Задачи для однородного уравнения теплопроводности в прямоугольнике.

1. № 712(а).

Начальная температура однородного бесконечного прямоугольного стержня $0 \leqslant x \leqslant p$, $0 \leqslant y \leqslant s$, $-\infty < z < +\infty$, является произвольной функцией $\varphi(x, y)$. Определить температуру стержня при $t > 0$, если температура поверхности стержня поддерживается равной нулю.

Записав эти условия математически, с учётом, что никакие заданные функции не зависят от переменной z, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & (x, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x, y; 0) = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Pi; \\ u\Big|_{(x,y)\in\partial\Pi} = 0, & 0 < t < T, \end{cases} \tag{1.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x, y): \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant y \leqslant s\},$$

а $\partial\Pi$ – его граница.

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.

Если искать решение задачи (1.1) в виде двойного ряда

$$u(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{1.2}$$

то, подставив ряд[1] в уравнение $u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}'_{kn}(t) = a^2 \cdot \left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{1.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от (x, y), то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + \lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{1.4}$$

[1] Заметим, что индексы суммирования у $\mathbf{T}_{kn}$, $\mathbf{X}_k$ и $\mathbf{Y}_n$ различны. Фактически этот ряд можно записать в виде следующего повторного:

$$u(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (1.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{1.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}_n''(y) + \nu_n \mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

Подобные задачи рассматривались уже не раз (№ 687 из файла Sem7, № 705 из semS1 и др.). Поэтому запишем результат:

существет бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \frac{\pi^2 k^2}{p^2}, \quad \mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right), \qquad \nu_n = \frac{\pi^2 n^2}{s^2}, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right), \qquad k,\, n \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем задачу

$$\mathbf{T}_{kn}'(t) + \lambda_{kn} a^2 \mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{p^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}. \tag{1.7}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = A_{kn} e^{-\, a^2 \lambda_{kn} t} \qquad t > 0, \tag{1.8}$$

где A_{kn} – произвольные постоянные.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (1.1).

Будем искать решение задачи (1.1) в виде ряда (1.2). Так как найденные на Шаге 2 функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ удовлетворяют краевым условиям (1.5), то функция

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x) \mathbf{Y}_n(y) \mathbf{T}_{kn}(t)$$

удовлетворяет краевому условию $u\Big|_{(x,y)\in\partial\Pi} = 0$. А в силу рассуждений на Шаге 1, $u(x,\, y;\, t)$ есть решение уравнения $u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$.

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y)$. Для функции $u(x,\, y;\, t)$ искомого вида (1.2) оно означает:

$$\varphi(x,\, y) = u(x,\, y;\, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right) A_{kn}, \tag{1.9}$$

Пусть функция $\varphi(x,\, y)$, входящая в начальное условие, разлагается в прямоугольнике Π в двойной ряд Фурье по синусам:

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right), \tag{1.10}$$

с коэффициентами

$$\alpha_{kn} = \frac{4}{ps}(\varphi,\; \mathbf{X}_l \cdot \mathbf{Y}_m) = \frac{4}{ps} \int_0^p \int_0^s \varphi(x,\, y) \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right) dxdy. \tag{1.11}$$

Получим формулу (1.11) вычисления коэффициентов Фурье для двойного ряда по синусам. Для этого, как обычно, домножим (1.10) на $\sin\left(\frac{\pi lx}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi my}{s}\right)$ и проинтегрируем по П. Учитывая ортогональность собственных функций задач Штурма-Лиувилля, получим:

$$(\varphi,\ \mathbf{X}_l\cdot\mathbf{Y}_m)=\alpha_{lm}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\sin^2\left(\frac{\pi lx}{p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi my}{s}\right)dxdy=\alpha_{lm}\int\limits_0^p\sin^2\left(\frac{\pi lx}{p}\right)dx\int\limits_0^s\sin^2\left(\frac{\pi my}{s}\right)dy=$$
$$=\frac{\alpha_{lm}}{4}\int\limits_0^p\left(1-\cos\left(\frac{2\pi lx}{p}\right)\right)dx\int\limits_0^s\left(1-\cos\left(\frac{2\pi my}{s}\right)\right)dy=\alpha_{lm}\cdot\frac{ps}{4}.$$

Из равенств (1.9), (1.10) и (1.11) получаем

$$A_{kn}=\alpha_{kn}=\frac{4}{ps}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(x,\,y)\sin\left(\frac{\pi kx}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right)dxdy. \tag{1.12}$$

Итак, мы знаем функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ полностью:

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=\left(\frac{4}{ps}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(x,\,y)\sin\left(\frac{\pi kx}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right)dxdy\right)\cdot e^{-a^2\lambda_{kn}t}\qquad t>0. \tag{1.13}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.2) найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ из (1.13).

