1. Задача для неоднородного уравнения теплопроводности в шаре.

1.1. № 711.

Найти ограниченную функцию $u(r,\ t)$ *из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(r,\ t), & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ u(r,\ 0) = 0, & \text{в } \ B_R; \\ u(R,\ t) = 0, \quad |u(r,\ t)| < \infty, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{1.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Замена неизвестной функции
Раз все «входные данные» задачи (функция f и правая часть начального условия) зависят от пространственных переменных только через r, то искать решение надо также в виде функции, зависящей только от r и t:

$$u \equiv u(r,\ t),$$

поэтому оператор Лапласа упрощается, и уравнение принимает вид:

$$u_t = \frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + f(r,\ t).$$

Домножив его на r, с учётом, что

$$\frac{a^2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) \equiv a^2(ru)_{rr}$$

(см. пункт 1.3 семинара 1), окончательно для новой неизвестной функции

$$v(r,\ t) = ru(r,\ t)$$

получаем задачу: *Найти функцию* $v(r,\ t)$ *из условий*

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr} + rf(r,\ t), & \text{в прямоугольнике } \ 0<r<R, \ \ 0<t\leqslant T; \\ v(r,\ 0) = 0, & \text{на интервале } 0<r<R; \\ v(R,\ t) = 0, \qquad v(0,\ t) = 0, & \text{при } 0<t<T. \end{cases} \tag{1.2}$$

(Последнее условие $v(0,\ t) = 0$ получилось, как всегда, из требования ограниченности решения $u(r,\ t)$.)
<u>Шаг 2.</u> Решение задачи Штрума-Лиувилля.
Нашему уравнению соответствует однородное уравнение

$$v_t = a^2 v_{rr}.$$

Если искать его решение, удовлетворяющее краевым условиям $v(R,\ t) = 0,\ \ v(0,\ t) = 0$ в виде $\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t)$, то для функции $\mathbf{X}(r)$ получим задачу Штурма-Лиувилля

$$\mathbf{X}"(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0, \tag{1.4}$$

Общее решение уравнения (1.3) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,r) \qquad \text{при } \ \lambda>0; \tag{1.5}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,r} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,r} \qquad \text{при } \ \lambda<0; \tag{1.6}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \ \lambda=0; \tag{1.7}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, R = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \quad \mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.3), (1.4). **<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (1.2).**

Будем искать решение задачи (1.2) в виде $v(r,\, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$v(r,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n r}{R}. \tag{1.10}$$

Пусть функция $rf(r,\, t)$ правой части уравнения в (1.2) разлагается в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (в данном случае - это стандатртный ряд Фурье по синусам):

$$rf(r,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n r}{R}, \tag{1.11}$$

при этом коэффициенты $f_n(t)$ находятся по формулам:

$$f_n(t) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R rf(r,\, t) \sin\frac{\pi n r}{R}\, dr. \tag{1.12}$$

В самом деле, домножим равенство (1.11) скалярно на $\sin\frac{\pi m r}{R}$ и проинтегрируем по $[0,\, R]$. Поскольку собственные функции задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями I-го рода образуют ортогональную систему, то все слагаемые ряда[1] с номерами, отличными от m, обратятся в ноль, и мы получим равенство:

$$\int\limits_0^R rf(r,\, t) \sin\frac{\pi m r}{R}\, dr = f_m(t)\int\limits_0^R \sin^2\frac{\pi m r}{R}\, dr = \frac{R}{2} f_m(t),$$

откуда и следует равенство (1.12).

[1] Мы предполагаем, что этот ряд можно интегрировать почленно. В данном случае это следует из общей теории рядов Фурье, но в общей ситуации придётся доказывать, что построенное в виде ряда решение позволяет производить с ним все подобные действия.

Подставим (1.10) и (1.11) в уравнение (в предположении, что ряд (1.10) можно почленно дифференцировать 1 раз по t и два раза по r) в задаче (1.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin\frac{\pi nr}{R} = -a^2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi nr}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi nr}{R}. \tag{1.13}$$

Данное равенство будет заведомо выпонено, если ряды в левой и правой его частях совпадают почленно, то есть оно следует из

$$T_n'(t) + a^2T_n(t) = f_n(t), \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{1.14}$$

Это – неоднородное линейное уравнение 1-го порядка с постоянными коэффициентами. Такие уравнения решают методом вариации постоянной. Поскольку общее решение соответствующего однородного уравнения

$$T_{no}'(t) + a^2T_{no}(t) = 0$$

имеет вид

$$T_{no}(t) = c_n e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}t},$$

то решение (1.14) ищется в виде

$$T_n(t) = c_n(t) e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}t}, \tag{1.15}$$

где $c_n(t)$ находятся из $c_n'(t) = f_n(t)e^{\frac{(\pi na)^2}{R^2}t}$. Итак,

$$c_n(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau)e^{\frac{(\pi na)^2}{R^2}\tau}d\tau + A_n, \qquad A_n = const,$$

и для $T_n(t)$ окончательно имеем:

$$T_n(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}(t-\tau)}d\tau + A_n. \tag{1.16}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $v(r,\,0)=0$. Для функции $v(r,\,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi nr}{R}$ искомого вида (1.10) оно заведомо будет выполнено, если

$$T_n(0) = 0, \quad \text{что, в свою очередь верно при} \quad A_n = 0, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Таким образом, решение $v(r,\,t)$ имеет вид:

$$v(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}(t-\tau)}d\tau \sin\frac{\pi nr}{R}.$$

Отсюда, вспоминая о замене $v(r,\,t) = ru(r,\,t)$ и формуле (1.12), получаем
<u>**Ответ:**</u>

$$u(r,\,t) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}(t-\tau)}d\tau \sin\frac{\pi nr}{R}, \qquad \text{где} \qquad f_n(t) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R \xi f(\xi,\,t)\sin\frac{\pi n\xi}{R}\,d\xi.$$

1.2. № 709(б).

В однородном шаре $0 \leqslant r < R$, начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности Q. Начальная температура шара равна T. Определить распределение температуры в шаре при $t > 0$, если с поверхности шара происходит теплоотдача потоком постоянной плотности q.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = T, & 0 \leqslant r < R; \\ u_r(R,\,t) = -\frac{q}{k}, \quad |u(r,\,t)| < \infty, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.1}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.

<u>Шаг 1.</u> Избавление от неоднородности в граничном условии.

Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\,t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и уравнению и неоднородному краевому условию. То есть будем искать решение $u(r,\,t)$ задачи (2.1) в виде

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t),$$

где функция $w(r,\,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2\Delta w \equiv a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ w_r(R,\,t) = -\frac{q}{k}, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.2}$$

Из-за того, что граничное условие – второго рода, (совершенно аналогично решению № 708(б)) w должна содержать хотя бы r в первой степени. Но поскольку в уравнении есть слагаемое $\frac{2}{r}w_r$, которое для функции вида αr превратится в $\frac{2\alpha}{r}$, то просто полином первой степени от r удовлетворить уравнению не сможет.

В этом случае надо искать w в виде

$$w(r,\,t) = \alpha r^2 + \eta(t), \tag{2.3}$$

где $\eta(t)$ подбирается так, чтобы выполнялось уравнение $w_t = a^2\Delta w$.

