1\mu(t) + a_2\nu(t)$$

получаем:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0.$$

А из второго краевого условия с учётом найденных $a_{1,2}$

$$\nu(t) = (a_1 l + b_1)\mu(t) + (a_2 l + b_2)\nu(t) = (l + b_1)\mu(t) + b_2\nu(t)$$

находим:

$$b_1 = -l, \quad b_2 = 1.$$

Наконец,

$$w(x,t) = (x-l)\mu(t) + \nu(t).$$

Для построенной таким образом функции $w(x,t)$ имеем:

$$w_t = (x-l)\mu'(t) + \nu'(t), \quad w_{tt} = (x-l)\mu''(t) + \nu''(t), \quad w_{xx} \equiv 0, \qquad w(x,0) = (x-l)\mu(0) + \nu(0).$$

Поэтому $w(x,t)$ удовлетворяет равенствам:

$$\begin{aligned}
&w_{tt} - w_{xx} = (x-l)\mu''(t) + \nu''(t), && x \in (0,l), \ \ t>0, && (3.5)\\
&w_x(0,t) = \mu(t), \quad w(l,t) = \nu(t), && t>0, && (3.6)\\
&w(x,0) = (x-l)\mu(0) + \nu(0), && x \in [0,l]. && (3.7)\\
&w_t(x,0) = (x-l)\mu'(0) + \nu'(0), && x \in [0,l]. && (3.8)
\end{aligned}$$

Шаг № 2. Сведение к задаче с однородными краевыми условиями.
Для функции $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, вычитая из (3.1) – (3.4) равенства (3.5) – (3.8), получим задачу

$$\begin{aligned}
&v_{tt} - v_{xx} = -(x-l)\mu''(t) - \nu''(t), && x \in (0,l), \ \ t>0, && (3.9)\\
&v_x(0,t) = v(l,t) = 0, && t>0, && (3.10)\\
&v(x,0) = \varphi(x) - \left((x-l)\mu(0) + \nu(0)\right), && x \in [0,l]. && (3.11)\\
&v_t(x,0) = \psi(x) - \left((x-l)\mu'(0) + \nu'(0)\right), && x \in [0,l]. && (3.12)
\end{aligned}$$

№ 661.

Свести задачу

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), && x \in (0,l), \ \ t>0, && (4.1)\\
&u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = \nu(t), \qquad h>0, && t>0, && (4.2)\\
&u(x,0) = 0, && x \in [0,l], && (4.3)\\
&u_t(x,0) = \psi(x), && x \in [0,l] && (4.4)
\end{aligned}$$

к задаче с однородными краевыми условиями.

№ 662.

Свести задачу

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), && x \in (0,l), \ \ t>0, && (4.1)\\
&u_x(0,t) - hu(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = \nu(t), \qquad h>0, && t>0, && (4.2)\\
&u(x,0) = \varphi(x), && x \in [0,l], && (4.3)\\
&u_t(x,0) = \psi(x), && x \in [0,l] && (4.4)
\end{aligned}$$

к задаче с однородными краевыми условиями.

№ 663.

Свести к задаче с однородными краевыми условиями.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 0, && x \in (0,l), \ \ t>0, && (5.1)\\
&u_x(0,t) - hu(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) + gu(l,t) = \nu(t), \qquad h,\ g>0 && t>0, && (5.2)\\
&u(x,0) = 0, && x \in [0,l], && (5.3)\\
&u_t(x,0) = 0, && x \in [0,l] && (5.4)
\end{aligned}$$

№ 655.

Найти решение $u(x,t)$ задачи

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{6.1}$$
$$u_x(0,t) = \alpha, \quad u_x(l,t) = \beta, \qquad t > 0, \tag{6.2}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{6.3}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{6.4}$$

Шаг № 1. Сведём эту задачу к задаче с однородными краевыми условиями.
Найдём $w(x,t) = (a_1x^2 + b_1x)\alpha + (a_2x^2 + b_2x)\beta$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w_x(0,t) = \alpha, \qquad w_x(l,t) = \beta$$

Вид искомой функции $w(x,t)$ даёт на концах отрезка

$$w_x(0,t) = b_1\alpha + b_2\beta, \qquad w_x(l,t) = (2a_1l + b_1)\alpha + (2a_2l + b_2)\beta.$$

Из первого краевого условия

$$\alpha = b_1\alpha + b_2\beta$$

получаем:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0.$$

А из второго краевого условия с учётом найденных $b_{1,2}$

$$\beta = (2a_1l + b_1)\alpha + (2a_2l + b_2)\beta = (2a_1l + 1)\alpha + 2a_2l\beta$$

находим:

$$a_1 = -\frac{1}{2l}, \quad a_2 = \frac{1}{2l}.$$

Наконец,

$$w(x,t) = \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\alpha + \frac{x^2}{2l}\beta = \alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l}x^2.$$