Ответ:

$$u(x,\,y;\,t)=\frac{4}{ps}\sum_{k,n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(\xi,\,\eta)\sin\left(\frac{\pi k\xi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi n\eta}{s}\right)d\xi d\eta\right)\sin\left(\frac{\pi kx}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right)\cdot e^{-a^2\lambda_{kn}t},$$

где $\lambda_{kn}=\frac{\pi^2k^2}{p^2}+\frac{\pi^2n^2}{s^2}$.

2. № 712(б).

Начальная температура однородного бесконечного прямоугольного стержня $0\leqslant x\leqslant p$, $0\leqslant y\leqslant s$, $-\infty<z<+\infty$, является произвольной функцией $\varphi(x,\,y)$. Определить температуру стержня при $t>0$, если часть поверхности стержня $x=0$, $0<y<s$ теплоизолирована, а остальная часть его поверхности поддерживается при нулевой температуре.

Записав эти условия математически, с учётом, что никакие заданные функции не зависят от переменной z, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(x,\,y;\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right), & (x,\,y)\in\Pi,\quad t>0;\\ u(x,\,y;\,0)=\varphi(x,\,y), & (x,\,y)\in\Pi;\\ u_x(0,\,y;\,t)=u(p,\,y;\,t)=0 & 0<y<s,\quad 0<t<T,\\ u(x,\,0;\,t)=u(x,\,s;\,t)=0 & 0<x<p,\quad 0<t<T,\end{cases} \tag{2.1}$$

где через П обозначен прямоугольник

$$\Pi=\{(x,\,y):\quad 0\leqslant x\leqslant p,\quad 0\leqslant y\leqslant s\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения. (Полное повторение Шага 1 для № 712 (а).)
Если искать решение задачи (2.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t),\tag{2.2}$$

то, подставив ряд в уравнение $u_t = a^2\,(u_{xx}+u_{yy})$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}'_{kn}(t)=a^2\cdot\left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}.\tag{2.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\,y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kn}(t)+\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t)=0,\qquad\qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}=\lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0,\qquad \mathbf{Y}''_n(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(x)=0,\qquad \mu_k+\nu_n=\lambda_{kn}.\tag{2.4}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (2.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля
Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}'(0)=\mathbf{X}(p)=0,\qquad\qquad \mathbf{Y}(0)=\mathbf{Y}(s)=0.\tag{2.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases}\mathbf{X}''_k(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0,\\ \mathbf{X}'_k(0)=\mathbf{X}_k(p)=0,\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\mathbf{Y}''_n(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(y)=0,\\ \mathbf{Y}_n(0)=\mathbf{Y}_n(s)=0,\end{cases}\tag{2.6}$$

Решим задачу для $\mathbf{X}(x)$, аналогичную рассмотренной в № 688 из файла Sem7. Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x)+\mu\mathbf{X}(x)=0$ имеет вид

$$\mathbf{X}(x)=c_1\sin(\sqrt{\mu}\,x)+c_2\cos(\sqrt{\mu}\,x)\qquad \text{при}\ \ \mu>0;\tag{2.7}$$
$$\mathbf{X}(x)=c_1e^{\sqrt{-\mu}\,x}+c_2e^{-\sqrt{-\mu}\,x}\qquad \text{при}\ \ \mu<0;\tag{2.8}$$
$$\mathbf{X}(x)=c_1x+c_2\qquad \text{при}\ \ \mu=0;\tag{2.9}$$

- При $\mu>0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0)=0$, что $c_1=0$, $\ \Rightarrow\ \ \mathbf{X}(x)=c_2\cos(\sqrt{\mu}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X(p)=0$ получаем, что $\sqrt{\mu}\,p=\pi\left(-\frac{1}{2}+k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\mu_k=\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2,\qquad k\in\mathbb{N}.\tag{2.10}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_k(x)=\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right),\qquad k\in\mathbb{N}.\tag{2.11}$$

- При $\mu < 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\mu}\, x$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(p) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений при $\mu < 0$.

