Задачи для неоднородного уравнения теплопроводности в прямоугольнике.

1. № 713.

Найти функцию $u(x,\,y;\,t)$ *из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f(x,\,y;\,t), & (x,\,y)\in\Pi, \quad t>0;\\ u(x,\,y;\,0)=0, & (x,\,y)\in\Pi;\\ u(0,\,y;\,t)=u_x(p,\,y;\,t)=0 & 0<y<s, \quad 0<t<T,\\ u(x,\,0;\,t)=u(x,\,s;\,t)=0 & 0<x<p, \quad 0<t<T, \end{cases} \tag{1.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi=\{(x,\,y): \quad 0\leqslant x\leqslant p, \quad 0\leqslant y\leqslant s\}\,.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (1.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{1.2}$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}(t), \tag{1.3}$$

в уравнение $u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}'(t)=a^2\cdot\left(\mathbf{X}_k''(x)\mathbf{Y}_n(y)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n''(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}_{kn}'(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}_k''(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}_n''(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}+\frac{f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{\mathbf{T}_{kn}'(t)-f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}_k''(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}_n''(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{1.4}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\,y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}_{kn}'(t)+a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t)=f_{kn}(t), \qquad\qquad \frac{\mathbf{X}_k''(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}_n''(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}=\lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}_k''(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0, \qquad\qquad \mathbf{Y}_n''(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(x)=0, \qquad\qquad \mu_k+\nu_n=\lambda_{kn}. \tag{1.5}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (1.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{1.6}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k'(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}_n''(y) + \nu_n \mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \mu\mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\mu}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\mu}\, x) \qquad \text{при } \mu > 0; \tag{1.8}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\mu}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\mu}\, x} \qquad \text{при } \mu < 0; \tag{1.9}$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \mu = 0; \tag{1.10}$$

- При $\mu > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\mu}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1\sqrt{\mu}\cos(\sqrt{\mu}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(p) = 0$ получаем, что $\sqrt{\mu}\, p = \pi\left(-\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

- При $\mu < 0$ задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.

- При $\mu = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1$). Поэтому из второго краевого условия $X'(p) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

задачи

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k'(p) = 0. \end{cases}$$

Задачи, подобные задаче для $\mathbf{Y}_n(y)$, рассматривались уже не раз (№ 687 из файла Sem7, № 705 из semS1 и др.). Поэтому запишем результат:

существет бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \frac{\pi^2 n^2}{s^2}, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}_{kn}'(t) + a^2\lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}(t), \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}.$$

А поскольку начальное условие $u(x,\,y;\,0) = 0$ будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0) = 0$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}(t), & t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}; \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (1.13).

Решение этого линейного неоднородного уравнения первого порядка получим методом вариации постоянной.

Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$\mathbf{T}'_o(t) + a^2\lambda_{kn}T_o(t) = 0$$

Его решение имеет вид:

$$\mathbf{T}_o(t) = ce^{-\,a^2\lambda_{kn}t} \qquad t > 0,$$

где c – произвольная постоянная.

Далее будем искать общее решение неоднородного уравнения

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}(t)$$

в виде

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = c(t)e^{-\,a^2\lambda_{kn}t} \qquad t > 0. \tag{1.14}$$

Подставив (1.14) в уравнение, получим, что неизвестная функция $c(t)$ должна удовлетворять требованию

$$c'(t)e^{-\,a^2\lambda_{kn}t} = f_{kn}(t),$$

откуда

$$c(t) = \mathbf{T}_{kn}(0) + \int\limits_0^t f_{kn}(\tau)e^{a^2\lambda_{kn}\tau}d\tau.$$

Итак, наконец, решение задачи Коши (1.13) задаётся формулой:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \int\limits_0^t f_{kn}(\tau)e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)}d\tau \qquad t > 0. \tag{1.15}$$