Подставим искомую функцию w вида (5.3) в граничное условие:

$$w_r(R,\,t) = -\frac{q}{k} = 2\alpha R \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -\frac{q}{2kR}.$$

Тогда

$$w(r,\,t) = -\frac{q}{2kR}r^2 + \eta(t).$$

Подставим эту функцию в уравнение $w_t = a^2\Delta w = a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right)$:

$$\eta'(t) = -a^2\left(\frac{2q}{2kR} + \frac{2}{r}\cdot\frac{2q}{2kR}r\right) = -\frac{3qa^2}{kR} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta(t) = -\frac{3qa^2}{kR}t + c$$

Константу c возьмём равной нулю, нам ведь не нужно искать все решения (2.2), а достаточно найти самое простое. Итак:

$$w(r,\,t) = -\frac{q}{2kR}r^2 - \frac{3qa^2}{kR}t. \tag{2.4}$$

Тогда $v(r,\,t) = u - w$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r,\,0) = T - w(r,\,0) = T + \frac{q}{2kR}r^2 = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ v_r(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.5}$$

Шаг 2. Замена неизвестной функции
Действуя аналогично Шагу 1 задачи 711, для новой неизвестной функции

$$m(r,\ t) = rv(r,\ t)$$

получим задачу: *Найти функцию $v(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} m_t = a^2 m_{rr} + \frac{Q}{c\rho}\, r, & \text{в прямоугольнике } \ 0 < r < R, \ \ 0 < t \leqslant T; \\ m(r,\,0) = r\varphi(r) \equiv Tr + \frac{q}{2kR} r^3, & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ Rm_r(R,\,t) - m(R,\,t) = 0, \qquad m(0,\,t) = 0 & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.6}$$

Краевое условие $v_r(R,\,t) = 0$ означает для $m(r,\ t) = rv(r,\ t)$, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{m}{r}\right)_{r=R} = \left.\frac{rm_r - m}{r^2}\right|_{r=R} = \frac{Rm_r(R,\,t) - m(R,\,t)}{R^2} = 0,$$

откуда и взялось краевое условие 3-го рода в задаче для m.
Шаг 3. Решение задачи Штурма-Лиувилля.
Уравнению $m_t = a^2 m_{rr}$ с краевыми условиями $m(0,t) = Rm_r(R,\,t) - m(R,\,t) = 0$ соответствует следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$\mathbf{X}''(r) + \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0. \tag{2.8}$$

Эту задачу мы уже решали в № 706 (семинар 1). Повторим проведённое там исследование.
Общее решение уравнения (2.7) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, r) \qquad \text{при } \ \lambda > 0; \tag{2.9}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, r} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, r} \qquad \text{при } \ \lambda < 0; \tag{2.10}$$

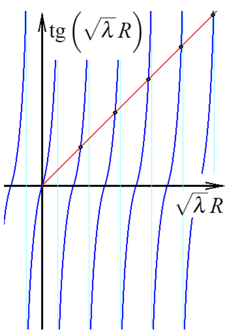
$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \ \lambda = 0; \tag{2.11}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что

$$c_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'(r) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, r).$$

Поэтому из второго краевого условия $R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что

$$\sqrt{\lambda}\, R \cos(\sqrt{\lambda}\, R) - \sin(\sqrt{\lambda}\, R) = 0,$$



откуда

$$\sqrt{\lambda}\, R = \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, R). \tag{2.12}$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$\lambda_n : \qquad \sqrt{\lambda_n}\, R = \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, R), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n} r\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 R - c_1 R = 0$ – верное при всех c_1 тождество. Поэтому задача Штурма–Лиувилля имеет собственное число, равное нулю, и соответствующую ему собственную функцию

$$\mathbf{X}_0(r) = r, \qquad n = 0. \tag{2.15}$$

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_0 = 0, \qquad\qquad \lambda_n: \quad \sqrt{\lambda_n}\, R = \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, R), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Big\{ \mathbf{X}_n(r) \Big\} = \Big\{ r, \ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) \Big\}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

задачи (2.7), (2.8).

<u>Шаг 4.</u> Решаем задачу (2.6).

Будем искать решение задачи (2.6) в виде $m(r,\, t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r) \mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$m(r,\, t) = \mathbf{T}_0(t) r + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) \mathbf{T}_n(t). \tag{2.16}$$

Разложим функции $f(r,\, t) \equiv \frac{Q}{c\rho}\, r$ и $r\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля:

$$f(r,\, t) = f_0(t) r + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right), \tag{2.17}$$

$$r\varphi(r) = \alpha_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) \tag{2.18}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого, поступая аналогично № 706, домножим (2.18) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\sqrt{\lambda_m}\, r\right)$ скалярно в смысле $L_2[0, R]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):

$$(r\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int_0^R \sin^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, r\right) dr = \frac{\alpha_m}{2} \int_0^R \left(1 - \cos\left(2\sqrt{\lambda_m}\, r\right)\right) dr =$$
$$= \frac{\alpha_m}{2} \left(R - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}} \sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\, r\right) \Big|_{r=0}^{r=R} \right) = \frac{\alpha_m}{2} \left(R - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\, R\right)}{2\sqrt{\lambda_m}} \right).$$

Поскольку, в силу тождеств $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, имеет место равенство:

$$R - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\, R\right)}{2\sqrt{\lambda_m}} = \left[\sqrt{\lambda_m} = \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_m}\, R)}{R} \right] = R - \frac{R \sin\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right) \cos\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right)}{\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_m}\, R)} =$$
$$= R - R\cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right) = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \right] =$$
$$= R - \frac{R}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right)} = \left[\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right) = \lambda_m\, R^2 \right] = R - \frac{R}{1 + \lambda_m\, R^2} =$$
$$= \frac{\lambda_m\, R^3}{1 + \lambda_m\, R^2},$$

в итоге для коэффициентов α_n получаем:

$$\alpha_n = \frac{2\,(1+\lambda_n\,R^2)}{\lambda_n\,R^3}(r\varphi, \mathbf{X}_n) = \frac{2\,(1+\lambda_n\,R^2)}{\lambda_n\,R^3}\int\limits_0^R r\varphi(r)\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{2.19}$$

Осталось найти α_0. Аналогично,

$$(r\varphi, \mathbf{X}_0) = \alpha_0\int\limits_0^R r^2 dr = \alpha_0\,\frac{R^3}{3}, \qquad \text{откуда} \qquad \alpha_0 = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R r^2\varphi(r)\,dr. \tag{2.20}$$

Абсолютно аналогичные выкладки позволяют нам найти коэффициенты $f_n(t)$ из (2.17):

$$f_n(t) = \frac{2\,(1+\lambda_n\,R^2)}{\lambda_m\,R^3}(f, \mathbf{X}_n) = \frac{2\,(1+\lambda_n\,R^2)}{\lambda_n\,R^3}\int\limits_0^R f(r,\,t)\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr, \qquad n\in\mathbb{N}; \tag{2.21}$$

$$f_0(t) = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R r f(r,\,t)\,dr. \tag{2.22}$$

Однако, нам даны функции $f(r,\,t)\equiv\frac{Q}{c\rho}\,r$ и $r\varphi(r) = Tr + \frac{q}{2kR}r^3$, поэтому коэффициенты $f_n(t)$ и α_n надо будет найти явно. Но это позже. А сейчас самое время подставить в уравнение и начальное условие в (2.6) ряды (2.16), (2.17) и (2.18). Получим:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_0'(t)r + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ r\right)\mathbf{T}_n'(t) = -a^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ r\right)\mathbf{T}_n(t)+ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +f_0(t)r + \sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ r\right); \\ \mathbf{T}_0(0)r + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ r\right)\mathbf{T}_n(0) = \alpha_0 r + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\ r\right). \end{cases} \tag{2.23}$$

Очевидно, что равенства (2.23) между рядами, стоящими в левой и правой частях, будут заведомо выполнены, если будут равняться друг другу слагаемые с одинаковыми номерами:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_0'(t) = f_0(t); \\ \mathbf{T}_0(0) = \alpha_0, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \mathbf{T}_n'(t) + a^2\lambda_n\mathbf{T}_n(t) = f_n(t); \\ \mathbf{T}_n(0) = \alpha_n. \end{cases} \tag{2.24}$$

Задачи (2.24) есть задачи Коши для неоднородных линейных уравнений 1-го порядка. Чтобы их решить вернёмся к вычислению $f_n(t)$.

