1. Функция Грина задачи Дирихле.

0.1. Определение и свойства функции Грина.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа с краевыми условиями I-го рода.
Постановка задачи: Пусть D – область евклидова пространства E^n, а $S = \partial D$ – гладкая $(n-1)$-мерная граница D. Найти функцию $u(x,\ t) \in C^2(D) \bigcap C\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющую условиям

$$\Delta u \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0, \qquad x \in D, \tag{0.1}$$

$$u(x)\Big|_{x \in S} = \varphi(x), \qquad x \in S, \tag{0.2}$$

где $\varphi(x) \in C(S)$ – заданная, непрерывная на S функция.

Такая задача называется **задачей Дирихле**. (Если бы краевые условия были условиями II-го рода, здача называлась бы задачей Неймана.)

Опр. 0.1. **Фундаментальным (или элементарным) решением уравнения Лапласа** называется функция $E(x,\ \xi), \quad x \neq \xi \in \overline{D}$ вида

$$E(x,\ \xi) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)|\xi - x|^{n-2}} & n > 2, \\ -\ln|\xi - x| & n = 2, \end{cases} \tag{0.3}$$

где $|\xi - x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - x_i)^2}$ – расстояние между точками x и ξ.

Опр. 0.2. **Функцией Грина** $G(x,\ \xi)$ **задачи Дирихле для уравнения Лапласа** называется функция $G(x,\ \xi), \quad x \neq \xi \in \overline{D}$, обладающая сойствами:

1. Она имеет вид
$$G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi),$$
где $E(x,\ \xi)$ – Фундаментальное решение уравнения Лапласа, а функция $g(x,\ \xi)$ гармонична в D как по x, так и по ξ:
$$\Delta_x g(x,\ \xi) = \Delta_\xi g(x,\ \xi) = 0, \qquad x, \xi \in D.$$

2. $$G(x,\ \xi)\Big|_{x \in S} = G(x,\ \xi)\Big|_{\xi \in S} = 0.$$

Утверждение 0.1 (Свойства функции Грина).
Усл. *$G(x,\ \xi)$ функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в D.*
Утв.
1^o $\quad G(x,\ \xi) \geqslant 0, \qquad x \neq \xi \in D;$
2^o $\quad \Delta_x G(x,\ \xi) = \Delta_\xi G(\xi,\ x) = 0, \qquad x \neq \xi \in D;$
3^o $\quad G(x,\ \xi) = G(\xi,\ x), \qquad x \neq \xi \in \overline{D}.$

Теорема 0.1 (Представление решения задачи Дирихле при помощи функции Грина).
Усл. *$G(x,\ \xi)$ функция Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2).*
Утв. *Решение задачи (0.1) – (0.2) можно представить в виде:*

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \nu_\xi}\varphi(\xi)dS_\xi, \tag{0.4}$$

где $\omega_n = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ – площадь единичной сферы в E^n,
$\Gamma(t)$ – Гамма-функция Эйлера, $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n-2)!!}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}\sqrt{\pi}$,
$\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}$ – производная по внешней нормали к поверхности S в точке $\xi \in S$,
dS_ξ – элемент площади поверхности S в точке ξ.

Пример 0.1. В случае, когда $D = \{|x| < 1\}$ – единичный шар в E^n для задачи Дирихле (0.1) – (0.2) функция Грина имеет вид:

$$G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) - E\left(|x|\xi,\ \frac{x}{|x|}\right),$$

а решение задачи представляется формулой Пуассона:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1} \frac{1-|x|^2}{|\xi - x|^n}\,\varphi(\xi)dS_\xi.$$

0.2. Метод электростатических изображений (метод отражений)

0.2.1. Физическая интерпретация для E^3.

В трёхмерном пространстве функцию Грина задачи Дирихле можно интерпретировать физически как потенциал поля, созданного единичным точечным зарядом, помещенным внутри заземлённой проводящей замкнутой поверхности.

Фиксируем две точки: x и y в области D. В точку x мы поместим единичный положительный заряд, а в точке y будем наблюдать результирующий потенциал.

Пусть в точке $x \in D$ расположен единичный положительный элекрический заряд. Он индуцирует на заземлённой S некоторе распределение зарядов.

