1. Задача для уравнения теплопроводности в шаре.

1.1. Постановка 1-ой, 2-ой и 3-ей краевых задач в шаре

Введём обозначения:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$B_R = \{(x,y,z): \quad r^2 < R^2\} \quad - \quad \text{открытый шар радиуса } R$$
$$\Gamma_R \equiv \partial B = \{(x,y,z): \quad r^2 = R^2\} \quad - \quad \text{сфера радиуса } R$$
$$\overline{B}_R \equiv B_R \bigcup \Gamma_R = \{(x,y,z): \quad r^2 \leqslant R^2\} \quad - \quad \text{замкнутый шар радиуса } R$$
$$\Omega_T = B_R \times (0,\ T) = \{(x,y,z;t): \quad r^2 < R^2; \ \ t \in (0,T)\} \quad - \quad \text{открытый цилиндр}$$
$$\Omega_T^* = B_R \times (0,\ T] = \{(x,y,z;t): \quad r^2 < R^2; \ \ t \in (0,T]\} \quad - \quad \text{открытый цилиндр с «верхней крышкой}$$
$$\overline{\Omega}_T = \overline{B}_R \times [0,\ T] = \{(x,y,z;t): \quad r^2 \leqslant R^2; \ \ t \in [0,T]\} \quad - \quad \text{замкнутый цилиндр}$$

1-ая краевая задача.
Найти функцию $u(x,\ y,\ z,\ t)$ *в классе* $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega^*_T)\bigcap C(\overline{\Omega}_T)$ *из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & \text{в } \ \Omega^*_T; \\ u(x,\ y,\ z,\ 0) = f(x,\ y,\ z), & \text{в } \ B_R; \\ u(x,\ y,\ z,\ t)\Big|_{r=R} = \mu(x,\ y,\ z,\ t) & 0 < t < T, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $a > 0$ – заданное число, $f \in C(\overline{B})$, $\mu \in C(\Gamma_R)$ – заданные функции.

2-ая краевая задача.
Найти функцию $u(x,\ y,\ z,\ t)$ *в классе* $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega^*_T)\bigcap C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega}_T)$ *из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & \text{в } \ \Omega^*_T; \\ u(x,\ y,\ z,\ 0) = f(x,\ y,\ z), & \text{в } \ B_R; \\ \frac{\partial u}{\partial r}(x,\ y,\ z,\ t)\big|_{r=R} = \nu(x,\ y,\ z,\ t) & 0 < t < T, \end{cases} \tag{1.2}$$

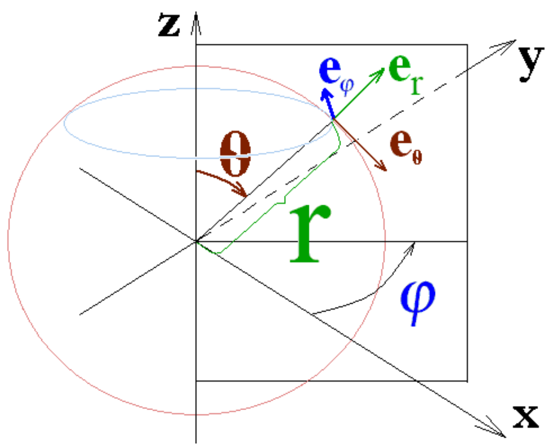
где $a > 0$ – заданное число, $f \in C^1(\overline{B})$, $\nu \in C(\Gamma_R)$ – заданные функции.

3-ая краевая задача.
Найти функцию $u(x,\ y,\ z,\ t)$ *в классе* $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega^*_T)\bigcap C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega}_T)$ *из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & \text{в } \ \Omega^*_T; \\ u(x,\ y,\ z,\ 0) = f(x,\ y,\ z), & \text{в } \ B_R; \\ \frac{\partial u}{\partial r}(x,\ y,\ z,\ t) + hu(x,\ y,\ z,\ t)\big|_{r=R} = \varkappa(x,\ y,\ z,\ t) & 0 < t < T, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $a > 0$ – заданное число, $f \in C^1(\overline{B})$, $\varkappa \in C(\Gamma_R)$ – заданные функции.