Заметим, что в данном случае вид функции $f(r,\,t)\equiv\frac{Q}{c\rho}\,r$ в точности повторяет вид одного из слагаемых ряда (2.17), а именно, слагаемого с номером 0: $f_0(t)r$. Из этого, не вычисляя интегралы (2.21) – (2.22), можно «даром» получить, что

$$f_0(t) = \frac{Q}{c\rho}, \qquad f_n(t)\equiv 0, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{2.25}$$

Тогда решение $T_0(t)$ первой из задач (2.24) задаётся формулой:

$$\mathbf{T}_0(t) = \alpha_0 + f_0 t \equiv \alpha_0 + \frac{Q}{c\rho}t, \tag{2.26}$$

а решение $T_n(t)$ второй из задач (2.24) – формулой:

$$\mathbf{T}_n(t) = \alpha_n e^{-a^2\lambda_n t}, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{2.27}$$

Для того, чтобы полностью выписать решение $m(r,\, t)$ задачи (2.6) в виде ряда (2.16), нам не хватает только чисел α_n.

Учитывая, что $r\varphi(r) = Tr + \frac{q}{2kR} r^3$, найдём α_n по формулам (2.19) – (2.20).

$$\alpha_0 = \frac{3}{R^3} \int\limits_0^R r^2 \varphi(r)\, dr = \frac{3}{R^3} \int\limits_0^R \left(Tr^2 + \frac{q}{2kR} r^4 \right)\, dr = \frac{3}{R^3} \left(\frac{TR^3}{3} + \frac{q}{2kR} \cdot \frac{R^5}{5} \right) = T + \frac{3qR}{10\,k}.$$

$$\alpha_n = \frac{2\,(1+\lambda_n\, R^2)}{\lambda_n\, R^3} \int\limits_0^R r\varphi(r)\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r \right) dr =$$

$$= \frac{2\,(1+\lambda_n\, R^2)}{\lambda_n\, R^3} \int\limits_0^R \left(Tr + \frac{q}{2kR} r^3 \right)\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r \right) dr = \frac{2\,(1+\lambda_n\, R^2)}{\lambda_n\, R^3} \cdot \left(\frac{qR^2}{k\sqrt{\lambda_n}}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right) \right) =$$

$$= \left[\text{в силу (2.13)},\ \ 1+\lambda_n\, R^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right) = \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right)} \right] =$$

$$= \frac{2q}{kR\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right)}.$$

Здесь мы воспользовались взятыми при решении №708 (б) на Шаге 3 интегралами:

$$\int\limits_0^R r\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r \right) dr = \Big[\text{по частям} \Big] = \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(r\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, r \right) \Big|_{r=0}^{r=R} - \int\limits_0^R \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, r \right) dr \right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(R\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right) - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r \right) \Big|_{r=0}^{r=R} \right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(R\sqrt{\lambda_n} - \operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right) \right) \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right)}{\sqrt{\lambda_n}} = \Big[\text{в силу (2.13)} \Big] = 0$$

и

$$\int\limits_0^R r^3\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r \right) dr = \Big[2 \text{ раза по частям} \Big] =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(r^3\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, r \right) \Big|_{r=0}^{r=R} - 3 \int\limits_0^R r^2\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, r \right) dr \right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(R^3 \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right) - \frac{3}{\sqrt{\lambda_n}} \left[r^2\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r \right) \Big|_{r=0}^{r=R} - 2 \underbrace{\int\limits_0^R r\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r \right) dr}_{=0} \right] \right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(R^3 \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right) - 3R^2\, \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right)}{\sqrt{\lambda_n}} \right) =$$

$$= \left[\text{в силу (2.13)},\ \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right)}{\sqrt{\lambda_n}} = R\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right) \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}\, R^3 \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R \right).$$

Подставив найденные

$$\alpha_0 = T + \frac{3qR}{10\,k}, \qquad \alpha_n = \frac{2q}{kR\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.28}$$

в формулы (2.26) – (2.27) для нахождения T_0 и T_n, а затем полученные T_0 и T_n – в (2.16), получим

$$m(r,\,t) = \left(T + \frac{3qR}{10\,k} + \frac{Q}{c\rho}t\right) r + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right) \frac{2q}{kR\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\ e^{-a^2\lambda_n t}. \tag{2.29}$$

Вспомним, что $m(r,\,t) = rv(r,\,t)$, и поделим (2.29) на r:

$$v(r,\,t) = \left(T + \frac{3qR}{10\,k} + \frac{Q}{c\rho}t\right) + \frac{2q}{krR}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)} e^{-a^2\lambda_n t} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right).$$

Наконец, поскольку

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t) = -\,\frac{q}{2kR}r^2 \ -\ \frac{3qa^2}{kR}t + v(r,\,t),$$

мы готовы выписать окончательный

<u>Ответ:</u>

$$u(r,t) = -\,\frac{q}{2kR}r^2 \ -\ \frac{3qa^2}{kR}t + \left(T + \frac{3qR}{10\,k} + \frac{Q}{c\rho}t\right) + \\ + \frac{2q}{krR}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)} e^{-a^2\lambda_n t} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right),$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности, а $\lambda_n > 0$ – решения уравнения (2.13): $\sqrt{\lambda_n}\,R = \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R)$, $n \in \mathbb{N}$.

2.3. № 709(а). Короткий способ.

В однородном шаре $0 \leqslant r < R$, начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности Q. Начальная температура шара равна T. Определить распределение температуры в шаре при $t > 0$, если поверхность шара поддерживается при постоянной температуре U.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = T, & 0 \leqslant r < R; \\ u(R,\,t) = U, \quad |u(r,\,t)| < \infty, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{3.1}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.

<u>Шаг 1.</u> Избавление от неоднородности в граничном условии.

Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\,t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и уравнению и неоднородному краевому условию.

Поскольку в данном случае и краевое условие, и функция источников в уравнении очень просты, то мы можем найти функцию $w(r,\,t)$, удовлетворяющую сразу и <u>неоднородному</u> уравнению, и неоднородному краевому условию.

То есть мы будем искать решение $u(r,\,t)$ задачи (3.1) в виде

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t),$$

где функция $w(r,\,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2\Delta w + \frac{Q}{c\rho} \equiv a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right) + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ w(R,\,t) = U, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{3.2}$$

В этом случае надо искать w в виде

$$w(r,\,t) = \alpha r^2 + \beta. \tag{3.3}$$

Подставим искомую функцию w вида (3.4) в граничное условие:

$$w(R,\,t) = U = \alpha R^2 + \beta \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = U - \alpha R^2.$$

Тогда

$$w(r,\,t) = \alpha(r^2 - R^2) + U.$$

Подставим эту функцию в уравнение $w_t = a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right) + \frac{Q}{c\rho}$:

$$0 = a^2\left(2\alpha + \frac{2}{r}\cdot 2\alpha r\right) + \frac{Q}{c\rho} = 6a^2\alpha + \frac{Q}{c\rho} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \alpha = -\frac{Q}{6c\rho a^2} = \left[a^2 c\rho = k\right] = -\frac{Q}{6k}.$$

Итак:

$$w(r,\,t) = \frac{Q}{6k}\,(R^2 - r^2) + U. \tag{3.4}$$

Тогда $v(r,\,t) = u - w$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r,\,0) = T - w(r,\,0) = T - U \;-\; \frac{Q}{6k}\,(R^2 - r^2) = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ v(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{3.5}$$

Шаг 2. Замена неизвестной функции

Аналогично Шагу 2 задачи 709(б), для новой неизвестной функции

$$m(r,\;t) = rv(r,\;t)$$

получим задачу: *Найти функцию $v(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} m_t = a^2 m_{rr}, & \text{в прямоугольнике;} \\ m(r,\,0) = r\varphi(r) \equiv \left(T - U \;-\; \frac{Q}{6k}\,(R^2 - r^2)\right) r, & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ m(R,\,t) = 0, \qquad m(0,\,t) = 0 & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{3.6}$$

Шаг 3. Решение задачи Штурма-Лиувилля.

