Задачи для уравнения колебаний мембраны.

1. № 684 а).

Пренебрегая реакцией окружающей среды, определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны, $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant p$ с жёстко закреплённым краем для случая, когда начальное отклонение мембраны равно $\sin\left(\frac{\pi x}{s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)$, а начальная скорость равна нулю.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти функцию $u(x,\,y;\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & (x,\,y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\,y;\,0) = \varphi(x,\,y) \equiv \sin\left(\frac{\pi x}{s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right), & (x,\,y) \in \Pi; \\ u_t(x,\,y;\,0) = \psi(x,\,y) \equiv 0, & (x,\,y) \in \Pi; \\ u(0,\,y;\,t) = u(p,\,y;\,t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\,0;\,t) = u(x,\,s;\,t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{1.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \left\{(x,\,y): \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \quad 0 \leqslant y \leqslant p\right\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (1.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{1.2}$$

то, подставив этот ряд в уравнение $u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}''_{kn}(t) = a^2 \cdot \left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{1.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\,y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{1.4}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (1.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля
Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{1.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}_n''(y) + \nu_n \mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

Эти задачи мы уже решали много раз. Выпишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi k}{s}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{s}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

первой задачи (1.6) и бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{p}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

второй задачи (1.6).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}_{kn}''(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2}.$$

Используем начльные условия.

Разложим функции $\varphi(x,\, y)$ и $\psi(x,\, y)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля:

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}, \tag{1.7}$$

$$\psi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\psi_{kn}. \tag{1.8}$$

В данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} и ψ_{kn} найти гораздо проще, чем обычно, поскольку $\psi \equiv 0$, а функция $\varphi(x,\, y)$ имеет в точности вид ОДНОГО из слагаемых соответствующего ряда. А именно:

$$\varphi(x,\, y) \equiv \mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_1(y) = \sin\left(\frac{\pi x}{s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right). \tag{1.9}$$

Поэтому

$$\varphi_{kn} = \begin{cases} 1, & k = 1, \quad n = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad \psi_{kn} = 0 \quad \text{при всех } k \text{ и } n. \tag{1.10}$$

А поскольку начальное условие $u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y)$ будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$, а второе начальное условие $u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv 0$, – если $\mathbf{T}_{kn}'(0) = \psi_{kn} = 0$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{kn}''(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = 0, \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}; \\ \mathbf{T}_{kn}'(0) = 0, \end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2} \tag{1.11}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (1.11).

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка, с учётом, что $a^2\lambda_{kn} > 0$, имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Подставив $\mathbf{T}_{kn}$ во второе начальное условие $\mathbf{T}'_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_1 = 0$, откуда

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at).$$

Из первого начального условия $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$ сразу получаем, что $c_2 = \varphi_{kn}$ и, наконец, получаем, что решение задачи Коши (1.11) задаётся формулой:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \varphi_{kn} \cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at), \qquad t > 0. \tag{1.12}$$

С учётом, что $\varphi_{kn} = 0$ всегда, за исключением случая $k = n = 1$, а $\varphi_{11} = 1$, из (1.13) получаем

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\lambda_{11}}\, at), & k = 1, \quad n = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1.13}$$

Поэтому после подстановки найденных $\mathbf{T}_{kn}(t)$ в искомый вид решения

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x) \mathbf{Y}_n(y) \mathbf{T}_{kn}(t),$$

получим, что от ряда останется только одно слагаемое:

$$u(x,\, y;\, t) = \mathbf{X}_1(x) \mathbf{Y}_1(y) \mathbf{T}_{11}(t).$$

Ответ:

$$u(x,\, y;\, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{s}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{p}\right) \cos(\sqrt{\lambda_{11}}\, at),$$

где $\lambda_{11} = \frac{\pi^2}{s^2} + \frac{\pi^2}{p^2}$.

2. № 684 в).