1.2. Сферические координаты



При решении задач в шаре удобно использовать сферические координаты $(r,\ \theta,\ \varphi)$:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{1.4}$$

Заданная таким образом тройка $(r,\ \theta,\ \varphi)$ является правой.

Обозначим через $\tilde{u}(r,\ \theta,\ \varphi;\ t)$ сложную функцию

$$\tilde{u}(r,\ \theta,\ \varphi;\ t) = u\big(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta;\ t\big). \tag{1.5}$$

Всюду ниже будем полагать выполненными условия:

$$f \equiv \tilde{f}(r), \qquad \mu \equiv const, \qquad \nu \equiv const, \qquad \varkappa \equiv const. \tag{1.6}$$

Из них сразу следует, что и решение $\tilde{u}$ задачи (1.1), (1.2) или (1.3) зависит только от r:

$$\Longrightarrow \qquad \tilde{u} = \tilde{u}(r).$$

Оператор Лапласа в сферических координатах

Оператор Лапласа, имеющий в декартовых координатах $(x,\ y,\ z)$ вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z},$$

в сферических координатах (1.4) примет вид:[1]

$$\Delta\tilde{u} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2}. \tag{1.7}$$

С учётом, что $\tilde{u} = \tilde{u}(r)$, то есть $\tilde{u}$ не зависит от θ и φ, при выполнении (1.6) получаем:

$$\Delta\tilde{u} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right). \tag{1.8}$$

1.3. 1-ая краевая задача в сферических координатах

Рассмотрим задачу (1.1) в сферических координатах при выпонении условий (1.6) и $\mu \equiv 0$: *Найти функцию $u(r,\ t)$ из условий*

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = \frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ \tilde{u}(r,\ 0) = f(r), & 0 \leqslant r < R; \\ \tilde{u}(R,\ t) = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Поскольку

$$\frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right) = a^2\,\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{2a^2}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r} \equiv \frac{a^2}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(r\tilde{u}\big),$$

[1] Подробнее см. http://tkachenko-mephi.narod.ru/KK.rar, стр. 12–13.

то уравнение $\tilde{u}_t = \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right)$ преобразуется к виду

$$\Big(r\tilde{u}\Big)_t = a^2\Big(r\tilde{u}\Big)_{rr}.$$

Тогда естественно сделать замену:

$$v(r) = r\tilde{u}. \tag{1.10}$$

Для функции v уравнение примет, таким образом, вид

$$v_t(r,\,t) = a^2 v_{rr}(r,\,t),$$

а начальное условие $\tilde{u}(r,\,0) = f(r)$ перепишется как

$$v(r,\,0) = rf(r).$$

Итак, первая краевая задача при сделанных предположениях после замены u на новую неизвестную функцию $v(r,\,t)$ окончательно принимает вид: *Найти функцию $v(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr}, & \text{в прямоугольнике } \ 0 < r < R, \ \ 0 < t \leqslant T; \\ v(r,\,0) = rf(r), & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ v(R,\,t) = 0, \quad v(0,\,t) = 0, & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{1.11}$$

Почему вдруг добавилось новое условие $v(0,\,t) = 0$?

С одной стороны, оно следует из равенства $v(r,\,t) = r\tilde{u}(r,\,t)$, если $u(\tilde{r},\,t)$ ограничена в окрестности $r = 0$. А поскольку мы ищем только ограниченные решения $u(x,\,y,\,z,\,t)$, и даже непрерывные, то появление условия $v(0,\,t) = 0$ вполне оправдано.