- При $\mu = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_2$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(p) = 0$ получаем, что $c_2 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений при $\mu = 0$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \quad \mathbf{X}_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

задачи

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}(p) = 0. \end{cases}$$

Задачи, подобные задаче Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Y}(y)$ рассматривались уже не раз (№ 687 из файла Sem7, № 705 из semS1 и др.). Поэтому запишем результат:

существет бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \frac{\pi^2 n^2}{s^2}, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right), \qquad k,\ n \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем задачу

$$\mathbf{T}_{kn}'(t) + \lambda_{kn} a^2 \mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}. \tag{2.12}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = A_{kn} e^{-\,a^2 \lambda_{kn} t} \qquad t > 0, \tag{2.13}$$

где A_{kn} – произвольные постоянные.

Шаг 3. Решаем задачу (2.1).

Будем искать решение задачи (2.1) в виде ряда (2.2). Так как найденные на Шаге 2 функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ удовлетворяют краевым условиям (2.5), то функция

$$u(x,\ y;\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x) \mathbf{Y}_n(y) \mathbf{T}_{kn}(t)$$

удовлетворяет краевому условию

$$\begin{cases} u_x(0,\ y;\ t) = u(p,\ y;\ t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\ 0;\ t) = u(x,\ s;\ t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T. \end{cases}$$

А в силу рассуждений на Шаге 1, $u(x,\ y;\ t)$ есть решение уравнения $u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$.

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,\ y;\ 0) = \varphi(x,\ y)$. Для функции $u(x,\ y;\ t)$ искомого вида (2.2) оно означает:

$$\varphi(x,\ y) = u(x,\ y;\ 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right) A_{kn}, \tag{2.14}$$

Пусть функция $\varphi(x,\, y)$, входящая в начальное условие, разлагается в прямоугольнике П в двойной ряд Фурье:

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right), \tag{2.15}$$

с коэффициентами

$$\alpha_{kn} = \frac{4}{ps}(\varphi,\, \mathbf{X}_l \cdot \mathbf{Y}_m) = \frac{4}{ps}\int_0^p\int_0^s \varphi(x,\, y) \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right) dxdy. \tag{2.16}$$

Получим формулу (2.16) вычисления коэффициентов Фурье для двойного ряда. Для этого, как обычно, домножим (1.10) на $\cos\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{s}\right)$ и проинтегрируем по П. Учитывая ортогональность собственных функций задач Штурма-Лиувилля, получим:

$$(\varphi,\, \mathbf{X}_l{\cdot}\mathbf{Y}_m) = \alpha_{lm}\int_0^p\int_0^s \cos^2\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi m y}{s}\right) dxdy = \alpha_{lm}\int_0^p \cos^2\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right) dx \int_0^s \sin^2\left(\frac{\pi m y}{s}\right) dy =$$

$$= \frac{\alpha_{lm}}{4}\int_0^p \left(1+\cos\left(\frac{\pi(2l-1)x}{p}\right)\right) dx \int_0^s \left(1-\cos\left(\frac{2\pi m y}{s}\right)\right) dy = \alpha_{lm}\cdot\frac{ps}{4}.$$

Из равенств (2.14), (2.15) и (2.16) получаем

$$A_{kn} = \alpha_{kn} = \frac{4}{ps}\int_0^p\int_0^s \varphi(x,\, y)\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right) dxdy. \tag{2.17}$$

Итак, мы знаем функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ полностью:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \left(\frac{4}{ps}\int_0^p\int_0^s \varphi(x,\, y)\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right) dxdy\right)\cdot e^{-\,a^2\lambda_{kn}t} \qquad t>0. \tag{2.18}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (2.2) найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ из (2.18).

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, y;\, t) = \frac{4}{ps}\sum_{k,n=1}^{\infty}\left(\int_0^p\int_0^s \varphi(\xi,\, \eta)\cos\left(\frac{\pi(2k-1)\xi}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi n \eta}{s}\right) d\xi d\eta\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right)\cdot e^{-\,a^2\lambda_{kn}t},$$

где $\lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}$.