Тогда потенциал электростатического поля в точке $y \in D$ есть сумма потенциала, созданного единичным зарядом, и потенциала, созданного индуцированными на S зарядами:

$$G(x,\ y) = \frac{1}{|x-y|} + g(x,\ y).$$

При этом функция $g(x,\ y)$, соответствующая потенциалу, созданному индуцированными на S зарядами, является гармонической как по $x \in D$, так и по $y \in D$.

При такой интерпретации, свойство симметричности функции Грина $G(x,\ y) = G(y,\ x)$ является математическим выражением **принципа взаимности** в физике: источник, помещённый в точке x производит в точке y такое же действие, какое производит в точке x такой же источник, помещённый в точке y. Заметим, что функцию Грина называют также **функцией точечного источника**. Заметим также, что в некоторых книгах, например, в книге Тихонов А.Н., Самарский А.А. "Уравнения математической физики"(Гл. 4, §4), коэффициент $\frac{1}{\omega_n}$ ставится не в формуле представления решения (0.4), а в определении функции источника.

Таким образом, чтобы научиться решать задачу Дирихле, надо уметь находить функцию $G = E+g$, а поскольку E – известная функция ((0.3),стр. 1), вся задача сводится к построению функции $g(x,\ \xi)$. По опеределению функции Грина, от g требуется, чтобы

$$\Delta_x g(x,\ \xi) = \Delta_\xi g(x,\ \xi) = 0, \qquad x, \xi \in D; \tag{0.5}$$

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}. \tag{0.6}$$

Эти условия, фактически, представляют собой также задачу Дирихле, только уже для функции g. Однако, эта задача во многих случаях существенно проще исходной, так как в ней граничная функция имеет очень специальный вид, а в исходной задаче она совершенно произвольна. Кроме того, найдя функцию Грина для задачи Дирихле в области D, мы сразу получаем решения всех задач Дирихле в этой области.

Наиболее распространённым способом построения функции Грина являеся **метод отражений (электростатических изображений)**. Его идея состоит в том, что функция g, представляющая собой поле индуцированных на S зарядов, строится как поле зарядов, расположенных вне области D, и таких, чтобы

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}.$$

Её можно найти, располагая заряды подходящей величины в точках, симметричных относительно S точкам, в которых расположены заряды внутри D.

0.2.2. Алгоритм

Шаг 1. Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3).

Шаг 2. Помещаем в точку $\xi \in D$ единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^* точку, симметричную точке ξ относительно поверхности S, и помещаем в ξ^* заряд $q(\xi)$.

Шаг 3. Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)q|\xi^*-x|^{n-2}} & n > 2, \\ \ln\Big(q\,|\xi^* - x|\Big) & n = 2, \end{cases}$$

подбирая подходящим образом заряд q. Так определённая функция g будет гармонической (то есть удовлетворяющей уравнению Лапласа), поскольку E – гармоническая. По этому находить q надо из условия (0.6). При этом удобно считать, что точка $x \in S$, – тогда q находится из краевого условия $g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}$. (Поскольку в формуле (0.4) интеграл берётся по $\xi \in S$, а функции E, g и G обладают свойством симметричности, полученная функция $G = E + g$ будет удовлетворять определению функции Грина.)

Шаг 4. Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$. (В ответе надо избавиться, по возможности от выражений, зависящих от ξ^*, выразив координаты ξ^* через координаты ξ. Это делается потому, что в формуле (0.4) $\xi \in S$, и $\xi^* = \xi$, а не $x \in S$, как на Шаге 3.)

Задача 1.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в полуплоскости* $x_2 > 0$.