С другой стороны, без этого условия задача (1.11) оказалась бы некорректно поставленной, а с условием $v(0,\,t) = 0$ она является знакомой нам по прошлому семестру начально-краевой задачей для одномерного уравнения теплопроводности.

2. № 705.

Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ u(r,\,0) = f(r), & \text{в } \ B_R; \\ u(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{5.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Замена неизвестной функции

Повторяя действия из пункта 1.3, для новой неизвестной функции

$$v(r,\,t) = ru(r,\,t)$$

получаем задачу: *Найти функцию $v(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr}, & \text{в прямоугольнике } \ 0 < r < R, \ \ 0 < t \leqslant T; \\ v(r,\,0) = rf(r), & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ v(R,\,t) = 0, \qquad v(0,\,t) = 0, & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{5.2}$$

<u>Шаг 2.</u> Будем искать решение уравнения $v_t = a^2 v_{rr}$ с краевыми условиями $v(0,t) = v(R,t) = 0$ в виде

$$V(r,t) = \mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t).$$

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $\mathbf{X}(r)$ следующее:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(R) = 0. \tag{5.3}$$

Подставим $V(r,t)$ в уравнение, получим:

$$\mathbf{X}(r)\mathbf{T}'(t) = a^2\mathbf{X}"(r)\mathbf{T}(t)$$

Предположив, что $\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t) \neq 0$:

$$-\frac{\mathbf{X}"(r)}{\mathbf{X}(r)} = -\frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $\mathbf{X}(r)$ имеем задачу

$$\mathbf{X}"(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{5.4}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0, \tag{5.5}$$

а для функции $\mathbf{T}(t)$ – уравнение:

$$\mathbf{T}'(t) + \lambda a^2\mathbf{T}(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{5.6}$$

Задача (5.4)–(5.5) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (5.4) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,r) \qquad \text{при} \ \ \lambda > 0; \tag{5.7}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}\,r} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,r} \qquad \text{при} \ \ \lambda < 0; \tag{5.8}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1r + c_2 \qquad \text{при} \ \ \lambda = 0; \tag{5.9}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\,R = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.10}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1r$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \quad \mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (5.4), (5.5). Стало быть, рассматривать задачу (5.6) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$\mathbf{T}_n'(t) + \frac{\pi^2a^2n^2}{R^2}\mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{5.12}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_n(t) = A_ne^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t} \tag{5.13}$$

где A_n – произвольные постоянные.

Шаг 3. Решаем задачу (5.2).

Будем искать решение задачи (5.2) в виде $v(r,\,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$v(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n r}{R} A_n e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}. \tag{5.14}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $v(r,\,0) = rf(r)$. Для функции $v(r,\,t)$ искомого вида (5.15) они означают:

$$rf(r) = v(r,\,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n r}{R}, \tag{5.15}$$

$$\tag{5.16}$$

Пусть функция $rf(r)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд Фурье по синусам:

$$rf(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{\pi n r}{R}, \tag{5.17}$$

с коэффициентами

$$\alpha_n = \frac{2}{R}(rf, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R rf(r)\sin\frac{\pi n r}{R}dr. \tag{5.18}$$

Таким образом, для коэффициентов A_n из представления (5.15) решения $v(r,\,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{R}\int\limits_0^R rf(r)\sin\frac{\pi n r}{R}dr. \tag{5.19}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (5.15) найденные коэффициенты A_n из (5.19). Получим:

$$v(r,\,t) = \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^R \rho f(\rho)\sin\frac{\pi n \rho}{R}d\rho\right) e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi n r}{R}.$$

Отсюда, вспоминая о замене $v(r,\,t) = ru(r,\,t)$, получаем

Ответ: $u(r,\,t) = \frac{2}{rR}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^R \rho f(\rho)\sin\frac{\pi n \rho}{R}d\rho\right) e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi n r}{R}$.

6. № 706.

Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = f(r), & 0 \leqslant r < R; \\ u_r(R,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Шаг 1. Замена неизвестной функции

Действуя аналогично пункту 1.3, для новой неизвестной функции

$$v(r,\;t) = ru(r,\;t)$$

получаем задачу: *Найти функцию* $v(r,\, t)$ *из условий*

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr}, & \text{в прямоугольнике } \ 0 < r < R, \ \ 0 < t \leqslant T; \\ v(r,\, 0) = r f(r), & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ R v_r(R,\, t) - v(R,\, t) = 0, \qquad v(0,\, t) = 0 & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{6.2}$$

Заметим, что условие $u_r(R,\, t) = 0$ означает для $v(r,\, t) = r u(r,\, t)$, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)_{r=R} = \frac{r v_r - v}{r^2}\bigg|_{r=R} = \frac{R v_r(R,\, t) - v(R,\, t)}{R^2} = 0,$$

откуда и взялось краевое условие 3-го рода в задаче для v.

<u>Шаг 2.</u> Будем искать решение уравнения $v_t = a^2 v_{rr}$ с краевыми условиями $v(0,t) = R v_r(R,\, t) - v(R,\, t) = 0$ в виде

$$V(r,t) = \mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t).$$

Краевые условия означают для функции $\mathbf{X}(r)$ следующее:

$$\mathbf{X}(0) = 0, \qquad R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0. \tag{6.3}$$

Подставим $V(r,t)$ в уравнение, получим:

$$\mathbf{X}(r)\mathbf{T}'(t) = a^2 \mathbf{X}''(r)\mathbf{T}(t)$$

Предположив, что $\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t) \neq 0$:

$$-\frac{\mathbf{X}''(r)}{\mathbf{X}(r)} = -\frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $\mathbf{X}(r)$ имеем задачу

$$\mathbf{X}''(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{6.4}$$
$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0, \tag{6.5}$$

а для функции $\mathbf{T}(t)$ – уравнение:

$$\mathbf{T}'(t) + \lambda a^2 \mathbf{T}(t) = 0, \qquad\qquad t > 0. \tag{6.6}$$

Задача (6.4)–(6.5) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (6.4) имеет вид

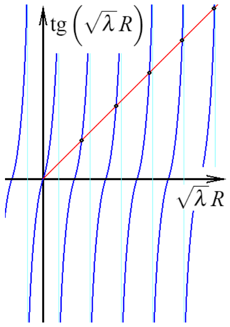
$$\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, r) \qquad \text{при } \ \lambda > 0; \tag{6.7}$$
$$\mathbf{X}(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, r} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, r} \qquad \text{при } \ \lambda < 0; \tag{6.8}$$
$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \ \lambda = 0; \tag{6.9}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что

$$c_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'(r) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, r).$$

  Поэтому из второго краевого условия $R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что

$$\sqrt{\lambda}\, R\cos(\sqrt{\lambda}\, R) - \sin(\sqrt{\lambda}\, R) = 0,$$



откуда

$$\sqrt{\lambda}\,R = \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\,R). \tag{6.10}$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$\lambda_n: \qquad \sqrt{\lambda_n}\,R = \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.11}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n} r\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.12}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 R - c_1 R = 0$ – верное при всех c_1 тождество. Поэтому задача Штурма–Лиувилля имеет собственное число, равное нулю, и соответствующую ему собственную функцию

$$\mathbf{X}_0(r) = r, \qquad n = 0. \tag{6.13}$$

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_n: \quad \sqrt{\lambda_n}\,R = \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\left\{\mathbf{X}_n(r)\right\} = \left\{r, \ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right)\right\}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

задачи (6.4), (6.5). Стало быть, рассматривать задачу (6.6) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$\mathbf{T}_n'(t) + a^2\lambda_n \mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad t > 0, \quad n \geqslant 0. \tag{6.14}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$\left\{\mathbf{T}_n(t)\right\} = \left\{A_0, \ \mathbf{T}_n(t) = A_n e^{-a^2\lambda_n t}\right\}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.15}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (6.2).