Уравнению $m_t = a^2 m_{rr}$ с краевыми условиями $m(0,t) = m(R,\,t) = 0$ соответствует следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$\mathbf{X}"(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad \mathbf{X}(R) = 0. \tag{3.8}$$

Эту задачу мы уже решали на Шаге 2 № 705 (семинар 1). Повторим проведённое там исследование.

Общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,r) \qquad \text{при} \;\; \lambda > 0; \tag{3.9}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,r} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,r} \qquad \text{при} \;\; \lambda < 0; \tag{3.10}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при} \;\; \lambda = 0; \tag{3.11}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, R = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \quad \mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$
задачи (3.7), (3.8).

<u>Шаг 4.</u> Решаем задачу (3.6).

Будем искать решение задачи (3.6) в виде $m(r,\,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.
$$m(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\mathbf{T}_n(t). \tag{3.14}$$

Разложим функцию $r\varphi(r) \equiv \left(T - U - \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right)\right) r$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля:
$$r\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \tag{3.15}$$
Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого, поступая аналогично № 706, домножим (3.15) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,R]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):
$$(r\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int_0^R \sin^2\left(\frac{\pi m r}{R}\right) dr = \frac{\alpha_m}{2}\int_0^R \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi m r}{R}\right)\right) dr =$$
$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{R}{2\pi m}\sin\left(\frac{2\pi m r}{R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\alpha_m R}{2}.$$
Таким образом, для коэффициентов α_n получаем:
$$\alpha_n = \frac{2}{R}(r\varphi, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{R}\int_0^R r\varphi(r)\,\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Однако, нам в явном виде дана функция $r\varphi(r) = \left(T - U - \frac{Q}{6k}\,(R^2 - r^2)\right) r$, поэтому коэффициенты α_n тоже надо будет найти явно. Но это позже. А сейчас самое время подставить в уравнение и начальное условие в (3.6) ряды (3.14) и (3.15). Получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \mathbf{T}_n'(t) = -a^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n r}{R}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \mathbf{T}_n(t); \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \mathbf{T}_n(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right). \end{cases} \tag{3.17}$$

Очевидно, что равенства (3.17) между рядами, стоящими в левой и правой частях, будут заведомо выполнены, если будут равняться друг другу слагаемые с одинаковыми номерами:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 \mathbf{T}_n(t) = 0; \\ \mathbf{T}_n(0) = \alpha_n. \end{cases} \tag{3.18}$$

Задачи (3.18) есть задачи Коши для <u>однородных</u> линейных уравнений 1-го порядка. Общее решение задачи (3.18) имеет вид

$$\mathbf{T}_n = T_n(0)\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t},$$

то есть

$$\mathbf{T}_n = \alpha_n\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}. \tag{3.19}$$

Найдём коэффициенты α_n. Поскольку $r\varphi(r) = \left(T - U - \frac{Q}{6k}\,(R^2 - r^2)\right) r$, то для вычисления α_n нам надо найти интегралы:

$$\frac{2}{R}\int\limits_0^R r\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr = \big[\text{по частям}\big] = -\frac{2}{R}\cdot\frac{R}{\pi n}\left(r\cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \int\limits_0^R \cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(R(-1)^n - \frac{R}{\pi n}\cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R}}_{=0} \right) = \frac{2(-1)^{n+1}R}{\pi n}, \quad \text{и}$$

$$\frac{2}{R}\int\limits_0^R r^3\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr = \big[2\ \text{раза по частям}\big] = -\frac{2}{R}\cdot\frac{R}{\pi n}\left(r^3\cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - 3\int\limits_0^R r^2\cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(R^3(-1)^n - \frac{3R}{\pi n}\left[\underbrace{r^2\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R}}_{=0} - 2\underbrace{\int\limits_0^R r\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr}_{=\frac{2(-1)^{n+1}R^2}{\pi n}} \right]\right) = -\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n R^3 + 6\frac{(-1)^{n+1}R^3}{(\pi n)^2} \right) =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}R^3}{\pi n} - \frac{12(-1)^{n+1}R^3}{(\pi n)^3}.$$

Итак,

$$\alpha_n = \frac{2}{R}\int\limits_0^R \left(T - U - \frac{Q}{6k}\,(R^2 - r^2)\right) r\ \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr =$$

$$= \left(T - U - \frac{Q}{6k}\,R^2\right)\frac{2(-1)^{n+1}R}{\pi n} + \frac{Q}{6k}\left(\frac{2(-1)^{n+1}R^3}{\pi n} - \frac{12(-1)^{n+1}R^3}{(\pi n)^3}\right) =$$

$$= (T - U)\,\frac{2(-1)^{n+1}R}{\pi n} - \frac{Q}{k}\cdot\frac{2(-1)^{n+1}R^3}{(\pi n)^3} = \left(T - U - \frac{Q}{k}\cdot\frac{R^2}{(\pi n)^2}\right)\frac{2(-1)^{n+1}R}{\pi n}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Подставляем найденные α_n в формулу (3.19) вычисления $\mathbf{T}_n(t) = \alpha_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}$ и получаем:

$$\mathbf{T}_n(t) = \left(T - U - \frac{Q}{k}\cdot\frac{R^2}{(\pi n)^2}\right)\frac{2(-1)^{n+1}R}{\pi n}\,e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Вернёмся к формуле (3.14) для $m(r,\,t)$. Подставим в неё полученные $\mathbf{T}_n$ и получим

$$m(r,\,t) = \frac{2R}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)\,e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right). \tag{3.20}$$

Вспомним, что $m(r,\,t) = rv(r,\,t)$, и поделим (3.20) на r:

$$v(r,\,t) = \frac{2R}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)\,e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right).$$

Наконец, поскольку

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t) = \frac{Q}{6k}\,(R^2 - r^2) + U + v(r,\,t),$$

мы готовы выписать окончательный
Ответ: (в задачнике опечатка – знак «минус» перед Q)

$$u(r,t) = \frac{Q}{6k}\,(R^2 - r^2) + U + \frac{2R}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)\,e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right),$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.

3.4. № 709(а). Классический способ.