3. № 712(в).

Начальная температура однородного бесконечного прямоугольного стержня $0 \leqslant x \leqslant p$, $0 \leqslant y \leqslant s$, $-\infty < z < +\infty$, является произвольной функцией $\varphi(x,\, y)$. Определить температуру стержня при $t>0$, если на части поверхности стержня $x=p$, $0<y<s$ происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру, часть $y=0$, $0<x<p$ теплоизолирована, а остальная поверхность стержня поддерживается при нулевой температуре.

Записав эти условия математически, с учётом, что никакие заданные функции не зависят от

переменной z, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(x,\,y;\,t)$ *из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right), & (x,\,y)\in\Pi, \quad t>0;\\ u(x,\,y;\,0)=\varphi(x,\,y), & (x,\,y)\in\Pi;\\ u(0,\,y;\,t)=u_x(p,\,y;\,t)+hu(p,\,y;\,t)=0 & 0<y<s, \quad 0<t<T,\\ u_y(x,\,0;\,t)=u(x,\,s;\,t)=0 & 0<x<p, \quad 0<t<T,\end{cases} \tag{3.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\,y): \quad 0\leqslant x\leqslant p, \quad 0\leqslant y\leqslant s\}.$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения. (Полное повторение Шага 1 для № 712 (а) и (б).)
Если искать решение задачи (3.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{3.2}$$

то, подставив ряд в уравнение $u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}'_{kn}(t)=a^2\cdot\left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{3.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\,y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kn}(t)+\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t)=0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}=\lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(x)=0, \qquad \mu_k+\nu_n=\lambda_{kn}. \tag{3.4}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (3.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.
Шаг 2. Решение двух задач Штурма-Лиувилля
Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}'(p)+h\mathbf{X}(p)=0, \qquad \mathbf{Y}'(0)=\mathbf{Y}(s)=0. \tag{3.5}$$

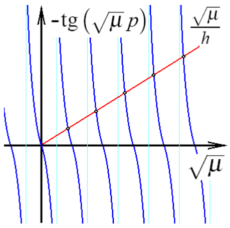
Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases}\mathbf{X}''_k(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0,\\ \mathbf{X}_k(0)=\mathbf{X}'_k(p)+h\mathbf{X}_k(p)=0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{Y}''_n(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(y)=0,\\ \mathbf{Y}'_n(0)=\mathbf{Y}_n(s)=0,\end{cases} \tag{3.6}$$

Решим задачу для $\mathbf{X}(x)$, аналогичную рассмотренной на Шаге 3-3 в № 709(в) из файла SemS3.
Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x)+\mu\mathbf{X}(x)=0$ имеет вид

$$\mathbf{X}(x)=c_1\sin(\sqrt{\mu}\,x)+c_2\cos(\sqrt{\mu}\,x) \qquad \text{при } \ \mu>0; \tag{3.7}$$

$$\mathbf{X}(x)=c_1x+c_2 \qquad \text{при } \ \mu=0; \tag{3.8}$$

- При $\mu > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что
$$c_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}(x) = c_1 \sin(\sqrt{\mu}\, x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'(x) = c_1\sqrt{\mu}\cos(\sqrt{\mu}\, x).$$
Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(X) + h\mathbf{X}(X) = 0$ получаем, что
$$\sqrt{\mu}\, \cos(\sqrt{\mu}\, p) + h \sin(\sqrt{\mu}\, p) = 0,$$


откуда
$$\sqrt{\mu} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\mu}\, p). \tag{3.9}$$
Это уравнение имеет бесконечное множество решений:
$$\mu_k: \qquad \sqrt{\mu_k} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\mu_k}\, p), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$\mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\sqrt{\mu_k}\, x\right), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

- При $\mu < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\mu = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_1 x$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(p) + h\mathbf{X}(p) = 0$ получаем, что $c_1 + hc_1 p = 0$. Поскольку $h > 0$ и $p > 0$, то равенство $c_1 + hc_1 p = 0$ возможно только при $c_1 = 0$. Следовательно, в данном случае задача Штурма-Лиувилля не имеет собственного значения, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений
$$\mu_k: \quad \sqrt{\mu_k} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\mu_k}\, p), \quad \mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\sqrt{\mu_k}\, x\right), \qquad k \in \mathbb{N}.$$
задачи
$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(p) + h\mathbf{X}(p) = 0, \end{cases}$$
Задача, аналогичная задаче Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Y}(y)$ рассматривалась, например, в № 712 (б). Поэтому запишем результат:

существет бесконечное множество нетривиальных решений
$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(x) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2s} x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$
задачи
$$\begin{cases} \mathbf{Y}_n''(y) + \nu_n \mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}'(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \end{cases}$$
В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем задачу
$$\mathbf{T}_{kn}'(t) + \lambda_{kn} a^2 \mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \mu_k + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2s)^2}. \tag{3.12}$$
Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:
$$\mathbf{T}_{kn}(t) = A_{kn} e^{-\,a^2\lambda_{kn} t} \qquad t > 0, \tag{3.13}$$
где A_{kn} – произвольные постоянные.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (3.1).

Будем искать решение задачи (3.1) в виде ряда (3.2). Так как найденные на Шаге 2 функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ удовлетворяют краевым условиям (3.5), то функция

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$$

удовлетворяет краевому условию

$$\begin{cases} u(0,\,y;\,t)=u_x(p,\,y;\,t)+hu(p,\,y;\,t)=0 & 0<y<s, \quad 0<t<T,\\ u_y(x,\,0;\,t)=u(x,\,s;\,t)=0 & 0<x<p, \quad 0<t<T. \end{cases}$$

А в силу рассуждений на Шаге 1, $u(x,\,y;\,t)$ есть решение уравнения $u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)$.

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,\,y;\,0)=\varphi(x,\,y)$. Для функции $u(x,\,y;\,t)$ искомого вида (3.2) оно означает:

$$\varphi(x,\,y)=u(x,\,y;\,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{\mu_k}\;x\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}x\right)A_{kn}, \tag{3.14}$$

Пусть функция $\varphi(x,\,y)$, входящая в начальное условие, разлагается в прямоугольнике Π в двойной ряд Фурье:

$$\varphi(x,\,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{kn}\sin\left(\sqrt{\mu_k}\;x\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}x\right), \tag{3.15}$$

с коэффициентами

$$\alpha_{kn}=\frac{4\left(h^2+\mu_k\right)}{s\left[p\left(h^2+\mu_k\right)+h\right]}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(x,\,y)\sin\left(\sqrt{\mu_k}\;x\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}x\right)dxdy. \tag{3.16}$$

Получим формулу (3.16) вычисления коэффициентов Фурье для двойного ряда. Для этого, как обычно, домножим (1.10) на $\sin\left(\sqrt{\mu_l}\;x\right)\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2s}x\right)$ и проинтегрируем по Π. Учитывая ортогональность собственных функций задач Штурма-Лиувилля, получим:

$$\left(\varphi,\,\mathbf{X}_l\!\cdot\!\mathbf{Y}_m\right)=\alpha_{lm}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\sin^2\left(\sqrt{\mu_l}\;x\right)\cos^2\left(\frac{\pi(2m-1)y}{2s}\right)dxdy=\alpha_{lm}\int\limits_0^p\sin^2\left(\sqrt{\mu_l}\;x\right)dx\int\limits_0^s\cos^2\left(\frac{\pi(2m-1)y}{2s}\right)dy=$$

$$=\frac{\alpha_{lm}}{4}\int\limits_0^p\left(1-\cos\left(2\sqrt{\mu_l}\;x\right)\right)dx\int\limits_0^s\left(1+\cos\left(\frac{\pi(2m-1)y}{s}\right)\right)dy=$$

$$=\alpha_{lm}\cdot\frac{s}{4}\cdot\left(p-\frac{1}{2\sqrt{\mu_l}}\sin\left(2\sqrt{\mu_l}\;x\right)\Big|_{x=0}^{x=p}\right)=$$

$$=\left[\sqrt{\mu}_l=-h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\mu}_l\,p)\right]=\alpha_{lm}\cdot\frac{s}{4}\cdot\left(p+\frac{2\sin(\sqrt{\mu}_l\,p)\cos(\sqrt{\mu}_l\,p)}{2h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\mu}_l\,p)}\right)=\alpha_{lm}\cdot\frac{s}{4}\cdot\left(p+\frac{\cos^2(\sqrt{\mu}_l\,p)}{h}\right)=$$