Для построенной таким образом функции $w(x,t)$ имеем:

$$w_t = w_{tt} \equiv 0, \qquad w_{xx} = \frac{\beta - \alpha}{l}, \qquad w(x,0) = \alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l}x^2.$$

Поэтому $w(x,t)$ удовлетворяет равенствам:

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = a^2\frac{\alpha - \beta}{l}, \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{6.5}$$
$$w_x(0,t) = \alpha, \quad w_x(l,t) = \beta, \qquad t > 0, \tag{6.6}$$
$$w(x,0) = \alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l}x^2, \qquad x \in [0,l]. \tag{6.7}$$
$$w_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \tag{6.8}$$

Поэтому для функции $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, вычитая из (6.1) – (6.4) равенства (6.5) – (6.8), получим задачу

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t) - a^2\frac{\alpha - \beta}{l} = f_1(x), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{6.9}$$
$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{6.10}$$
$$v(x,0) = \varphi(x) - \left(\alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l}x^2\right) = \varphi_1(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{6.11}$$
$$v_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{6.12}$$

Шаг № 2. Решаем задачу с однородными краевыми условиями (6.9) – (6.12).
Эта задача – частный случай решённой ранее задачи № 669^{M2}. Её решение:

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \tag{6.13}$$

где

$$T_0(t)=\frac{\varphi_0}{2}+\int\limits_0^t\left(\frac{\psi_0}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau f_0(\varkappa)d\varkappa\right)d\tau. \tag{6.14}$$

$$\begin{gathered}T_n(t)=\varphi_{1n}\sin\frac{\pi nat}{l}+\psi_n\,\frac{l}{\pi na}\,\cos\frac{\pi nat}{l}+\\
+\frac{l}{\pi na}\left(\sin\frac{\pi nat}{l}\int\limits_0^t f_{1n}(\tau)\cos\frac{\pi na\tau}{l}d\tau-\cos\frac{\pi nat}{l}\int\limits_0^t f_{1n}(\tau)\sin\frac{\pi na\tau}{l}d\tau\right).\end{gathered} \tag{6.15}$$

При этом, в нашем случае $f_1(x,t)=f_1(x)\quad\Rightarrow\quad f_{1n}(t)=f_{1n}$,

$$\varphi_{1n}=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi_1(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx,\qquad \psi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\psi(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx,\qquad f_{1n}=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f_1(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx.$$

Наконец, поскольку f_{1n} не зависят от времени, их в (6.15) можно вынести за знаки интегралов:

$$\int\limits_0^t f_{1n}(\tau)\cos\frac{\pi na\tau}{l}d\tau=f_{1n}\int\limits_0^t\cos\frac{\pi na\tau}{l}d\tau=f_{1n}\frac{l}{\pi na}\sin\frac{\pi nat}{l},$$

$$\int\limits_0^t f_{1n}(\tau)\sin\frac{\pi na\tau}{l}d\tau=f_{1n}\int\limits_0^t\sin\frac{\pi na\tau}{l}d\tau=-f_{1n}\frac{l}{\pi na}\left(\cos\frac{\pi nat}{l}-1\right).$$

Кроме того, T_0 в силу (6.16) и независимости f_{10} от t имеет вид:

$$T_0(t)=\frac{\varphi_{10}}{2}+\int\limits_0^t\left(\frac{\psi_0}{2}+\frac{f_{10}}{2}\int\limits_0^\tau d\varkappa\right)d\tau=\frac{\varphi_{10}}{2}+\frac{\psi_0}{2}\,t+\frac{f_{10}}{2}\,\frac{t^2}{2}. \tag{6.16}$$

Подставляя всё это в (6.13), получим:

$$\begin{gathered}v(x,t)=\frac{\varphi_{10}}{2}+\frac{\psi_0}{2}\,t+\frac{f_{10}}{4}\,t^2+\\
+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{1n}\sin\frac{\pi nat}{l}+\psi_n\,\frac{l}{\pi na}\,\cos\frac{\pi nat}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)+\\
+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{1n}}{(\pi na)^2}\left(\sin^2\frac{\pi nat}{l}+\cos^2\frac{\pi nat}{l}-\cos\frac{\pi nat}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right).\end{gathered}$$

или, короче:

$$\begin{gathered}v(x,t)=\frac{\varphi_{10}}{2}+\frac{\psi_0}{2}\,t+\frac{f_{10}}{4}\,t^2+\\
+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{1n}\sin\frac{\pi nat}{l}+\psi_n\,\frac{l}{\pi na}\,\cos\frac{\pi nat}{l}-\,\frac{f_{1n}}{(\pi na)^2}\cos\frac{\pi nat}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right).\end{gathered} \tag{6.17}$$

Ответ: $u(x,t)=\alpha x+\frac{\beta-\alpha}{2l}x^2+v(x,t)$, где $v(x,t)$ задана в (6.17).