<u>Шаг 1.</u> Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3). Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{1.1}$$

<u>Шаг 2.</u> Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2),\ \ \xi_2 > 0$, единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^* точку, симметричную точке ξ относительно прямой $S = \{\xi_2 = 0\}$.

$$\xi^* = (\xi_1,\ -\xi_2). \tag{1.2}$$

<u>Шаг 3.</u> Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = \ln\Big(q\,|\xi^* - x|\Big) = \ln q + \frac{1}{2}\,\ln\left((\xi_1 - x_1)^2 + (-\xi_2 - x_2)^2\right) =$$
$$= \ln q + \frac{1}{2}\,\ln\left((\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2\right).$$

Чтобы выпонялось краевое условие $g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}$, очевидно, необходимо взять $q(\xi) \equiv 1$. При таком выборе, безусловно, будет выполнятся и уравнение Лапласа $\Delta_\xi g(x,\ \xi) = 0$ (поскольку оно выполняется для $E(x,\ \xi)$).
Таким образом,

$$g = \ln\left((\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2\right).$$

<u>Шаг 4.</u> Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \ln|\xi^* - x| - \ln|\xi - x| = \ln\frac{|\xi^* - x|}{|\xi - x|} = \ln\frac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2}{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}.$$

<u>Ответ:</u> $\qquad G(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi^* - x|}{|\xi - x|} = \ln\frac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2}{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}.$

Задача 2.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в полупространстве* $x_3 > 0$.

<u>Шаг 1.</u> Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3). Для данного двумерного случая $n = 3$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = \frac{1}{|\xi - x|}, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}. \tag{2.1}$$

<u>Шаг 2.</u> Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3),\ \ \xi_3 > 0$, единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^* точку, симметричную точке ξ относительно плоскости $S = \{\xi_3 = 0\}$.

$$\xi^* = (\xi_1,\ \xi_2,\ -\xi_3). \tag{2.2}$$

<u>Шаг 3.</u> Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = -\frac{1}{q\,|\xi^* - x|} = -\frac{1}{q\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (-\xi_3 - x_3)^2}} =$$
$$= -\frac{1}{q\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 + x_3)^2}}.$$

Чтобы выпонялось краевое условие $g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}$, очевидно, необходимо взять $q \equiv 1$. При таком выборе, безусловно, будет выполнятся и уравнение Лапласа $\Delta_\xi g(x,\ \xi) = 0$ (поскольку оно выполняется для $E(x,\ \xi)$).
Таким образом,

$$g = -\frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 + x_3)^2}}.$$

Шаг 4. Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{|\xi - x|} - \frac{1}{|\xi^* - x|}.$$

Ответ: $\quad G(x,\ \xi) = \frac{1}{\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3-x_3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3+x_3)^2}}.$

Задача 3.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в круге* $|x - x^0| < R$.

Шаг 1. Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3). Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{3.1}$$

Шаг 2. Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$, $(\xi_1 - x_1^0)^2 + (\xi_2 - x_1^0)^2 < R^2$, единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^* точку, симметричную точке ξ относительно окружности

$$S = \{|x - x^0| = R\},$$

то есть точку, лежащую на луче $[x^0,\ \xi)$ на таком расстоянии $|\xi^* - x^0|$ от центра окружности, чтобы $|\xi - x^0| \cdot |\xi^* - x^0| = R^2$. Или в векторном виде:

$$\overrightarrow{x^0\xi^*} = \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\ \overrightarrow{x^0\xi},$$

откуда

$$\xi^* = x^0 + \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\ \left(\xi - x^0\right). \tag{3.2}$$

Шаг 3. Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = \ln\Big(q\,|\xi^* - x|\Big) = \ln q + \ln|\xi^* - x|\,. \tag{3.3}$$

Чтобы правильно подобрать величину заряда q, положим $x \in S$, то есть $|x - x^0| = R$ (см. рис. 1). Тогда треугольники $\Delta x^0\xi x$ и $\Delta x^0 x\xi^*$ подобны, так как угол при вершине x^0 у них общий, а прилегающие к нему стороны пропорциональны:

$$\frac{|\xi - x^0|}{|x - x^0|} = \frac{|x - x^0|}{|\xi^* - x^0|}$$

в силу свойства симметричных точек ξ и ξ^*:

$$\left|\xi - x^0\right| \cdot \left|\xi^* - x^0\right| = R^2.$$

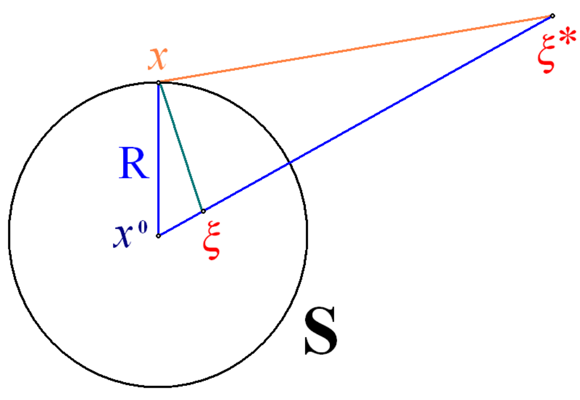

Рис. 1: Симметричные точки и подобные треугольники

Величина q должна быть такой, чтобы для функции g вида (3.3) выполнялось краевое условие