Пренебрегая реакцией окружающей среды, определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны, $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant p$ с жёстко закреплённым краем для случая, когда колебания вызваны непрерывно распределённой по мембраны силой с плотностью $x \sin\left(\frac{2\pi y}{p}\right) \cdot e^{-t}$.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти функцию $u(x,\, y;\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \left(u_{xx} + u_{yy}\right) + \frac{x}{\rho} \sin\left(\frac{2\pi y}{p}\right) \cdot e^{-t}, & (x,\, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y) \equiv 0, & (x,\, y) \in \Pi; \\ u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv 0, & (x,\, y) \in \Pi; \\ u(0,\, y;\, t) = u(p,\, y;\, t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\, 0;\, t) = u(x,\, s;\, t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{2.1}$$

где ρ – поверхностная плотность массы мембраны, а через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \left\{(x,\, y): \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \quad 0 \leqslant y \leqslant p\right\}.$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (2.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{2.2}$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}(t), \tag{2.3}$$

в уравнение $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}''_{kn}(t)=a^2\cdot\left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}+\frac{f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)-f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{2.4}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\,y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}''_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t)=f_{kn}(t),\qquad\qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}=\lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0,\qquad \mathbf{Y}''_n(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(x)=0,\qquad \mu_k+\nu_n=\lambda_{kn}. \tag{2.5}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (2.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.
Шаг 2. Решение двух задач Штурма-Лиувилля
Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}(p)=0,\qquad\qquad \mathbf{Y}(0)=\mathbf{Y}(s)=0. \tag{2.6}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases}\mathbf{X}''_k(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0,\\ \mathbf{X}_k(0)=\mathbf{X}_k(p)=0,\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\mathbf{Y}''_n(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(y)=0,\\ \mathbf{Y}_n(0)=\mathbf{Y}_n(s)=0,\end{cases} \tag{2.7}$$

Эти задачи мы уже решали много раз. Выпишем результат:
существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k=\left(\frac{\pi k}{s}\right)^2,\quad X_k(x)=\sin\left(\frac{\pi kx}{s}\right),\qquad k\in\mathbb{N}$$

первой задачи (2.7) и бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n=\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2,\quad \mathbf{Y}_n(y)=\sin\left(\frac{\pi ny}{p}\right),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

второй задачи (2.7).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}(t), \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2k^2}{s^2} + \frac{\pi^2n^2}{p^2}.$$

Используем начльные условия.

Разложим функции $f(x,\,y;\,t)$, $\varphi(x,\,y)$ и $\psi(x,\,y)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля:

$$f(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}, \tag{2.8}$$

$$\varphi(x,\,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}, \tag{2.9}$$

$$\psi(x,\,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\psi_{kn}. \tag{2.10}$$

В данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} и ψ_{kn} найти гораздо проще, чем обычно, поскольку $\varphi = \psi \equiv 0$, а ряд для $f(x,\,y;\,t)$ получается не двойной, а одинарный. А именно:

$$f(x,\,y;\,t) \equiv \frac{\mathbf{Y}_2(y)\cdot e^{-t}}{\rho}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sin\left(\frac{\pi kx}{s}\right), \tag{2.11}$$

где

$$\alpha_k = \frac{2}{s}\int\limits_0^s x\sin\left(\frac{\pi kx}{s}\right)dx = \frac{2}{s}\cdot\frac{s}{k\pi}\left(-x\cos\left(\frac{\pi kx}{s}\right)dx\Big|_{x=0}^{x=s} + \underbrace{\int\limits_0^s\cos\left(\frac{\pi kx}{s}dx\right)}_{=0}\right) = \frac{2s(-1)^{k+1}}{k\pi}.$$

Поэтому

$$f_{kn}(t) = \begin{cases}\frac{2s(-1)^{k+1}}{\pi k\rho}\cdot e^{-t}, & n = 2;\\ 0, & n \neq 2;\end{cases} \qquad \varphi_{kn} = 0, \qquad \psi_{kn} = 0 \quad \text{при всех } k \text{ и } n. \tag{2.12}$$

А поскольку начальное условие $u(x,\,y;\,0) = \varphi(x,\,y)$ будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn} = 0$, а второе начальное условие $u_t(x,\,y;\,0) = \psi(x,\,y) \equiv 0$, – если $\mathbf{T}'_{kn}(0) = \psi_{kn} = 0$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases}\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}(t),\\ \mathbf{T}_{kn}(0) = 0;\\ \mathbf{T}'_{kn}(0) = 0,\end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2k^2}{s^2} + \frac{\pi^2n^2}{p^2} \tag{2.13}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (2.13).