Будем искать решение задачи (6.2) в виде $v(r,\,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$v(r,\,t) = A_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) A_n e^{-a^2\lambda_n t}. \tag{6.16}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $v(r,\,0) = rf(r)$. Для функции $v(r,\,t)$ искомого вида (6.22) они означают:

$$rf(r) = v(r,\,0) = A_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(0) = A_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right), \tag{6.17}$$

$$\tag{6.18}$$

Пусть функция $rf(r)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд Фурье по собственным функция задачи Штурма–Лиувилля:

$$rf(r) = \alpha_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right), \tag{6.19}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты $\alpha_n \equiv A_n$. Для этого домножим (6.19) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\sqrt{\lambda_m}\, r\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,R]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):

$$(rf, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int_0^R \sin^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, r\right) dr = \frac{\alpha_m}{2} \int_0^R \left(1 - \cos\left(2\sqrt{\lambda_m}\, r\right)\right) dr =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}} \sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\, r\right)\Big|_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\, R\right)}{2\sqrt{\lambda_m}}\right).$$

откуда, пользуясь тождествами $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем:

$$R - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\, R\right)}{2\sqrt{\lambda_m}} = \left[\sqrt{\lambda_m} = \frac{\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\, R)}{R}\right] = R - \frac{R\sin\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right)}{\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\, R)} =$$

$$= R - R\cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right) = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}\right] =$$

$$= R - \frac{R}{1+\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right)} = \left[\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right) = \lambda_m\, R^2\right] = R - \frac{R}{1+\lambda_m\, R^2} =$$

$$= \frac{\lambda_m\, R^3}{1+\lambda_m\, R^2}.$$

В итоге для коэффициентов $\alpha_n \equiv A_n$ получаем равенство:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2\left(1+\lambda_n\, R^2\right)}{\lambda_m\, R^3}(rf, \mathbf{X}_n) = \frac{2\left(1+\lambda_n\, R^2\right)}{\lambda_n\, R^3} \int_0^R rf(r)\, \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.20}$$

Осталось найти A_0. Аналогично,

$$(rf, \mathbf{X}_0) = \alpha_0 \int_0^R r^2 dr = \alpha_0 \frac{R^3}{3}, \qquad \text{откуда} \qquad A_0 = \alpha_0 = \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 f(r)\, dr. \tag{6.21}$$

Подставим в формулу (6.22) найденные коэффициенты A_n из (6.20) и (6.21).

$$v(r,\, t) = \left(\frac{3}{R^3}\int_0^R \rho^2 f(\rho)\, d\rho\right) r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left(1+\lambda_n\, R^2\right)}{\lambda_n\, R^3}\int_0^R \rho f(\rho)\, \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, \rho\right) d\rho\right) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) e^{-\,a^2\lambda_n\, t}. \tag{6.22}$$

Вспомним, что $v(r,\, t) = ru(r,\, t)$, и поделим (6.22) на r:

<u>Ответ:</u> $u(r,t) = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R \rho^2 f(\rho)\, d\rho + \frac{2}{rR^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\lambda_n\, R^2}{\lambda_n}\int\limits_0^R \rho f(\rho)\, \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, \rho\right) d\rho\right) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) e^{-\,a^2\lambda_n\, t}$.

7. № 708(а).

Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ u(r,\,0) = T, & \text{в } \ B_R; \\ u(R,\,t) = P, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{7.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Избавление от неоднородности в граничном условии.
Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\,t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и уравнению и неоднородному краевому условию. То есть будем искать решение $u(r,\,t)$ задачи (7.1) в виде

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t),$$

где функция $w(r,\,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2\Delta w \equiv a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right), & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ w(R,\,t) = P, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{7.2}$$