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}.$$

В нашем случае это означает, что

$$q = \frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}.$$

И из подобия треугольников $\Delta x^0\xi x$ и $\Delta x^0 x\xi^*$ окончательно получаем

$$q = \frac{|\xi - x^0|}{R}. \tag{3.4}$$

Итак,

$$g(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi - x^0|}{R} + \ln|\xi^* - x| = \ln\frac{|\xi - x^0|\cdot|\xi^* - x|}{R}.$$

<u>Шаг 4.</u> Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi - x^0|\cdot|\xi^* - x|}{R} - \ln|\xi - x| = \ln\frac{|\xi - x^0|\cdot|\xi^* - x|}{R\,|\xi - x|}.$$

Чтобы избавиться в ответе от ξ^*, ещё раз воспользуемся симметричностью точек ξ и ξ^*:

$$\left|\xi - x^0\right|\cdot\left|\xi^* - x^0\right| = R^2$$

и векторным соотношением:

$$\xi^* - x \equiv \overrightarrow{x\xi^*} = \overrightarrow{x^0\xi^*} - \overrightarrow{x^0x} = \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\cdot\overrightarrow{x^0\xi} - \overrightarrow{x^0x},$$

откуда

$$\frac{|\xi^* - x|}{R} = R\left|\frac{x - x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{|\xi - x^0|^2}\right|$$

Окончательно получаем:

<u>Ответ:</u> $\qquad G(x,\ \xi) = \ln\frac{R\left|\xi - x^0\right|\cdot\left|\frac{x - x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{|\xi - x^0|^2}\right|}{|\xi - x|}.$

Задача 4.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в шаре* $|x - x^0| < R$.

<u>Шаг 1.</u> Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3). Для данного двумерного случая $n = 3$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\frac{1}{|\xi - x|}, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}. \tag{4.1}$$

<u>Шаг 2.</u> Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$, $(\xi_1 - x_1^0)^2 + (\xi_2 - x_1^0)^2 < R^2$, единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^* точку, симметричную точке ξ относительно сферы

$$S = \{|x - x^0| = R\},$$

то есть точку, лежащую на луче $[x^0,\ \xi)$ на таком расстоянии $|\xi^* - x^0|$ от центра окружности, чтобы $|\xi - x^0|\cdot|\xi^* - x^0| = R^2$. Или в векторном виде:

$$\overrightarrow{x^0\xi^*} = \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\,\overrightarrow{x^0\xi},$$

откуда
$$\xi^* = x^0 + \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\ \left(\xi - x^0\right). \tag{4.2}$$

Шаг 3. Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде
$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = -\ \frac{1}{q\,|\xi^* - x|}. \tag{4.3}$$

Чтобы правильно подобрать величину заряда q, положим $x \in S$, то есть $|x - x^0| = R$ (см. рис. 1). Тогда треугольники $\Delta x^0\xi x$ и $\Delta x^0 x\xi^*$ подобны, так как угол при вершине x^0 у них общий, а прилегающие к нему стороны пропорциональны:
$$\frac{|\xi - x^0|}{|x - x^0|} = \frac{|x - x^0|}{|\xi^* - x^0|}$$
в силу свойства симметричных точек ξ и ξ^*:
$$\left|\xi - x^0\right| \cdot \left|\xi^* - x^0\right| = R^2.$$

Величина q должна быть такой, чтобы для функции g вида (3.3) выполнялось краевое условие
$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}.$$

В нашем случае это означает, что
$$q = \frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}.$$

И из подобия треугольников $\Delta x^0\xi x$ и $\Delta x^0 x\xi^*$ окончательно получаем
$$q = \frac{|\xi - x^0|}{R}.$$