Можно решить эту задачу Коши методом вариации постоянной, как в № 713. Но в данном случае правая часть уравнения есть ce^{-t}, и частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$\mathbf{T}_{\text{чно}} = \frac{f_{kn}(t)}{1 + a^2\lambda_{kn}}.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}(t)$$

имеет вид

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \mathbf{T}_{\text{ЧНО}} + \mathbf{T}_{\text{ОО}} = \frac{f_{kn}(t)}{1 + a^2\lambda_{kn}} + c_1 \sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at). \tag{2.14}$$

Подставив в (6.14) условие Коши $\mathbf{T}_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_2 = -\frac{f_{kn}(0)}{1+a^2\lambda_{kn}}$, а подставив в полученное

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{f_{kn}(t)}{1 + a^2\lambda_{kn}} + c_1 \sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at) - \frac{f_{kn}(0)}{1 + a^2\lambda_{kn}} \cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at)$$

во второе условие Коши $\mathbf{T}'_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_1 = -\frac{f'_{kn}(0)}{(1+a^2\lambda_{kn})a\sqrt{\lambda_{kn}}}$, и, наконец,

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{1}{1 + a^2\lambda_{kn}} \left(f_{kn}(t) - \frac{f'_{kn}(0)}{a\sqrt{\lambda_{kn}}} \sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at) - f_{kn}(0) \cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at) \right). \tag{2.15}$$

Теперь осталось выписать в явном виде все $\mathbf{T}_{kn}(t)$ во всех случаях, использовав вид $f_{kn}(t)$ и $\lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2}$.

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}\right)} \cdot \frac{2s(-1)^{k+1}}{\pi k \rho} \cdot \\ \qquad \cdot \left[e^{-t} + \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}}\, at\right)}{a\sqrt{\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}}} - \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}}\, at\right) \right], & k \in \mathbb{N}, \quad n = 2; \\ 0, & k \in \mathbb{N}, \quad n \neq 2. \end{cases} \tag{2.16}$$

Поэтому после подстановки найденных $\mathbf{T}_{kn}(t)$ в искомый вид решения

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t),$$

получим, что от двойного ряда останется только одинарный:

$$u(x,\, y;\, t) = \mathbf{Y}_2(y) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{T}_{k2}(t).$$

Ответ:

$$u(x,\, y;\, t) = \frac{2s}{\pi\rho} \cdot \sin\left(\frac{2\pi y}{p}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k x}{s}\right) \frac{1}{1 + a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{s^2} + \frac{4}{p^2}\right)} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot$$
$$\cdot \left[e^{-t} + \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{s^2} + \frac{4}{p^2}}\, at\right)}{a\sqrt{\frac{k^2}{s^2} + \frac{4}{p^2}}} - \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{s^2} + \frac{4}{p^2}}\, at\right) \right],$$

где ρ – поверхностная плотность массы мембраны.

3. № 685 а).

В однородной прямоугольной мембране $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant p$ часть границы $x = s$, $0 < y < p$ и $y = p$, $0 < x < s$ свободна, а остальная часть закреплена жёстко. Пренебрегая реакцией окружающей среды, найти поперечные колебания мембраны, вызванные начальным отклонением Axy.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти функцию $u(x,\, y;\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & (x,\, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y) \equiv Axy, & (x,\, y) \in \Pi; \\ u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv 0, & (x,\, y) \in \Pi; \\ u(0,\, y;\, t) = u_x(p,\, y;\, t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\, 0;\, t) = u_y(x,\, s;\, t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{3.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \left\{(x,\, y): \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \quad 0 \leqslant y \leqslant p\right\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения. (полностью повторяют Шаг 1 из № 864 а).
Если искать решение задачи (3.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{3.2}$$