В однородном шаре $0 \leqslant r < R$, начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности Q. Начальная температура шара равна T. Определить распределение температуры в шаре при $t > 0$, если поверхность шара поддерживается при постоянной температуре U.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = T, & 0 \leqslant r < R; \\ u(R,\,t) = U, \quad |u(r,\,t)| < \infty, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{4.1}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.
Шаг 1. Избавление от неоднородности в граничном условии.
Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\,t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и (однородному) уравнению и неоднородному краевому условию. То есть будем искать решение $u(r,\,t)$ задачи (4.1) в виде

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t),$$

где функция $w(r,\,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2\Delta w \equiv a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ w(R,\,t) = U, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{4.2}$$

В данном простейшем случае краевого условия I-го рода легко найти w в виде $w(r,\,t) = const$. Очевидно, все условия (4.2) выполняются для функции

$$w(r,\,t) = U. \tag{4.3}$$

Тогда $v(r,\,t) = u - w$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r,\,0) = T - w(r,\,0) = T - U = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ v(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{4.4}$$

<u>Шаг 2.</u> Замена неизвестной функции
Аналогично Шагу 2 задачи 709(б), для новой неизвестной функции

$$m(r,\;t) = rv(r,\;t)$$

получим задачу: *Найти функцию $v(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} m_t = a^2 m_{rr} + \frac{Q}{c\rho}\,r, & \text{в прямоугольнике } \ 0 < r < R, \ \ 0 < t \leqslant T; \\ m(r,\,0) = r\varphi(r) \equiv (T-U)r, & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ m(R,\,t) = 0, \qquad m(0,\,t) = 0 & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{4.5}$$

<u>Шаг 3.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля.
Уравнению $m_t = a^2 m_{rr}$ с краевыми условиями $m(0,t) = m(R,\,t) = 0$ соответствует следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$\mathbf{X}"(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{4.6}$$

$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad \mathbf{X}(R) = 0. \tag{4.7}$$

Эту задачу мы уже решали на Шаге 2 № 705 (семинар 1). Повторим проведённое там исследование.

Общее решение уравнения (4.6) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,r) \qquad \text{при } \ \lambda > 0; \tag{4.8}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,r} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,r} \qquad \text{при } \ \lambda < 0; \tag{4.9}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \ \lambda = 0; \tag{4.10}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\,R = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \quad \mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (4.6), (4.7).

<u>Шаг 4.</u> Решаем задачу (4.5).

Будем искать решение задачи (4.5) в виде $m(r,\,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$m(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\mathbf{T}_n(t). \tag{4.13}$$

Разложим функции $f(r,\,t) \equiv \frac{Q}{c\rho} r$ и $r\varphi(r) \equiv (T-U)r$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля:

$$f(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \tag{4.14}$$

$$r\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \tag{4.15}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого, поступая аналогично № 706, домножим (4.15) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,R]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):

$$(r\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int\limits_0^R \sin^2\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^R \left(1-\cos\left(\frac{2\pi m r}{R}\right)\right) dr =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{R}{2\pi m}\sin\left(\frac{2\pi m r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\alpha_m R}{2}.$$

Таким образом, для коэффициентов α_n получаем:

$$\alpha_n = \frac{2}{R}(r\varphi, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R r\varphi(r)\ \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.16}$$

Абсолютно аналогичные выкладки позволяют нам найти коэффициенты $f_n(t)$ из (4.14):

$$f_n(t) = \frac{2}{R}(f, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R f(r,\,t)\ \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.17}$$

Однако, нам даны функции $f(r,\,t) \equiv \frac{Q}{c\rho} r$ и $r\varphi(r) = (T-U)r$, поэтому коэффициенты $f_n(t)$ и α_n надо будет найти явно. Но это позже. А сейчас самое время подставить в уравнение и начальное условие в (4.5) ряды (4.13), (4.14) и (4.15). Получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\mathbf{T}_n'(t) = -a^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n r}{R}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\mathbf{T}_n(t) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right); \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\mathbf{T}_n(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right). \end{cases} \tag{4.18}$$

Очевидно, что равенства (4.18) между рядами, стоящими в левой и правой частях, будут заведомо выполнены, если будут равняться друг другу слагаемые с одинаковыми номерами:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 \mathbf{T}_n(t) = f_n(t); \\ \mathbf{T}_n(0) = \alpha_n. \end{cases} \tag{4.19}$$

Задачи (4.19) есть задачи Коши для неоднородных линейных уравнений 1-го порядка. Общее решение соответсвующего однородного уравнения

$$\mathbf{T}'_{no}(t) + \left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 \mathbf{T}_{no}(t) = 0$$

имеет вид

$$\mathbf{T}_{no} = c e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t},$$

откуда методом вариации постоянной получим общее решение неоднородного уравнения в (4.19):

$$\mathbf{T}_n = c(t) e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}. \tag{4.20}$$

Подставив это решение в уравнение в (4.19), получаем условие на функцию $c(t)$:

$$c'(t) = e^{\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t} f_n(t).$$

Проинтегрировав это равенство и подставив результат в (4.20), находим (с учётом начального условия), что

$$\mathbf{T}_n(t) = \alpha_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \tag{4.21}$$

Чтобы получить $T_n(t)$ в явном виде, придётся найти коэффициенты α_n и $f_n(t)$. Воспользуемся формулами (4.16) и (4.17) и заданным видом функций $r\varphi(r) = (T-U)r$ и $f(r, t) = \frac{Q}{c\rho} r$.

$$\alpha_n = \frac{2}{R} \int\limits_0^R r\varphi(r)\ \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr = \frac{2(T-U)}{R} \int\limits_0^R r \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr =$$

$$= \Big[\text{по частям}\Big] = -\frac{2(T-U)}{R} \frac{R}{\pi n} \left(r\cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \underbrace{\int\limits_0^R \cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr}_{=0} \right) =$$

$$= \frac{2(U-T)(-1)^n R}{\pi n}.$$

Таким образом, для коэффициентов α_n получаем:

$$\alpha_n = \frac{2(U-T)(-1)^n R}{\pi n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.22}$$

Абсолютно аналогичные выкладки позволяют нам найти коэффициенты $f_n(t)$:

$$f_n(t) = \frac{2}{R} \int\limits_0^R f(r, t)\ \sin\left(\frac{2\pi n r}{R}\right) dr = \frac{2Q}{c\rho R} \int\limits_0^R r \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr =$$

$$= \Big[\text{по частям}\Big] = -\frac{2Q}{c\rho R} \frac{R}{\pi n} \left(r\cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \underbrace{\int\limits_0^R \cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr}_{=0} \right) = -\frac{2Q(-1)^n R}{c\rho\pi n},$$

откуда
$$f_n(t) = \frac{2Q(-1)^{n+1}R}{c\rho\pi n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.23}$$
Итак, чтобы явно выписать $T_n(t)$ из (4.21), нам осталось найти
$$\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau = \frac{2Q(-1)^{n+1}R}{c\rho\pi n}\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2(t-\tau)}d\tau =$$
$$= \frac{2Q(-1)^{n+1}R}{c\rho\pi n}e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}\int_0^t e^{\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 \tau}d\tau = \frac{2Q(-1)^{n+1}R}{c\rho\pi n}e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}\cdot\left(\frac{R}{\pi n a}\right)^2 e^{\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 \tau}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$
$$= \left[a^2 c\rho = k\right] = \frac{2Q(-1)^{n+1}R^3}{k(\pi n)^3}\left(1 - e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}\right).$$
Подставляем найденный интеграл и $\alpha_n = \frac{2(U-T)(-1)^n R}{\pi n}$ в (4.21)
$$\mathbf{T}_n(t) = \alpha_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau,$$
и получаем:
$$\mathbf{T}_n(t) = \frac{2(U-T)(-1)^n R}{\pi n}e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t} + \frac{2Q(-1)^{n+1}R^3}{k(\pi n)^3}\left(1 - e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}\right) =$$
$$= \frac{2(-1)^n R}{\pi n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t} + \frac{2Q(-1)^{n+1}R^3}{k(\pi n)^3}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.24}$$
Подставляем полученные T_n в (4.13), получим
$$m(r,\, t) = \frac{2R}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) -$$
$$- \frac{2QR^3}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^3 n^3}\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right). \tag{4.25}$$
Чтобы упростить ответ, заметим, что последний ряд несложно просуммировать, и
$$12R^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^3 n^3}\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) = R^2 r - r^3,$$
поскольку коэффициенты ряда Фурье по синусам для этой функции находятся по формуле
$$c_n = \frac{2}{R}\int_0^R \left(R^2 r - r^3\right)\,\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)dr = 12R^3\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^3}.$$
В самом деле, эта формула получается, если вычесть друг из друга следующие интегралы:
$$R^2\cdot\frac{2}{R}\int_0^R r\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)dr = \left[\text{по частям}\right] =$$
$$= -2R\cdot\frac{R}{\pi n}\left(r\cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \underbrace{\int_0^R \cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right)dr}_{=0}\right) = \frac{2(-1)^{n+1}R^3}{\pi n}, \quad \text{и}$$