В данном случае краевое условие очень простое, и условия (7.2) выполняются, очевидно, для функции простейшего вида:

$$w(r,\,t) = P. \tag{7.3}$$

Тогда $v(r,\,t) = u - w \equiv u - P$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ v(r,\,0) = T - P, & \text{в } \ B_R; \\ v(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{7.4}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение задачи (7.5).
Задача (7.5) есть частный случай уже решённой нами в номере 705 задачи (5.1) с функцией

$$f(r) = T - P.$$

Воспользуемся результатом номера 705:

$$v(r,\,t) = \frac{2}{rR}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^R \rho f(\rho)\sin\frac{\pi n\rho}{R}d\rho\right)\ e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi n r}{R}. \tag{7.5}$$

Чтобы получить ответ к нашей задаче, нам осталось только посчитать интегралы:

$$\int\limits_0^R \rho f(\rho)\sin\frac{\pi n\rho}{R}d\rho = \int\limits_0^R \rho\,(T-P)\sin\frac{\pi n\rho}{R}d\rho = (T-P)\int\limits_0^R \rho\sin\frac{\pi n\rho}{R}d\rho =$$

$$= \Big[\text{по частям}\Big] = -\,(T-P)\,\frac{R}{\pi n}\left(\rho\cos\frac{\pi n\rho}{R}\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - \int\limits_0^R \cos\frac{\pi n\rho}{R}d\rho\right) =$$

$$= (P-T)\,\frac{R}{\pi n}\left((-1)^n R - \ \frac{R}{\pi n}\sin\frac{\pi n\rho}{R}\Big|_{\rho=0}^{\rho=R}\right) = \frac{(-1)^n R^2}{\pi n}\,(P-T)\,.$$

Таким образом,

$$v(r,\,t) = \frac{2}{rR}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n R^2}{\pi n}\,(P-T)\right)\ e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi n r}{R} = \frac{2R\,(P-T)}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\ e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi n r}{R}.$$

Поэтому, для функции $u(r,\,t) = v(r,\,t) + P$, получаем
<u>Ответ:</u> $u(r,t) = P + \frac{2R(P-T)}{\pi r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\ e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi n r}{R}.$

8. № 708(б).

Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ *из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ u(r,\,0) = T, & \text{в } \ B_R; \\ k\,\frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=R} = q, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Избавление от неоднородности в граничном условии.
Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\,t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и уравнению и неоднородному краевому условию. То есть будем искать решение $u(r,\,t)$ задачи (8.1) в виде

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t),$$

где функция $w(r,\,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2\Delta w \equiv a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right), & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ k\,\frac{\partial w}{\partial r}\big|_{r=R} = q, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.2}$$

Из-за того, что граничное условие – второго рода, w должна содержать хотя бы r в первой степени. Но поскольку в уравнении есть слагаемое $\frac{2}{r}w_r$, которое для функции вида αr превратится в $\frac{2\alpha}{r}$, то просто полином первой степени от r удовлетворить уравнению не сможет.

В этом случае надо искать w в виде

$$w(r,\,t) = \alpha r^2 + \eta(t), \tag{8.3}$$

где $\eta(t)$ подбирается так, чтобы выполнялось уравнение $w_t = a^2\Delta w$.

Подставим искомую функцию w вида (8.3) в граничное условие:

$$k\,\frac{\partial w}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 2k\alpha R = q \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{q}{2kR}.$$

Тогда

$$w(r,\,t) = \frac{q}{2kR}r^2 + \eta(t).$$

Подставим эту функцию в уравнение$w_t = a^2\Delta w = a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right)$:

$$\eta'(t) = a^2\left(\frac{2q}{2kR} + \frac{2}{r}\cdot\frac{2q}{2kR}r\right) = \frac{3qa^2}{kR} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta(t) = \frac{3qa^2}{kR}t + c$$

Константу c возьмём равной нулю, нам ведь не нужно искать все решения (8.2), а достаточно найти самое простое. Итак:

$$w(r,\,t) = \frac{q}{2kR}r^2 + \frac{3qa^2}{kR}t. \tag{8.4}$$

Тогда $v(r,\,t) = u - w$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ v(r,\,0) = T - w(r,\,0) = T - \frac{q}{2kR}r^2 = f(r), & \text{в } \ B_R; \\ v(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.5}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение задачи (8.6).