то, подставив этот ряд в уравнение $u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}''_{kn}(t) = a^2 \cdot \left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{3.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\, \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\, \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{3.4}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (3.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля
Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(s) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}'(p) = 0. \tag{3.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}'_k(s) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}'_n(p) = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

Задачу для $\mathbf{X}_k(x)$ мы уже решили в № 713, стр. **??**. А поскольку задача для $\mathbf{Y}_n(y)$ совершенно аналогична, выпишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2s}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2p}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задач из (3.6).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2} + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4p^2}. \tag{3.7}$$

Пусть функция $\varphi(x, y) \equiv Axy$ начального условия разлагается в ряд

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}. \tag{3.8}$$

В данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} находятся аналогично № 713, 715. А именно:

$$\varphi_{kn}(x, y) = \frac{4A}{sp}\int_0^s x\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx\int_0^p y\sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right)dy =$$

$$= \frac{4A}{sp}\cdot\frac{2s}{\pi(2k-1)}\cdot\left[\underbrace{-x\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Big|_{x=0}^{x=s}}_{=0} + \int_0^s \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{2p}{\pi(2n-1)}\cdot\left[\underbrace{-y\cos\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right)\Big|_{y=0}^{y=p}}_{=0} + \int_0^p \cos\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right)dy\right] =$$

$$= \frac{4A}{sp}\cdot\left(\frac{2s}{\pi(2k-1)}\right)^2\cdot\left(\frac{2p}{\pi(2n-1)}\right)^2\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Big|_{x=0}^{x=s}\right]\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right)\Big|_{y=0}^{y=p}\right] =$$

$$= \frac{64Asp}{\pi^4(2k-1)^2(2n-1)^2}\cdot(-1)^{k+1}\cdot(-1)^{n+1} = \frac{64Asp\cdot(-1)^{k+n}}{\pi^4(2k-1)^2(2n-1)^2}.$$

Итак,

$$\varphi_{kn} = \frac{64Asp\cdot(-1)^{k+n}}{\pi^4(2k-1)^2(2n-1)^2}. \tag{3.9}$$

Поскольку начальные условия

$$u(x, y; 0) = \varphi(x, y), \qquad u_t(x, y; 0) = \psi(x, y) \equiv 0$$

будут заведомо выполнены, если

$$\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}, \qquad \mathbf{T}'_{kn}(0) = 0,$$

то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = 0, & t > 0; \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}; \\ \mathbf{T}'_{kn}(0) = 0. \end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2s}\right)^2 + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2p}\right)^2 \tag{3.10}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (3.10).

Решение этой задачи Коши имеет вид

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \mathbf{T}_{kn}(0)\cos\left(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at\right) + \frac{\mathbf{T}'_{kn}(0)}{\sqrt{\lambda_{kn}}\,a}\sin\left(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at\right). \tag{3.11}$$

Поэтому, с учётом (3.9), получаем:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{64Asp\cdot(-1)^{k+n}}{\pi^4(2k-1)^2(2n-1)^2}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at\right), \qquad t > 0. \tag{3.12}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (3.2) функции $\mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)$, $\mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right)$ и только что найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ из (3.12) в двойной ряд

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,y;\,t) = \frac{64Asp}{\pi^4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(2k-1)^2(2n-1)^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right)\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at\right),$$

где

$$\lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2s)^2} + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2p)^2}.$$

4. № 686 а).