$$\frac{2}{R}\int\limits_0^R r^3\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right)dr = \left[2\text{ раза по частям}\right] = -\frac{2}{R}\cdot\frac{R}{\pi n}\left(r^3\cos\left(\frac{\pi nr}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - 3\int\limits_0^R r^2\cos\left(\frac{\pi nr}{R}\right)dr\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(R^3(-1)^n - \frac{3R}{\pi n}\left[\underbrace{r^2\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R}}_{=0} - \underbrace{2\int\limits_0^R r\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right)dr}_{=\frac{2(-1)^{n+1}R^2}{\pi n}}\right]\right) = -\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n R^3 + 6\frac{(-1)^{n+1}R^3}{(\pi n)^2}\right) =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}R^3}{\pi n} - \frac{12(-1)^{n+1}R^3}{(\pi n)^3}.$$

Таким образом,

$$m(r,\,t) = \frac{2R}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) + \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right)r. \tag{4.26}$$

Вспомним, что $m(r,\,t) = rv(r,\,t)$, и поделим (4.26) на r:

$$v(r,\,t) = \frac{2R}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) + \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right).$$

Наконец, поскольку

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t) = U + v(r,\,t),$$

мы готовы выписать окончательный

Ответ: (в задачнике опечатка – знак «минус» перед Q)

$$u(r,t) = U + \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{2R}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right),$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.

4.5. № 709(в).

В однородном шаре $0 \leqslant r < R$, начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности Q. Начальная температура шара равна T. Определить распределение температуры в шаре при $t > 0$, если на поверхности шара происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Температуре среды равна P.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = T, & 0 \leqslant r < R; \\ u_r(R,\,t) + hu(R,\,t) = hP, \quad |u(r,\,t)| < \infty, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{5.1}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.

Шаг 1. Избавление от неоднородности в граничном условии.

Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\,t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и уравнению и неоднородному краевому условию.

Поскольку в данном случае и краевое условие, и функция источников в уравнении очень просты (константы), то мы можем найти функцию $w(r,\, t)$, удовлетворяющую сразу и неоднородному уравнению, и неоднородному краевому условию.

То есть мы будем искать решение $u(r,\, t)$ задачи (5.1) в виде

$$u(r,\, t) = v(r,\, t) + w(r,\, t),$$

где функция $w(r,\, t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2\Delta w + \frac{Q}{c\rho} \equiv a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right) + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ w_r(R,\, t) + hw(R,\, t) = hP, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{5.2}$$

В этом случае надо искать w в виде

$$w(r,\, t) = \alpha r^2 + \beta. \tag{5.3}$$

Подставим искомую функцию w вида (5.4) в граничное условие:

$$w_r(R,\, t) + hw(R,\, t) = hP = 2\alpha R + h\alpha R^2 + h\beta \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = P - \alpha R^2 - \frac{2R}{h}\alpha.$$

Тогда

$$w(r,\, t) = \alpha\left[(r^2 - R^2) - \frac{2R}{h}\right] + P.$$

Подставим эту функцию в уравнение $w_t = a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right) + \frac{Q}{c\rho}$:

$$0 = a^2\left(2\alpha + \frac{2}{r}\cdot 2\alpha r\right) + \frac{Q}{c\rho} = 6a^2\alpha + \frac{Q}{c\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -\frac{Q}{6c\rho a^2} = \left[a^2 c\rho = k\right] = -\frac{Q}{6k}.$$

Итак:

$$w(r,\, t) = \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{QR}{3kh} + P. \tag{5.4}$$

Тогда $v(r,\, t) = u - w$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r,\, 0) = T - w(r,\, 0) = T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right) = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ v_r(R,\, t) + hv(R,\, t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{5.5}$$

<u>Шаг 2.</u> Замена неизвестной функции

Действуя аналогично Шагу 1 задачи 711, для новой неизвестной функции

$$m(r,\ t) = rv(r,\ t)$$

получим задачу: *Найти функцию $v(r,\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} m_t = a^2 m_{rr} + \frac{Q}{c\rho}\, r, & \text{в прямоугольнике ;} \\ m(r,\, 0) = r\varphi(r) \equiv \left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3, & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ m_r(R,\, t) + \frac{hR-1}{R} m(R,\, t) = 0, \qquad m(0,\, t) = 0 & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{5.6}$$

Краевое условие $v_r(R,\, t) + hv(R,\, t) = 0$ означает для $m(r,\ t) = rv(r,\ t)$, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{m}{r} + h\frac{m}{r}\right)_{r=R} = \left.\frac{rm_r - m}{r^2}\right|_{r=R} + h\frac{m}{R} = \frac{Rm_r(R,\, t) + (hR-1)m(R,\, t)}{R^2} = 0,$$

откуда и взялось краевое условие $m_r(R,\, t) + \frac{hR-1}{R} m(R,\, t) = 0$ в задаче для m. Заметим, что в зависимости от значений h и R это условие либо 2-го рода (при $hR = 1$), либо 3-го рода (при $hR \neq 1$). Поэтому решать придётся, фактически, 2 задачи.

Случай второй краевой задачи ($hR = 1$).

Шаг 3-2. Решение задачи Штурма-Лиувилля. Случай $hR = 1$.
Уравнению $m_t = a^2 m_{rr}$ с краевыми условиями $m(0,t) = m_r(R,\,t) = 0$ соответствует следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$\mathbf{X}"(r) + \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \tag{5.7}$$
$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad \mathbf{X}'(R) = 0. \tag{5.8}$$

Эта задача решена в № 688 (семинар 7 за прошлый семестр). Повторим проведённое там исследование.

Задача (5.7)–(5.8) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (5.7) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, r) \qquad \text{при} \;\; \lambda > 0; \tag{5.9}$$
$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при} \;\; \lambda = 0; \tag{5.10}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(r) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(R) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, R = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2R}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.12}$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(r) = c_1$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(R) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2R}\right)^2, \quad \mathbf{X}_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (5.7), (5.8).

Шаг 4-2. Случай $hR = 1$. Решаем задачу (5.6).