Нам ещё надо найти, по какой формуле вычислять коэффициенты $f_{kn}(t)$ разложения функции $f(x,\,y;\,t)$ по собственным функциями задач Штурма-Лиувилля. Получим эту формулу. Для этого, как обычно, домножим (1.3) на $\sin\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{s}\right)$ и проинтегрируем по П. Учитывая ортогональность собственных функций задач Штурма-Лиувилля, получим:

$$(f,\,\mathbf{X}_l\cdot\mathbf{Y}_m) = f_{lm}(t)\int\limits_0^p \sin^2\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)dx\int\limits_0^s \sin^2\left(\frac{\pi m y}{s}\right)dy =$$

$$= \frac{f_{lm}(t)}{4}\int\limits_0^p\left(1-\cos\left(\frac{\pi(2l-1)x}{p}\right)\right)dx\int\limits_0^s\left(1-\cos\left(\frac{2\pi m y}{s}\right)\right)dy = f_{lm}(t)\cdot\frac{ps}{4}.$$

Отсюда,

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{ps}\int\limits_0^p\int\limits_0^s f(x,\,y;\,t)\sin\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{s}\right)dy.$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.2) функции $\mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)$, $\mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right)$ и только что найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ из (1.15).
<u>**Ответ:**</u>

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right) \left(\int\limits_0^t f_{kn}(\tau) e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)}\right),$$

где $\lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}$, а $f_{kn}(t)$ находятся по формуле

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{ps}\int\limits_0^p\int\limits_0^s f(x,\, y;\, t) \sin\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{s}\right) dy.$$

2. № 714.

Найти функцию $u(x,\, y;\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + A\sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right), & (x,\, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\, y;\, 0) = B\sin\left(\frac{\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{3\pi y}{2s}\right), & (x,\, y) \in \Pi; \\ u(0,\, y;\, t) = u_x(p,\, y;\, t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u_y(x,\, 0;\, t) = u(x,\, s;\, t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{2.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\, y): \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant y \leqslant s\}.$$

<u>**Шаг 1.**</u> **Предварительные рассуждения.**
Если искать решение задачи (2.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{2.2}$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x,\, y;\, t) \equiv A\sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y) f_{kn}, \tag{2.3}$$

в уравнение $u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}'_{kn}(t) = a^2 \cdot \left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y) f_{kn}.$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} + \frac{f_{kn}}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{2.4}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от (x, y), то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{2.5}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (2.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}'(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}'_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}'_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

Задачу для $\mathbf{X}_k(x)$ мы уже решили в № 713, стр. 2. Выпишем результат:
существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

первой задачи из (2.7).

Задача для $\mathbf{Y}_n(y)$ была решена на Шаге 2 в № 712(б). У неё также существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2s}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

второй задачи из (2.7)

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2s)^2}. \tag{2.8}$$

Пусть функция $\varphi(x, y) \equiv B\sin\left(\frac{\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{3\pi y}{2s}\right)$ начального условия разлагается в ряд

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}. \tag{2.9}$$

В данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} и f_{kn} найти гораздо проще, чем обычно, поскольку функции $\varphi(x, y)$ и $f(x, y; t)$ имеют в точности вид ОДНОГО из слагаемых соответствующего ряда. А именно:

$$\varphi(x, y) \equiv B\mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_2(y) = B\sin\left(\frac{\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{3\pi y}{2s}\right). \tag{2.10}$$

$$f(x,\,y;\,t) \equiv A\mathbf{X}_2(x)\mathbf{Y}_1(y) = A\sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right). \tag{2.11}$$

Поэтому

$$\varphi_{kn} = \begin{cases} B, & k=1,\ \ n=2; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad f_{kn} = \begin{cases} A, & k=2,\ \ n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Поскольку начальное условие

$$u(x,\,y;\,0) = \varphi(x,\,y)$$

будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}, & t>0; \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}. \end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2 + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}\right)^2 \tag{2.13}$$