В однородной прямоугольной мембране $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant p$ часть границы $x = 0$, $0 < y < p$ свободна, а остальная часть закреплена жёстко. Пренебрегая реакцией окружающей среды, найти поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны, вызванные начальным отклонением $\cos\left(\frac{\pi x}{2s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)$.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти функцию $u(x,\,y;\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & (x,\,y)\in\Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\,y;\,0) = \varphi(x,\,y) \equiv \cos\left(\frac{\pi x}{2s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right), & (x,\,y)\in\Pi; \\ u_t(x,\,y;\,0) = \psi(x,\,y) \equiv 0, & (x,\,y)\in\Pi; \\ u_x(0,\,y;\,t) = u(p,\,y;\,t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\,0;\,t) = u(x,\,s;\,t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{4.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \left\{(x,\,y): \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \quad 0 \leqslant y \leqslant p\right\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (4.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{4.2}$$

то, подставив этот ряд в уравнение $u_{tt} = a^2\,(u_{xx} + u_{yy})$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}''_{kn}(t) = a^2 \cdot \left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{4.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{4.4}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (4.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля
Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{4.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}'_k(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

Эти задачи мы уже решали много раз. Выпишем результат:
существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2s}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

первой задачи (4.6) и бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{p}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

второй задачи (4.6).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2}.$$

Используем начльные условия.
Разложим функции $\varphi(x,\,y)$ и $\psi(x,\,y)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля:

$$\varphi(x,\,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}, \tag{4.7}$$

$$\psi(x,\,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\psi_{kn}. \tag{4.8}$$

В данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} и ψ_{kn} найти гораздо проще, чем обычно, поскольку $\psi\equiv 0$, а функция $\varphi(x,\,y)$ имеет в точности вид ОДНОГО из слагаемых соответствующего ряда. А именно:

$$\varphi(x,\,y)\equiv\mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_1(y)=\cos\left(\frac{\pi x}{2s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right). \tag{4.9}$$

Поэтому

$$\varphi_{kn}=\begin{cases}1, & k=1,\quad n=1;\\ 0, & \text{в остальных случаях;}\end{cases}\qquad\qquad \psi_{kn}=0\quad\text{при всех } k \text{ и } n. \tag{4.10}$$

А поскольку начальное условие $u(x,\,y;\,0)=\varphi(x,\,y)$ будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0)=\varphi_{kn}$, а второе начальное условие $u_t(x,\,y;\,0)=\psi(x,\,y)\equiv 0$, – если $\mathbf{T}'_{kn}(0)=\psi_{kn}=0$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases}\mathbf{T}''_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t)=0,\\ \mathbf{T}_{kn}(0)=\varphi_{kn};\\ \mathbf{T}'_{kn}(0)=0,\end{cases}\qquad\qquad \lambda_{kn}=\frac{\pi^2k^2}{s^2}+\frac{\pi^2n^2}{p^2} \tag{4.11}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (4.11).

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка, с учётом, что $a^2\lambda_{kn}>0$, имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=c_1\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at)+c_2\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at)$$

где $c_1,\,c_2$ – произвольные постоянные.

Подставив $\mathbf{T}_{kn}$ во второе начальное условие $\mathbf{T}'_{kn}(0)=0$, получим, что $c_1=0$, откуда

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=c_2\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at).$$

Из первого начального условия $\mathbf{T}_{kn}(0)=\varphi_{kn}$ сразу получаем, что $c_2=\varphi_{kn}$ и, наконец, получаем, что решение задачи Коши (4.11) задаётся формулой:

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=\varphi_{kn}\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at),\qquad\qquad t>0. \tag{4.12}$$

С учётом, что $\varphi_{kn}=0$ всегда, за исключением случая $k=n=1$, а $\varphi_{11}=1$, из (4.13) получаем

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=\begin{cases}\cos(\sqrt{\lambda_{11}}\,at), & k=1,\quad n=1;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{4.13}$$

Поэтому после подстановки найденных $\mathbf{T}_{kn}(t)$ в искомый вид решения

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t),$$

получим, что от ряда останется только одно слагаемое:

$$u(x,\, y;\, t) = \mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_1(y)\mathbf{T}_{11}(t).$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, y;\, t) = \cos\left(\frac{\pi x}{2s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)\cos(\sqrt{\lambda_{11}}\, at),$$

где $\lambda_{11} = \frac{\pi^2}{4s^2} + \frac{\pi^2}{p^2}$.

5. № 686 в).