Будем искать решение задачи (5.6) в виде $m(r,\,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$m(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) \mathbf{T}_n(t). \tag{5.13}$$

Разложим функцию $r\varphi(r) \equiv \left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля:

$$r\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \tag{5.14}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого, поступая аналогично № 706, домножим (5.14) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,R]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):

$$(r\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int\limits_0^R \sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)r}{2R}\right) dr = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^R \left(1-\cos\left(\frac{\pi(2m-1)r}{R}\right)\right) dr =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{R}{\pi(2m-1)}\sin\left(\frac{\pi(2m-1)r}{R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\alpha_m R}{2}.$$

Таким образом, для коэффициентов α_n получаем:

$$\alpha_n = \frac{2}{R}(r\varphi, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R r\varphi(r)\ \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) dr, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.15}$$

Однако, нам в явном виде дана функция $r\varphi(r) = \left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3$, поэтому коэффициенты α_n тоже надо будет найти явно. Но это позже. А сейчас самое время подставить в уравнение и начальное условие в (5.6) ряды (5.13) и (5.14). Получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) \mathbf{T}_n'(t) = -a^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) \mathbf{T}_n(t); \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) \mathbf{T}_n(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right). \end{cases} \tag{5.16}$$

Очевидно, что равенства (5.16) между рядами, стоящими в левой и правой частях, будут заведомо выполнены, если будут равняться друг другу слагаемые с одинаковыми номерами:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_n'(t) + \left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 \mathbf{T}_n(t) = 0; \\ \mathbf{T}_n(0) = \alpha_n. \end{cases} \tag{5.17}$$

Задачи (5.17) есть задачи Коши для <u>однородных</u> линейных уравнений 1-го порядка. Общее решение задачи (5.17) имеет вид

$$\mathbf{T}_n = T_n(0)\, e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t},$$

то есть

$$\mathbf{T}_n = \alpha_n\, e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t}. \tag{5.18}$$

Найдём коэффициенты α_n. Поскольку $r\varphi(r) = \left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3$, то для вычисления α_n нам надо найти интегралы:

$$\frac{2}{R}\int\limits_0^R r\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) dr = \left[\text{по частям}\right] = -\frac{2}{R}\cdot\frac{2R}{\pi(2n-1)}\left(\underbrace{r\cos\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R}}_{=0} - \int\limits_0^R \cos\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) dr\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi(2n-1)}\cdot\frac{2R}{\pi(2n-1)}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R} = \frac{8(-1)^{n+1}R}{\pi^2(2n-1)^2}, \quad \text{и}$$

$$\frac{2}{R}\int\limits_0^R r^3\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)dr = \Big[2\text{ раза по частям}\Big] =$$

$$= -\frac{2}{R}\cdot\frac{2R}{\pi(2n-1)}\left(\underbrace{r^3\cos\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R}}_{=0} - 3\int\limits_0^R r^2\cos\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)dr\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi(2n-1)}\cdot\frac{6R}{\pi(2n-1)}\left[r^2\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R} - \underbrace{2\int\limits_0^R r\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)dr}_{=\frac{8(-1)^{n+1}R^2}{\pi^2(2n-1)^2}}\right] =$$

$$= \frac{24}{\pi^2(2n-1)^2}\left((-1)^{n+1}R^3 - 8\frac{(-1)^{n+1}R^3}{\pi^2(2n-1)^2}\right) = \frac{24(-1)^{n+1}R^3}{\pi^2(2n-1)^2}\left(1-\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\right).$$

Итак,

$$\alpha_n = \frac{2}{R}\int\limits_0^R\left(\left(T-P-\frac{QR}{3kh}-\frac{QR^2}{6k}\right)r+\frac{Q}{6k}r^3\right)\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)dr =$$

$$= \left(T-P-\frac{QR}{3kh}-\frac{QR^2}{6k}\right)\frac{8(-1)^{n+1}R}{\pi^2(2n-1)^2} + \frac{Q}{6k}\cdot\frac{24(-1)^{n+1}R^3}{\pi^2(2n-1)^2}\left(1-\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\right) =$$

$$= \left(T-P-\frac{QR}{3kh}+\frac{QR^2}{3k}\right)\frac{8(-1)^{n+1}R}{\pi^2(2n-1)^2} - \frac{Q}{k}\cdot\frac{32(-1)^{n+1}R^3}{\pi^4(2n-1)^4} =$$

$$= \left(T-P-\frac{QR}{3kh}+\frac{QR^2}{3k}-\frac{3QR^2}{k\pi^2(2n-1)^2}\right)\frac{8(-1)^{n+1}R}{\pi^2(2n-1)^2}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Подставляем найденные α_n в формулу (5.18) вычисления $\mathbf{T}_n(t) = \alpha_n e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t}$ и получаем:

$$\mathbf{T}_n(t) = \left(T-P-\frac{QR}{3kh}+\frac{QR^2}{3k}-\frac{3QR^2}{k\pi^2(2n-1)^2}\right)\frac{8(-1)^{n+1}R}{\pi^2(2n-1)^2}\cdot e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Вернёмся к формуле (5.13) для $m(r,\,t)$. Подставим в неё полученные $\mathbf{T}_n$ и получим

$$m(r,\,t) = \frac{8R}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\left(T-P-\frac{QR}{3kh}+\frac{QR^2}{3k}-\frac{3QR^2}{k\pi^2(2n-1)^2}\right)\cdot e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right). \tag{5.19}$$

Вспомним, что $m(r,\,t) = rv(r,\,t)$, и поделим (5.19) на r:

$$v(r,\,t) = \frac{8R}{\pi^2 r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\left(T-P-\frac{QR}{3kh}+\frac{QR^2}{3k}-\frac{3QR^2}{k\pi^2(2n-1)^2}\right)\cdot e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right).$$

Наконец, поскольку

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t) = \frac{Q}{6k}\left(R^2-r^2\right) + \frac{QR}{3kh} + P + v(r,\,t),$$

мы готовы выписать окончательный

Ответ (для случая $hR = 1$):

$$u(r,t) = \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{QR}{3kh} + P +$$
$$+\frac{8R}{\pi^2 r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\left(T - P - \frac{QR}{3kh} + \frac{QR^2}{3k} - \frac{3QR^2}{k\pi^2(2n-1)^2}\right)\cdot e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t}\cdot \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right),$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.

Случай третьей краевой задачи ($hR \neq 1$).

Шаг 3-3. Решение задачи Штурма-Лиувилля. Случай $hR \neq 1$.
Обозначим для сокращения записи через p коэффициент

$$p = \frac{hR-1}{R}.$$

Уравнению $m_t = a^2 m_{rr}$ с краевыми условиями $m(0,t) = m_r(R,t) + \underbrace{\frac{hR-1}{R}}_{=p}\cdot m(R,t) = 0$

соответствует следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$\mathbf{X}''(r) + \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \tag{5.20}$$
$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad \mathbf{X}'(R) + p\mathbf{X}(R) = 0. \tag{5.21}$$

Общее решение уравнения (5.20) имеет вид

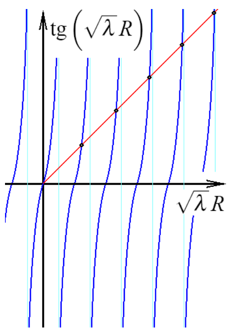
$$\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, r) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{5.22}$$
$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{5.23}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что

$$c_2 = 0, \;\Rightarrow\; \mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r) \;\Rightarrow\; \mathbf{X}'(r) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, r).$$

Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(R) + p\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что

$$\sqrt{\lambda}\,\cos(\sqrt{\lambda}\, R) + p\sin(\sqrt{\lambda}\, R) = 0,$$



откуда

$$\sqrt{\lambda} = -p\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\, R). \tag{5.24}$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$\lambda_n : \qquad \sqrt{\lambda_n} = -p\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, R), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.25}$$

(Рисунок соответствует случаю $p < 0$, то есть $hR < 1$. В случае $p > 0$ тангенсы надо перевенуть, и у уравнения (5.24) также будет бесконечно много положительных корней.)