Шаг 3. **Решаем задачу (2.13).**

Можно решить эту задачу Коши методом вариации постоянной, как в № 713 (стр.3). Но в данном случае правые части есть константы, и частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$\mathbf{T}_{\text{чно}} = \frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}$$

имеет вид

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \mathbf{T}_{\text{чно}} + \mathbf{T}_{\text{оо}} = \frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}} + ce^{-\,a^2\lambda_{kn}t}. \tag{2.14}$$

Подставив в (2.14) условие Коши $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$, получим, что $c = \varphi_{kn} - \frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}$ и

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}\cdot\left(1 - e^{-\,a^2\lambda_{kn}t}\right) + \varphi_{kn}e^{-\,a^2\lambda_{kn}t}, \qquad t>0. \tag{2.15}$$

Теперь осталось выписать в явном виде все $\mathbf{T}_{kn}(t)$ во всех случаях.

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \begin{cases} Be^{-\,a^2\lambda_{12}t}, & k=1,\ \ n=2; \\ \frac{A}{a^2\lambda_{21}}\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{21}t}\right), & k=2,\ \ n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad t>0. \tag{2.16}$$

Шаг 4. **Подготовка к ответу.**

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (2.2) функции $\mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)$, $\mathbf{Y}_n(y) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2s}\right)$ и учесть, что только что найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ из (2.16) равны нулю при всех k и n, кроме случаев $k=1,\ n=2$ и $k=2,\ n=1$. Поэтому двойной ряд

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$$

превратится в сумму всего двух слагаемых:

$$u(x,\,y;\,t) = \mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_2(y)\mathbf{T}_{12}(t) + \mathbf{X}_2(x)\mathbf{Y}_1(y)\mathbf{T}_{21}(t),$$

то есть

$$u(x,\,y;\,t)=B\sin\left(\frac{\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{3\pi y}{2s}\right)\cdot e^{-\,a^2\lambda_{12}t}+\frac{A}{a^2\lambda_{21}}\sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right)\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{21}t}\right).$$

Наконец, с учётом, что $\lambda_{kn}=\frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2}+\frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2s)^2}$, получаем

$$\lambda_{12}=\frac{\pi^2}{4p^2}+\frac{9\pi^2}{4s^2}=\frac{\pi^2\left(s^2+9p^2\right)}{4p^2s^2},\qquad \lambda_{21}=\frac{9\pi^2}{4p^2}+\frac{\pi^2}{4s^2}=\frac{\pi^2\left(9s^2+p^2\right)}{4p^2s^2}.$$

Ответ:

$$u(x,\,y;\,t)=B\sin\left(\frac{\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{3\pi y}{2s}\right)\cdot e^{-\,a^2\lambda_{12}t}+\frac{A}{a^2\lambda_{21}}\sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right)\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{21}t}\right),$$

где $\lambda_{12}=\frac{\pi^2}{4p^2}+\frac{9\pi^2}{4s^2}=\frac{\pi^2\left(s^2+9p^2\right)}{4p^2s^2}$, $\lambda_{21}=\frac{9\pi^2}{4p^2}+\frac{\pi^2}{4s^2}=\frac{\pi^2\left(9s^2+p^2\right)}{4p^2s^2}$.

3. № 715.

Найти функцию $u(x,\,y;\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+A\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right), & (x,\,y)\in\Pi,\quad t>0;\\ u(x,\,y;\,0)=0, & (x,\,y)\in\Pi;\\ u(0,\,y;\,t)=u(p,\,y;\,t)=0 & 0<y<s,\quad 0<t<T,\\ u(x,\,0;\,t)=u_y(x,\,s;\,t)=0 & 0<x<p,\quad 0<t<T,\end{cases}\tag{3.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi=\left\{(x,\,y):\quad 0\leqslant x\leqslant p,\quad 0\leqslant y\leqslant s\right\}.$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (3.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t),\tag{3.2}$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x,\,y;\,t)\equiv A\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn},\tag{3.3}$$