В однородной прямоугольной мембране $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant p$ часть границы $x = 0$, $0 < y < p$ свободна, а остальная часть закреплена жёстко. Пренебрегая реакцией окружающей среды, найти поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны, вызванные начальным распределением скоростей

$$u_t(x,\, y;\, 0) = A(s - x)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right).$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти функцию $u(x,\, y;\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & (x,\, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y) \equiv 0, & (x,\, y) \in \Pi; \\ u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv A(s - x)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right), & (x,\, y) \in \Pi; \\ u_x(0,\, y;\, t) = u(p,\, y;\, t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\, 0;\, t) = u(x,\, s;\, t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{5.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \left\{(x,\, y):\quad 0 \leqslant x \leqslant s, \quad 0 \leqslant y \leqslant p\right\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (5.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{5.2}$$

то, подставив этот ряд в уравнение $u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}''_{kn}(t) = a^2 \cdot \left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{5.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\, \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}_n''(y) + \nu_n \mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{5.4}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (5.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

Шаг 2. Решение двух задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{5.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k'(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}_n''(y) + \nu_n \mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

Эти задачи мы уже решали много раз. Выпишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2s}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

первой задачи (6.7) и бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{p}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

второй задачи (6.7).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}_{kn}''(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2}.$$

Используем начльные условия.

Разложим функции $\varphi(x,\, y)$ и $\psi(x,\, y)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля:

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}, \tag{5.7}$$

$$\psi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\psi_{kn}. \tag{5.8}$$

В данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} и ψ_{kn} найти проще, чем обычно, поскольку $\varphi \equiv 0$, а функция $\psi(x,\, y)$ зависит от y в точности как ОДНО из слагаемых соответствующего ряда. А именно:

$$\psi(x,\, y) \equiv A(s-x)\mathbf{Y}_1(y) = A(s-x)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right). \tag{5.9}$$

Поэтому, что бы получить φ_{kn}, нам лишь разложить функцию $A(s-x)$ в ряд по $\mathbf{X}_k$:

$$A(s-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{X}_k(x).$$

Коэффициенты α_k находятся по формуле (её вывод полностью аналогичен проделанному в № 712(б), semS4)

$$\alpha_k = \frac{2}{s}\int\limits_0^s A(s-x)\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx =$$

$$= \frac{2A}{s}\left[s\int\limits_0^s \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx - \int\limits_0^s x\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{2A}{s}\cdot\frac{2s}{\pi(2k-1)}\left[s\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Big|_{x=0}^{x=s} - \left(x\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Big|_{x=0}^{x=s} - \int\limits_0^s \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx\right)\right] =$$

$$= \frac{2A}{s}\cdot\left(\frac{2s}{\pi(2k-1)}\right)^2\left(-\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Big|_{x=0}^{x=s}\right) = \frac{8As}{\pi^2(2k-1)^2}.$$

Таким образом,

$$\psi_{kn} = \begin{cases} \frac{8As}{\pi^2(2k-1)^2}, & n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad \varphi_{kn} = 0 \quad \text{при всех } k \text{ и } n. \tag{5.10}$$

А поскольку начальное условие $u(x,\,y;\,0) = \varphi(x,\,y)$ будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn} = 0$, а второе начальное условие $u_t(x,\,y;\,0) = \psi(x,\,y)$, – если $\mathbf{T}'_{kn}(0) = \psi_{kn}$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = 0, \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = 0; \\ \mathbf{T}'_{kn}(0) = \psi_{kn}, \end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2} \tag{5.11}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (5.11).

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка, с учётом, что $a^2\lambda_{kn} > 0$, имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = c_1\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at) + c_2\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at)$$

где $c_1,\,c_2$ – произвольные постоянные.