Задача (8.6) есть частный случай уже решённой нами в номере 706 задачи (6.1) с функцией

$$f(r) = T - \frac{q}{2kR}r^2.$$

Воспользуемся результатом номера 706:

$$v(r,\,t) = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R \rho^2 f(\rho)\,d\rho +$$
$$+\frac{2}{rR^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\lambda_n R^2}{\lambda_n}\int\limits_0^R \rho f(\rho)\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)e^{-\,a^2\lambda_n\,t}, \quad (8.6)$$

где λ_n положительные корни уравнения

$$\sqrt{\lambda_n}\,R = \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R), \quad n\in\mathbb{N}. \quad (8.7)$$

Чтобы получить ответ к нашей задаче, нам осталось только посчитать интегралы:

а) $$\int\limits_0^R \rho^2 f(\rho)d\rho = \int\limits_0^R \rho^2\left(T-\frac{q}{2kR}\rho^2\right)d\rho = \frac{TR^3}{3} - \frac{qR^5}{10kR} = \frac{TR^3}{3} - \frac{qR^4}{10k}$$

б) $$\int\limits_0^R \rho f(\rho)\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho = \int\limits_0^R \rho\left(T-\frac{q}{2kR}\rho^2\right)\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho = -\frac{qR^2}{k\sqrt{\lambda_n}}\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right),$$

поскольку

$$\int\limits_0^R \rho\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho = \Big[\text{по частям}\Big] = \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(\rho\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - \int\limits_0^R \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho\right) =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R}\right) =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R\sqrt{\lambda_n} - \mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)\right)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} = \Big[\text{в силу (8.7)}\Big] = 0$$

и

$$\int\limits_0^R \rho^3\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho = \Big[2\text{ раза по частям}\Big] =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(\rho^3\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - 3\int\limits_0^R \rho^2\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho\right) =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - \frac{3}{\sqrt{\lambda_n}}\left[\rho^2\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - 2\underbrace{\int\limits_0^R \rho\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho}_{=0}\right]\right) =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - 3R^2\,\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\right) =$$
$$= \left[\text{в силу (8.7)},\ \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} = R\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)\right] =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}\,R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right).$$

Итак, коэффициенты A_n равны

$$A_n = \frac{1+\lambda_n\,R^2}{\lambda_n}\int\limits_0^R \rho f(\rho)\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho = \frac{1+\lambda_n\,R^2}{\lambda_n}\cdot\left(-\frac{qR^2}{k\sqrt{\lambda_n}}\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)\right) =$$

$$= \left[\text{в силу (8.7)},\;\; 1+\lambda_n\,R^2 = 1+\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\right] =$$

$$= \frac{-qR^2}{k\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}.$$

Подставив найденные интегралы в (8.6), получаем:

$$v(r,\,t) = \frac{3}{R^3}\left(\frac{TR^3}{3}-\frac{qR^4}{10k}\right)+\frac{2}{rR^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-qR^2}{k\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)e^{-\,a^2\lambda_n\,t} =$$

$$= T-\frac{3qR}{10k}-\frac{2q}{krR}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)e^{-\,a^2\lambda_n\,t}}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\right).$$

Поэтому, для функции $u(r,\,t) = v(r,\,t)+w(r,\,t) = v(r,\,t)+\frac{q}{2kR}r^2+\frac{3qa^2}{kR}t$, получаем

<u>Ответ:</u> $u(r,t) = \frac{q}{2kR}r^2+\frac{3qa^2}{kR}t+T-\frac{3qR}{10k}-\frac{2q}{krR}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)e^{-\,a^2\lambda_n\,t}}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\right).$