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n} r\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.26}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(R) + p\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 + pc_1 R = 0$. Это равенство верно только в случае $pR = -1$ то есть $hR - 1 = -1$. Поскольку ни h, ни R не могут равняться нулю по смыслу задачи, то равенство $c_1 + pc_1 R = 0$ возможно только при $c_1 = 0$. Следовательно, в данном случае задача Штурма-Лиувилля не имеет собственного значения, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n : \quad \sqrt{\lambda_n} = -p\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Big\{\mathbf{X}_n(r)\Big\} = \Big\{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\Big\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

задачи (5.20), (5.21).

<u>**Шаг 4. Случай $hR \neq 1$**</u>**. Решаем задачу (5.6).**

Будем искать решение задачи (5.6) в виде $m(r,\,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$m(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\mathbf{T}_n(t). \tag{5.27}$$

Разложим функцию $r\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля:

$$r\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right) \tag{5.28}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого, поступая аналогично № 706, домножим (5.28) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\sqrt{\lambda_m}\,r\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,R]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):

$$(r\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int_0^R \sin^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,r\right) dr = \frac{\alpha_m}{2}\int_0^R \left(1 - \cos\left(2\sqrt{\lambda_m}\,r\right)\right) dr =$$
$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}}\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,r\right)\Big|_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}{2\sqrt{\lambda_m}}\right).$$

Поскольку, в силу тождеств $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, имеет место равенство:

$$R - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}{2\sqrt{\lambda_m}} = \left[\sqrt{\lambda_m} = -p\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,R)\right] = R + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}{p\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,R)} =$$
$$= R + \frac{1}{p}\cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right) = \frac{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}{p},$$

в итоге для коэффициентов α_n получаем:

$$\alpha_n = \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}(r\varphi, \mathbf{X}_n) = \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}\int_0^R r\varphi(r)\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right) dr, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.29}$$

Однако, нам в явном виде дана функция $r\varphi(r) = \left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3$, поэтому коэффициенты α_n тоже надо будет найти явно. Но это позже. А сейчас самое время подставить в уравнение и начальное условие в (5.6) ряды (5.27) и (5.28). Получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) \mathbf{T}_n'(t) = -a^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) \mathbf{T}_n(t); \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) \mathbf{T}_n(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right). \end{cases} \tag{5.30}$$

Очевидно, что равенства (5.30) между рядами, стоящими в левой и правой частях, будут заведомо выполнены, если будут равняться друг другу слагаемые с одинаковыми номерами:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_n'(t) + a^2 \lambda_n \mathbf{T}_n(t) = 0; \\ \mathbf{T}_n(0) = \alpha_n. \end{cases} \tag{5.31}$$

Решение $T_n(t)$ задачи (5.31) задаётся формулой:

$$\mathbf{T}_n(t) = \alpha_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.32}$$

Для того, чтобы полностью выписать решение $m(r,\, t)$ задачи (5.6) в виде ряда (5.27), нам не хватает только чисел α_n.

Учитывая, что $r\varphi(r) = \left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3$, найдём α_n по формуле (5.29).

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \int\limits_0^R r\varphi(r)\, \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr = \\ &= \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \int\limits_0^R \left(\left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3\right) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr = \\ &= \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \left[-\left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) \left(R + \frac{1}{p}\right) \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{Q}{6k} \left(R^3 + \frac{3R^2}{p} - \frac{6}{\lambda_n}\left(R + \frac{1}{p}\right)\right) \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались интегралами:

$$\begin{aligned} \int\limits_0^R r\, \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr &= \big[\text{по частям}\big] = \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(r\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \int\limits_0^R \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr \right) = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(R\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right) - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right)\Big|_{r=0}^{r=R} \right) = \left[\sqrt{\lambda_n} = -p\, \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, R)\right] = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(R\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right) + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{p\, \mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \right) = -\left(R + \frac{1}{p}\right) \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}. \end{aligned}$$

и

$$\int\limits_0^R r^3\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr = \left[2\text{ раза по частям}\right] =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(r^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - 3\int\limits_0^R r^2\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - \frac{3}{\sqrt{\lambda_n}}\left[r^2\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \underbrace{2\int\limits_0^R r\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr}_{=-2\left(R+\frac{1}{p}\right)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}}\right]\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - 3R^2\,\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{6}{\lambda_n}\left(R+\frac{1}{p}\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)\right) =$$

$$= \left[\text{в силу (5.25)},\ \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} = -\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{p}\right] =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R^3 + \frac{3R^2}{p} - \frac{6}{\lambda_n}\left(R+\frac{1}{p}\right)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right).$$

Упростим выражение для α_n, пользуясь равенствами

$$p = \frac{hR-1}{R} \quad\Longrightarrow\quad R+\frac{1}{p} = \frac{hR^2}{hR-1} \Longrightarrow \quad p\left(R+\frac{1}{p}\right) = hR.$$

$$\alpha_n = \frac{2p}{pR+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\Bigg[-\left(T-P-\frac{QR}{3kh}-\frac{QR^2}{6k}\right)\left(R+\frac{1}{p}\right) -$$

$$-\frac{Q}{6k}\left(R^3+\frac{3R^2}{p}-\frac{6}{\lambda_n}\left(R+\frac{1}{p}\right)\right)\Bigg]\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} =$$

$$= \frac{2p\left(R+\frac{1}{p}\right)}{pR+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\left[-(T-P) + \frac{Q}{k\lambda_n}\right]\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} +$$

$$+ \frac{2p}{pR+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\left[\frac{QR}{6k}(2+Rh)\left(R+\frac{1}{p}\right) - \frac{Q}{6k}\left(R^3+\frac{3R^3}{hR-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{2hR}{pR+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\left[P-T + \frac{Q}{k\lambda_n}\right]\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} +$$

$$+ \frac{2p}{pR+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\left[\frac{Q}{6k}\cdot\frac{hR^3}{hR-1} - \frac{Q}{6k}\cdot\frac{R^3(hR+2)}{hR-1}\right] =$$

$$= \frac{2hR}{pR+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\left[P-T + \frac{Q}{k\lambda_n}\right]\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Подставив с учётом, что $pR = hR-1$, найденные

$$\alpha_n = \frac{2hR}{hR-1+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\left[P-T + \frac{Q}{k\lambda_n}\right]\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{5.33}$$

в формулу (5.32) для нахождения T_n, а затем полученные T_n – в (5.27), получим

$$m(r,\,t)=2hR\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{hR-1+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\left[P-T\;+\;\frac{Q}{k\lambda_n}\right]\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\;e^{-a^2\lambda_n t}. \tag{5.34}$$

Вспомним, что $m(r,\,t)=rv(r,\,t)$, и поделим (5.34) на r:

$$v(r,\,t)=\frac{2hR}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{hR-1+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\left[P-T\;+\;\frac{Q}{k\lambda_n}\right]\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\;e^{-a^2\lambda_n t}.$$

Наконец, поскольку

$$u(r,\,t)=v(r,\,t)+w(r,\,t)=\frac{Q}{6k}\left(R^2-r^2\right)+\frac{QR}{3kh}+P+v(r,\,t),$$

мы готовы выписать окончательный
Ответ:

$$\begin{aligned}u(r,t)=&\frac{Q}{6k}\left(R^2-r^2\right)+\frac{QR}{3kh}+P+\\&+\frac{2hR}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{hR-1+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\left[P-T\;+\;\frac{Q}{k\lambda_n}\right]\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\;e^{-a^2\lambda_n t},\end{aligned}$$

где $a^2=\frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности, а $\lambda_n>0$ – решения уравнения (5.25): $\quad\sqrt{\lambda_n}=-\frac{hR-1}{R}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R),\qquad n\in\mathbb{N}.$