Подставив $\mathbf{T}_{kn}$ в первое начальное условие $\mathbf{T}_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_2 = 0$, откуда

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = c_1\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at).$$

Из второго начального условия $\mathbf{T}'_{kn}(0) = \psi_{kn}$ получаем, что $c_1\cdot a\sqrt{\lambda_{kn}} = \psi_{kn}$ и, наконец, получаем, что решение задачи Коши (5.11) задаётся формулой:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{\psi_{kn}}{a\sqrt{\lambda_{kn}}}\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at), \qquad t > 0. \tag{5.12}$$

С учётом (6.12) получаем

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \begin{cases} \frac{8As}{\pi^2 a(2k-1)^2\sqrt{\lambda_{k1}}}\sin(\sqrt{\lambda_{k1}}\,at), & n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{5.13}$$

Поэтому после подстановки найденных $\mathbf{T}_{kn}(t)$ в искомый вид решения

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t),$$

получим, что двойной ряд станет одинарным:

$$u(x,\,y;\,t)=\mathbf{Y}_1(y)\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{T}_{k1}(t).$$

Ответ:

$$u(x,\,y;\,t)=\frac{8As}{\pi^2 a}\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\sqrt{\lambda_{k1}}}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\sin(\sqrt{\lambda_{k1}}\,at),$$

где $\lambda_{k1}=\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2}+\frac{\pi^2}{p^2}$.

6. № 686 г).

В однородной прямоугольной мембране $0\leqslant x\leqslant s$, $0\leqslant y\leqslant p$ часть границы $x=0$, $0<y<p$ свободна, а остальная часть закреплена жёстко. Пренебрегая реакцией окружающей среды, найти поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны, вызванные распределённой по мембраны поперечной силой с плотностью

$$B(s-x)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)\cdot\sin t.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти функцию $u(x,\,y;\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+\frac{B(x-s)}{\rho}\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)\cdot\sin t, & (x,\,y)\in\Pi,\quad t>0;\\ u(x,\,y;\,0)=\varphi(x,\,y)\equiv 0, & (x,\,y)\in\Pi;\\ u_t(x,\,y;\,0)=\psi(x,\,y)\equiv 0, & (x,\,y)\in\Pi;\\ u_x(0,\,y;\,t)=u(p,\,y;\,t)=0 & 0<y<s,\quad 0<t<T,\\ u(x,\,0;\,t)=u(x,\,s;\,t)=0 & 0<x<p,\quad 0<t<T,\end{cases}\tag{6.1}$$

где ρ – поверхностная плотность массы мембраны, а через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi=\{(x,\,y):\quad 0\leqslant x\leqslant s,\quad 0\leqslant y\leqslant p\}.$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (6.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t),\tag{6.2}$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}(t),\tag{6.3}$$

в уравнение $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}''_{kn}(t)=a^2\cdot\left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}+\frac{f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{6.4}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\, \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\, \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{6.5}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (6.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

Шаг 2. Решение двух задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{6.6}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}'_k(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{6.7}$$

Эти задачи мы уже решали много раз. Выпишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2s}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

первой задачи (6.7) и бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{p}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

второй задачи (6.7).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2}.$$

Используем начльные условия.

Разложим функции $f(x,\, y;\, t)$, $\varphi(x,\, y)$ и $\psi(x,\, y)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля:

$$f(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}, \tag{6.8}$$

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}, \tag{6.9}$$

$$\psi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\psi_{kn}. \tag{6.10}$$

В данном случае коэффициенты разложения $\varphi_{kn} = 0$ и $\psi_{kn} = 0$, а ряд для $f(x,\, y;\, t)$ получается не двойной, а одинарный. А именно:

$$f(x,\, y;\, t) \equiv \frac{\mathbf{Y}_1(y) \cdot \sin t}{\rho} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right), \tag{6.11}$$

где

$$\alpha_k = \frac{2}{s} \int\limits_0^s B(s-x) \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right) dx =$$

$$= \frac{2B}{s} \left[s \int\limits_0^s \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right) dx - \int\limits_0^s x \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right) dx \right] =$$

$$= \frac{2B}{s} \cdot \frac{2s}{\pi(2k-1)} \left[\underbrace{s \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Big|_{x=0}^{x=s}}_{s(-1)^{k+1}} - \left(\underbrace{x \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Big|_{x=0}^{x=s}}_{s(-1)^{k+1}} - \int\limits_0^s \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right) dx \right) \right] =$$

$$= \frac{2B}{s} \cdot \left(\frac{2s}{\pi(2k-1)}\right)^2 \left(-\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Big|_{x=0}^{x=s} \right) = \frac{8Bs}{\pi^2(2k-1)^2}.$$