Итак,
$$g(x,\ \xi) = -\ \frac{R}{|\xi - x^0| \cdot |\xi^* - x|}.$$

Шаг 4. Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.
$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{|\xi - x|} -\ \frac{R}{|\xi - x^0| \cdot |\xi^* - x|}.$$

Чтобы избавиться в ответе от ξ^*, ещё раз воспользуемся симметричностью точек ξ и ξ^*:
$$\left|\xi - x^0\right| \cdot \left|\xi^* - x^0\right| = R^2$$
и векторным соотношением:
$$\xi^* - x \equiv \overrightarrow{x\xi^*} = \overrightarrow{x^0\xi^*} - \overrightarrow{x^0x} = \frac{R^2}{\left|\xi - x^0\right|^2} \cdot \overrightarrow{x^0\xi} - \overrightarrow{x^0x},$$
откуда
$$\frac{|\xi^* - x|}{R} = R\left|\frac{x - x^0}{R^2} -\ \frac{\xi - x^0}{\left|\xi - x^0\right|^2}\right|$$

Окончательно получаем:

Ответ: $G(x,\ \xi) = \frac{1}{|\xi - x|} -\ \frac{1}{R|\xi - x^0| \cdot \left|\frac{x - x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{\left|\xi - x^0\right|^2}\right|}.$

Задача 5.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в четверть-плоскости* $D = \{x_1 > 0, \ \ x_2 > 0\}$.

Шаг 1. Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3). Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x, \ \xi) = -\ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{5.1}$$

Шаг 2.

Помещаем в точку $\xi = (\xi_1, \ \xi_2) \in D$ единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^*, ξ^- точки, симметричную точке ξ относительно прямых $\{\xi_1 = 0\}$ и $\{\xi_2 = 0\}$, а через ξ^+ – точку, симметричную точкам ξ^*, ξ^- относительно прямых $\{\xi_2 = 0\}$ и $\{\xi_1 = 0\}$, соответственно.

$$\begin{aligned} \xi^* &= (-\xi_1, \ \xi_2), \\ \xi^- &= (\xi_1, \ -\xi_2), \\ \xi^+ &= (-\xi_1, \ -\xi_2). \end{aligned}$$

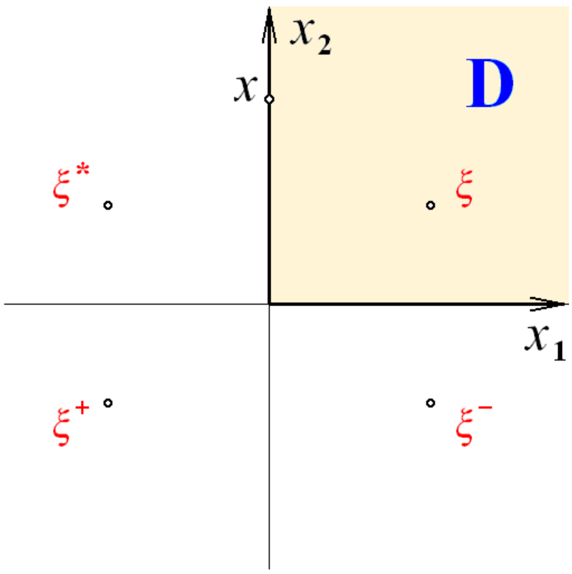

Рис. 2: Отражения точки ξ от границ угла

Шаг 3. Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(q_1 x, \ q_1\xi^*) - E(q_2 x, \ q_2\xi^-) + E(q_3 x, \ q_3\xi^+) = \\ = \ln\frac{q_1 q_2}{q_3} + \ln\frac{|\xi^* - x| \cdot |\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|}.$$

Чтобы выпонялось краевое условие

$$g(x, \ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x, \ \xi)\Big|_{x\in S},$$

возьмём $q_1 = q_2 = q_3 = 1$. Таким образом,

$$g = \ln\frac{|\xi^* - x| \cdot |\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|}.$$

Шаг 4. Строим функцию Грина по формуле $G(x, \ \xi) = E(x, \ \xi) + g(x, \ \xi)$.

$$G(x, \ \xi) = \ln\frac{|\xi^* - x| \cdot |\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|} - \ln|\xi - x| = \ln\frac{|\xi^* - x| \cdot |\xi^- - x|}{|\xi^+ - x| \cdot |\xi - x|}.$$

Здесь легко заметить, что выбор $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ был удачен: в самом деле, тогда, как и требует определение функции Грина,

$$G(x, \ \xi)\Big|_{x\in S} = \ln\frac{|\xi^* - x| \cdot |\xi^- - x|}{|\xi^+ - x| \cdot |\xi - x|} = \ln(1\cdot 1) = 0.$$

Приводить полученную функцию Грина к виду, где нет ξ^*, ξ^-, ξ^+, не станем (это громоздко, но несложно).