в уравнение $u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}'_{kn}(t)=a^2\cdot\left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}.$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}+\frac{f_{kn}}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)-f_{kn}}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}.\tag{3.4}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{3.5}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (3.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}'(s) = 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}'_n(s) = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

Обе задачи мы уже решали (см. стр. 2). Выпишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi k}{p}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

первой задачи из (3.7) и существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2s}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

второй задачи из (3.7).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{p^2} + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4s^2}. \tag{3.8}$$

В данном случае функция $\varphi(x,\, y) \equiv 0$ начального условия разлагается в тривиальный ряд

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}, \qquad \varphi_{kn} = 0 \ \ \forall\ k,\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Коэффициенты разложения f_{kn} в ряд в данном случае ищутся так же, как в № 714, поскольку функция $f(x,\, y;\, t)$ имеет в точности вид ОДНОГО из слагаемых соответствующего ряда. А именно:

$$f(x,\, y;\, t) \equiv A\mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_1(y) = A\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right). \tag{3.10}$$

Поэтому

$$f_{kn} = \begin{cases} A, & k = n = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.11}$$

Поскольку начальное условие

$$u(x,\,y;\,0)=\varphi(x,\,y)\equiv 0$$

будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0)=\varphi_{kn}=0$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t)=f_{kn}, & t>0; \\ \mathbf{T}_{kn}(0)=0. \end{cases} \qquad \lambda_{kn}=\frac{\pi^2k^2}{p^2}+\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4s^2}. \tag{3.12}$$

Шаг 3. Решаем задачу (3.12).

Можно решить эту задачу Коши методом вариации постоянной, как в № 713 (стр.3). Но в данном случае правые части есть константы, и частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$\mathbf{T}_{\text{чно}}=\frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$\mathbf{T}'_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t)=f_{kn}$$

имеет вид

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=\mathbf{T}_{\text{чно}}+\mathbf{T}_{\text{оо}}=\frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}+ce^{-\,a^2\lambda_{kn}t}. \tag{3.13}$$

Подставив в (3.13) условие Коши $\mathbf{T}_{kn}(0)=0$, получим, что $c=-\,\frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}$ и

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=\frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{kn}t}\right), \qquad t>0. \tag{3.14}$$

Теперь осталось выписать в явном виде все $\mathbf{T}_{kn}(t)$ во всех случаях.

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=\begin{cases} \frac{A}{a^2\lambda_{11}}\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{11}t}\right), & k=1,\quad n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad t>0. \tag{3.15}$$

Шаг 4. Подготовка к ответу.

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (3.2) функции $\mathbf{X}_k(x)=\sin\left(\frac{\pi kx}{p}\right)$, $\mathbf{Y}_n(y)=\sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2s}\right)$ и учесть, что только что найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ из (3.15) равны нулю при всех k и n, кроме случая $k=n=1$. Поэтому двойной ряд

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$$

превратится в одно единственное слагаемое:

$$u(x,\,y;\,t)=\mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_1(y)\mathbf{T}_{11}(t),$$

то есть

$$u(x,\,y;\,t)=\frac{A}{a^2\lambda_{11}}\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right)\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{11}t}\right).$$

Наконец, с учётом, что $\lambda_{kn}=\frac{\pi^2k^2}{p^2}+\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4s^2}$, получаем

$$\lambda_{11}=\frac{\pi^2}{p^2}+\frac{\pi^2}{4s^2}=\frac{\pi^2\left(4s^2+p^2\right)}{4p^2s^2}.$$

Ответ:

$$u(x,\,y;\,t)=\frac{4Ap^2s^2}{a^2\pi^2\left(4s^2+p^2\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right)\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{11}t}\right).$$

(В задачнике ответ неверный, он, очевидно, соответствует такой же задаче, но с функцией $f=A\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right)\cdot e^{-t}$.)