Поэтому

$$f_{kn}(t) = \begin{cases} \frac{8Bs}{\pi^2(2k-1)^2\rho} \cdot \sin t, & n = 1; \\ 0, & n > 1; \end{cases} \qquad \varphi_{kn} = 0, \qquad \psi_{kn} = 0 \quad \text{при всех } k \text{ и } n. \tag{6.12}$$

А поскольку начальное условие $u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y)$ будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn} = 0$, а второе начальное условие $u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv 0$, – если $\mathbf{T}'_{kn}(0) = \psi_{kn} = 0$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}(t), \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = 0; \\ \mathbf{T}'_{kn}(0) = 0, \end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2} \tag{6.13}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (6.13).

Можно решить эту задачу Коши методом вариации постоянной, как в № 713. Но в данном случае правая часть уравнения есть $c \sin t$, и частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$\mathbf{T}_{\text{ЧНО}} = \frac{f_{kn}(t)}{a^2\lambda_{kn} - 1}.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}(t)$$

имеет вид

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \mathbf{T}_{\text{ЧНО}} + \mathbf{T}_{\text{ОО}} = \frac{f_{kn}(t)}{a^2\lambda_{kn} - 1} + c_1 \sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at). \tag{6.14}$$

Подставив в (6.14) условие Коши $\mathbf{T}_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_2 = -\frac{f_{kn}(0)}{a^2\lambda_{kn}-1}$, а подставив в полученное

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{f_{kn}(t)}{a^2\lambda_{kn} - 1} + c_1 \sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at) - \frac{f_{kn}(0)}{a^2\lambda_{kn} - 1} \cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at)$$

во второе условие Коши $\mathbf{T}'_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_1 = -\frac{f'_{kn}(0)}{(a^2\lambda_{kn}-1)a\sqrt{\lambda_{kn}}}$, и, наконец,

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{1}{a^2\lambda_{kn} - 1}\left(f_{kn}(t) - \frac{f'_{kn}(0)}{a\sqrt{\lambda_{kn}}}\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at) - \underbrace{f_{kn}(0)}_{=0}\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at)\right). \tag{6.15}$$

Теперь осталось выписать в явном виде все $\mathbf{T}_{kn}(t)$ во всех случаях, использовав вид $f_{kn}(t)$.

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \begin{cases} \frac{1}{a^2\lambda_{k1}-1}\cdot\frac{8Bs}{\pi^2(2k-1)^2\rho}\cdot\left[\sin t - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{k1}}\,at)}{a\sqrt{\lambda_{k1}}}\right], & k\in\mathbb{N},\quad n=1; \\ 0, & k\in\mathbb{N},\quad n\neq 1. \end{cases} \tag{6.16}$$

Поэтому после подстановки найденных $\mathbf{T}_{kn}(t)$ в искомый вид решения

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t),$$

получим, что от двойного ряда останется только одинарный:

$$u(x,\,y;\,t) = \mathbf{Y}_1(y)\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{T}_{k1}(t).$$

Ответ:

$$u(x,\,y;\,t) = \frac{8Bs}{\pi^2\rho}\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\cdot\frac{1}{a^2\lambda_{k1}-1}\cdot\frac{1}{(2k-1)^2}\cdot\left[\sin t - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{k1}}\,at)}{a\sqrt{\lambda_{k1}}}\right],$$

где ρ – поверхностная плотность массы мембраны, а $\lambda_{k1} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2} + \frac{\pi^2}{p^2}$.
(Ответ в задачнике не совсем верный, функция, приведённая там, не удовлетворяет начальному условию $u(x,\,y;\,t) = 0$.)