$$=\left[\cos^2\beta=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\beta},\quad \mathrm{tg}(\sqrt{\mu}_l\,p)=-\frac{\sqrt{\mu}_l}{h}\right]=\alpha_{lm}\cdot\frac{s}{4}\cdot\left(p+\frac{1}{h\left(1+\frac{\mu_l}{h^2}\right)}\right)=$$

$$=\alpha_{lm}\cdot\frac{s}{4}\cdot\left(p+\frac{h}{h^2+\mu_l}\right)=\alpha_{lm}\cdot\frac{s\left[p\left(h^2+\mu_l\right)+h\right]}{4\left(h^2+\mu_l\right)}.$$

Из равенств (3.14), (3.15) и (3.16) получаем

$$A_{kn}=\alpha_{kn}=\frac{4\left(h^2+\mu_k\right)}{s\left[p\left(h^2+\mu_k\right)+h\right]}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(x,\,y)\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right)dxdy. \tag{3.17}$$

Итак, мы знаем функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ полностью:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \left(\frac{4\left(h^2+\mu_k\right)}{s\left[p\left(h^2+\mu_k\right)+h\right]} \int\limits_0^p \int\limits_0^s \varphi(x,\, y) \sin\left(\sqrt{\mu_k}\, x\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2s} x\right) dxdy \right) \cdot e^{-\, a^2 \lambda_{kn} t}.$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (3.2) найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$.
Ответ:

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k,n=1}^{\infty} A_{kn} \sin\left(\sqrt{\mu_k}\, x\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2s} x\right) \cdot e^{-\, a^2 \lambda_{kn} t},$$

где $\lambda_{kn} = \mu_k + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2s)^2}$, μ_k – положительные корни уравнения $\sqrt{\mu} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\mu}\, p)$, а

$$A_{kn} = \frac{4\left(h^2+\mu_k\right)}{s\left[p\left(h^2+\mu_k\right)+h\right]} \int\limits_0^p \int\limits_0^s \varphi(x,\, y) \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right) dxdy.$$

4. № 716.

В кубе $0 \leqslant x,\, y,\, z \leqslant l$ происходит диффузия вещества, частицы которого распадаются со скоростью, пропорциональной его концентрации. Определить концентрацию вещества в этом кубе при $t > 0$, если начальная концентрация вещества в нём постоянна и равна U. Концентрация вещества на поверхности куба поддерживается равной нулю.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(x,\, y;\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right) - \beta u, & (x,\, y,\, z) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\, y,\, z;\, 0) = U = \varphi(x,\, y,\, z), & (x,\, y,\, z) \in \Pi; \\ u\Big|_{(x,\, y,\, z)\in\partial\Pi} = 0, & 0 < t < T, \end{cases} \tag{4.1}$$

где через Π обозначен куб

$$\Pi = \left\{(x,\, y,\, z): \quad 0 \leqslant x,\, y,\, z \leqslant l\right\},$$

$\partial\Pi$ – его граница, β - коэффициент распада.
Шаг 1. Избавление от слагаемого $(-\beta u)$.
Слагаемое $(-\beta u)$, появившееся в уравнении из-за распада вещества, мешает нам провести предварительные рассуждения, аналогичные проведённым в № 712 (а-в). Однако избавиться от него очень просто: поскольку $u_t + \beta u = \left(e^{\beta t} u\right)_t \cdot e^{-\beta t}$, то достаточно домножить уравнение $u_t = \Delta u - \beta u$ на $e^{\beta t}$ и
произвести замену:

$$v(x,\, y,\, z;\, t) = e^{\beta t} u(x,\, y,\, z;\, t).$$

В результате задача (4.1) превратится в

$$\begin{cases} v_t = a^2\left(v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}\right), & (x,\, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ v(x,\, y,\, z;\, 0) = U, & (x,\, y,\, z) \in \Pi; \\ v\Big|_{(x,\, y,\, z)\in\partial\Pi} = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{4.2}$$

Заметим, что начальное и граничное условия не изменились.
Шаг 2. Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (4.2) в виде тройного ряда

$$v(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x) \mathbf{Y}_m(y) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kmn}(t), \tag{4.3}$$