Ответ: $\quad G(x, \ \xi) = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|\cdot|\xi - x|}$.

Задача 6.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в полукруге* $D = \{x_1^2 + x_2^2 \leqslant R,\ \ x_2 > 0\}$.

Шаг 1. Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3). Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{5.1}$$

Шаг 2.

Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2) \in D$ единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^* – точку, симметричную точке ξ относительно окружности, через ξ^- – точку, симметричную точке ξ, относительно прямой $\{\xi_2 = 0\}$, а через ξ^+ – точку, симметричную точке ξ^* относительно прямой $\{\xi_2 = 0\}$, а точке ξ^- относительно окружности.

$$\xi^* = \frac{R^2}{|\xi|^2}\,\xi,$$
$$\xi^- = (\xi_1,\ -\xi_2),$$
$$\xi^+ = \frac{R^2}{|\xi|^2}\,\xi^-.$$

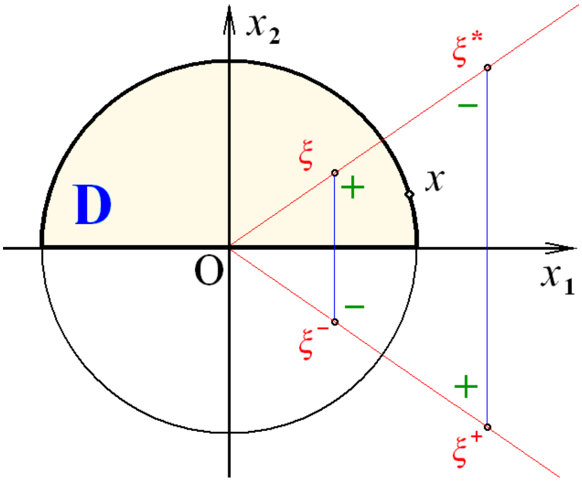

Рис. 3: Отражения точки ξ от границ полукруга

Шаг 3. Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(q_1 x,\ q_1\xi^*) - E(q_2 x,\ q_2\xi^-) + E(q_3 x,\ q_3\xi^+) = \\ = \ln\frac{q_1 q_2}{q_3} + \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|}.$$

Чтобы выпонялось краевое условие

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = \ln|\xi - x|\,\Big|_{x\in S},$$

возьмём заряд внутри полной окружности $q_2 = 1$, а симметричные ему и заряду в точке ξ относительно окружности $q_1 = q_3 = \frac{|\xi|}{R}$ (по аналогии с формулой (3.4), стр. 6). Таким образом,

$$g = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|}.$$

Шаг 4. Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|} - \ln|\xi - x| = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|\cdot|\xi - x|}.$$

Здесь легко заметить, что выбор $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ был удачен: в самом деле, тогда, как и требует определение функции Грина,

$$G(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|\cdot|\xi - x|} = \ln(1) = 0.$$

Приводить полученную функцию Грина к виду, где нет ξ^*, ξ^-, ξ^+, не станем (это несложно, но громоздко).
Заметим, что, хотя вид ответа точно такой же, что и в задаче №5, функция G здесь иная, поскольку совершенно иначе вычисляются координаты точек ξ^* и ξ^+.

Ответ: $G(x,\ \xi) = \ln \frac{|\xi^*-x|\cdot|\xi^- -x|}{|\xi^+-x|\cdot|\xi-x|}$.

Задача 7.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в четверти круга* $D = \{x_1^2 + x_2^2 \leqslant R,\ \ x_{1,2} > 0\}$.

Шаг 1. Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3). Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{5.1}$$

Шаг 2.

Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2) \in D$ единичный положительный заряд. Строим точки ξ_1^*, ξ_2^*, ξ_3^* – точки, симметричные точке ξ относительно сторон четверти круга. Далее строим точки ξ_4^*, ξ_5^*, ξ_6^*, ξ_7^*, симметричные построенным точкам относительно продолжений сторон четверти круга (то есть относительно окружности и прямых $\{\xi_1 = 0\}$, $\{\xi_2 = 0\}$) (см. рисунок 4).

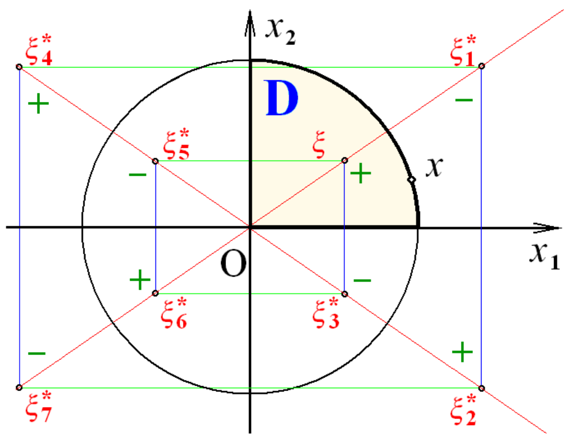

Рис. 4: Отражения точки ξ от границ четверти круга

Шаг 3. Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(q_1x,\ q_1\xi_1^*) + E(q_2x,\ q_2\xi_2^*) - E(q_3x,\ q_3\xi_3^*) + E(q_4x,\ q_4\xi_4^*) - E(q_5x,\ q_5\xi_5^*) + E(q_6x,\ q_6\xi_6^*) -$$
$$- E(q_7x,\ q_7\xi_7^*) = \ln\frac{q_1q_3q_5q_7}{q_2q_4q_6} + \ln\frac{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_3^* - x|\cdot|\xi_5^* - x|\cdot|\xi_7^* - x|}{|\xi_2^* - x|\cdot|\xi_4^* - x|\cdot|\xi_6^* - x|}.$$

Чтобы выпонялось краевое условие

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = \ln|\xi - x|\,\Big|_{x\in S},$$

возьмём заряды внутри полной окружности $q_3 = q_5 = q_6 = 1$, а симметричные им и заряду в точке ξ относительно окружности $q_1 = q_2 = q_4 = q_7 = \frac{|\xi|}{R}$ (по аналогии с формулой (3.4), стр. 6). Таким образом,

$$g = \ln\frac{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_3^* - x|\cdot|\xi_5^* - x|\cdot|\xi_7^* - x|}{|\xi_2^* - x|\cdot|\xi_4^* - x|\cdot|\xi_6^* - x|}.$$

Шаг 4. Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_3^* - x|\cdot|\xi_5^* - x|\cdot|\xi_7^* - x|}{|\xi_2^* - x|\cdot|\xi_4^* - x|\cdot|\xi_6^* - x|} - \ln|\xi - x| = \ln\frac{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_3^* - x|\cdot|\xi_5^* - x|\cdot|\xi_7^* - x|}{|\xi_2^* - x|\cdot|\xi_4^* - x|\cdot|\xi_6^* - x|\cdot|\xi - x|}.$$

Здесь легко заметить, что выбор $q_1, \ldots, q_7$ был удачен: в самом деле, тогда, как и требует определение функции Грина,

$$G(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = \ln\frac{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_3^* - x|\cdot|\xi_5^* - x|\cdot|\xi_7^* - x|}{|\xi_2^* - x|\cdot|\xi_4^* - x|\cdot|\xi_6^* - x|\cdot|\xi - x|}\Big|_{x\in S} = \ln(1) = 0.$$

Приводить полученную функцию Грина к виду, где нет $\xi_1^*,\ \ldots,\ \xi_7^*$, не станем (это не очень сложно, но очень громоздко).

<u>Ответ:</u> $G(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_3^* - x|\cdot|\xi_5^* - x|\cdot|\xi_7^* - x|}{|\xi_2^* - x|\cdot|\xi_4^* - x|\cdot|\xi_6^* - x|\cdot|\xi - x|}$.