то, подставив ряд[2] в уравнение $v_t = a^2\left(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_m(y)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}'_{kmn}(t) = \\ = a^2 \cdot \Big(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_m(y)\mathbf{Z}_n(z) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_m(y)\mathbf{Z}_n(z) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_m(y)\mathbf{Z}''_n(z)\Big)\,\mathbf{T}_{kmn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_m(y)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kmn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kmn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kmn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_m(y)}{\mathbf{Y}_m(y)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}_n(z)}. \tag{4.4}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y,\, z)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kmn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kmn}(t) + \lambda_{kmn}\mathbf{T}_{kmn}(t) = 0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_m(y)}{\mathbf{Y}_m(y)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}_n(z)} = \lambda_{kmn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, другая – только от y, а третья – только от z, может быть константой только в случае, если все эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$, ν_m и $\varkappa_n$ такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_m(y) + \nu_m\mathbf{Y}_m(x) = 0, \qquad \mathbf{Z}''_n(z) + \varkappa_n\mathbf{Z}_n(z) = 0, \tag{4.5}$$

$$\mu_k + \nu_m + \varkappa_n = \lambda_{kmn}. \tag{4.6}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (4.1) с решения трёх задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$, для $\mathbf{Y}_m(y)$ и для $\mathbf{Z}_n(z)$.

Шаг 3. Решение трёх задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$, для $\mathbf{Y}_m(y)$ и для $\mathbf{Z}_n(z)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(l) = 0, \qquad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Y}(l) = 0. \tag{4.7}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$, $\mathbf{Y}_m(y)$ и $\mathbf{Z}_n(z)$ есть решения задач Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{Y}''_m(y) + \nu_n\mathbf{Y}_m(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_m(0) = \mathbf{Y}_m(z) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{Z}''_n(z) + \varkappa_n\mathbf{Z}_n(z) = 0, \\ \mathbf{Z}_n(0) = \mathbf{Z}_n(l) = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

Подобные задачи рассматривались уже не раз (№ 687 из файла Sem7, № 705 из semS4 и др.). Поэтому запишем результат:

существет бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2}, \quad \mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right), \qquad \nu_m = \frac{\pi^2 m^2}{l^2}, \quad \mathbf{Y}_m(y) = \sin\left(\frac{\pi m y}{l}\right), \tag{4.9}$$

$$\varkappa_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad \mathbf{Z}_n(z) = \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right), \qquad k,\, m,\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

В силу соотношения (4.6), для функций $\mathbf{T}_{kmn}$ имеем задачу

$$\mathbf{T}'_{kmn}(t) + a^2\lambda_{kmn}\mathbf{T}_{kmn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kmn} = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l^2} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}. \tag{4.11}$$

---

[2] Заметим, что индексы суммирования у $\mathbf{T}_{kmn}$, $\mathbf{X}_k$, $\mathbf{Y}_m$ и $\mathbf{Z}_n$ различны. Фактически этот ряд можно записать в виде следующего повторного:

$$v(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{Y}_m(y)\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kmn}(t).$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kmn}(t) = A_{kmn} e^{-\,a^2 \lambda_{kmn} t} \qquad\qquad t > 0, \tag{4.12}$$

где A_{kmn} – произвольные постоянные.

<u>Шаг 4.</u> Решаем задачу (4.2).

Будем искать решение задачи (4.2) в виде ряда (4.3). Так как найденные на Шаге 3 функции $\mathbf{X}_k(x)$, $\mathbf{Y}_m(y)$ и $\mathbf{Z}_n(z)$ удовлетворяют краевым условиям (4.7), то функция

$$v(x,\,y,\,z;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_m(y)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kmn}(t)$$

удовлетворяет краевому условию $v\Big|_{(x,\,y)\in\partial\Pi} = 0$. А в силу рассуждений на Шаге 2, $v(x,\,y,\,z;\,t)$ есть решение уравнения $v_t = a^2\left(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}\right)$.

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие
$v(x,\,y,\,z;\,0) = U$. Для функции $v(x,\,y,\,z;\,t)$ искомого вида (4.3) оно означает:

$$\varphi(x,\,y,\,z) = U = v(x,\,y,\,z;\,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) A_{kmn}, \tag{4.13}$$

Пусть функция $\varphi(x,\,y,\,z) = U$, входящая в начальное условие, разлагается в кубе Π в тройной ряд Фурье по синусам:

$$\varphi(x,\,y,\,z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kmn} \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right), \tag{4.14}$$

с коэффициентами

$$\alpha_{kmn} = \frac{8}{l^3}\int_0^l\int_0^l\int_0^l \varphi(x,\,y,\,z)\sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dxdydz. \tag{4.15}$$

Получим формулу (4.15) вычисления коэффициентов Фурье для тройного ряда по синусам. Для этого, как обычно, домножим (4.14) на $\sin\left(\frac{\pi p x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi q y}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi r z}{l}\right)$ и проинтегрируем по Π. Учитывая ортогональность собственных функций задач Штурма-Лиувилля, получим:

$$\begin{aligned}
\left(\varphi,\ \mathbf{X}_k\cdot\mathbf{Y}_m\cdot\mathbf{Z}_n\right) &= \alpha_{pqr}\int_0^l\int_0^l\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi p x}{l}\right)\sin^2\left(\frac{\pi q y}{l}\right)\sin^2\left(\frac{\pi r z}{l}\right) dxdydz = \\
&= \alpha_{pqr}\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi p x}{l}\right) dx \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi q y}{l}\right) dy \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi r z}{l}\right) dz = \\
= \frac{\alpha_{pqr}}{8}\int_0^l \left(1-\cos\left(\frac{2\pi p x}{l}\right)\right) dx &\int_0^l \left(1-\cos\left(\frac{2\pi q y}{l}\right)\right) dy \int_0^l \left(1-\cos\left(\frac{2\pi r z}{l}\right)\right) dz = \alpha_{pqr}\cdot\frac{l^3}{8}.
\end{aligned}$$

Из равенств (4.13), (4.14) и (4.15) получаем

$$A_{kmn} = \alpha_{kmn} = \frac{8}{l^3}\int_0^l\int_0^l\int_0^l \varphi(x,\,y,\,z)\sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dxdydz. \tag{4.16}$$

В данном случае, функция $\varphi(x,\, y,\, z)$ нам дана в явном виде, поэтому коэффициенты A_{kmn} придётся посчитать:

$$A_{kmn} = \frac{8U}{l^3} \int_0^l \int_0^l \int_0^l \sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi my}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi nz}{l}\right) dxdydz =$$

$$= \frac{8U}{l^3} \cdot \frac{(-1)^3\, l^3}{\pi^3 kmn} \left(\cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} \right) \left(\cos\left(\frac{\pi my}{l}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=l} \right) \left(\cos\left(\frac{\pi nz}{l}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=l} \right) =$$

$$= -\frac{8U}{\pi^3 kmn} \cdot (-1)^{k+m+n} = \frac{8U(-1)^{k+m+n+1}}{\pi^3 kmn}.$$

Итак, мы знаем функции $\mathbf{T}_{kmn}(t)$ полностью:

$$\mathbf{T}_{kmn}(t) = \frac{8U(-1)^{k+m+n+1}}{\pi^3 kmn} \cdot e^{-\, a^2 \lambda_{kmn} t} \qquad t > 0. \tag{4.17}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (4.3) найденные функции $\mathbf{X}_k(x)$, $\mathbf{Y}_m(y)$, $\mathbf{Z}_n(z)$ и $\mathbf{T}_{kmn}(t)$.

$$v(x,\, y,\, z;\, t) = \frac{8U}{\pi^3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m+n+1}}{kmn} \cdot \sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi my}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi nz}{l}\right) \cdot e^{-\, a^2 \lambda_{kmn} t}.$$

Теперь вспоминаем о замене $v(x,\, y,\, z;\, t) = e^{\beta t} u(x,\, y,\, z;\, t)$, сделанной на Шаге 1, и получаем окончательный
Ответ:

$$u(x,\, y,\, z;\, t) = \frac{8Ue^{-\beta t}}{\pi^3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m+n+1}}{kmn} \cdot \sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi my}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi nz}{l}\right) \cdot e^{-\, a^2 \lambda_{kmn} t},$$

где $\lambda_{kmn} = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} + \frac{\pi^2 m^2}{l^2} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$.
(Ответ в задачнике неверный, он, очевидно, относится к аналогичной задаче, но с условием, когда на грани куба, не проходящие через начало координат, непроницаемы для вещества. В этом случае на этих гранях граничное условие будет второго рода.)