

Глава 1.

Цилиндрические функции

1.1. Краткое введение

Уравнение Бесселя на промежутке $(0, 1)$

$$x^2 \mathbf{Z}''(x) + x \mathbf{Z}'(x) + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Z}(x) = 0. \quad (1.1.1)$$

Всякое решение уравнения Бесселя называется цилиндрической функцией.

Опр. 1.1.1. Функция

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (1.1.2)$$

называется **функцией Бесселя порядка ν** и является на промежутке $(0, 1)$ решением уравнения (1.1.1).

Есть и другие цилиндрические функции.

Опр. 1.1.2. Функции Неймана:

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin(\pi\nu)} [J_\nu(x) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)], \quad \nu \notin \mathbb{Z}; \quad (1.1.3)$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.1.4)$$

Функции Ханкеля I-го рода и II-го рода:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \quad (1.1.5)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \quad (1.1.6)$$

Модифицированные функции Бесселя и Ханкеля:

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi i}{2}\nu} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = e^{\frac{\pi i}{2}\nu} H_\nu^{(1)}(ix). \quad (1.1.7)$$

Теорема 1.1.1.

Утв. Фундаментальную систему решений (ФСР) уравнения Бесселя (1.1.1) образует каждая из пар функций:

$$\begin{aligned} & \{J_\nu(x), N_\nu(x)\}, \quad \{H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)\} \\ & \text{и, в случае, когда } \nu \notin \mathbb{Z} \quad \{J_\nu(x), J_{-\nu}(x)\} \\ & (\text{при } n \in \mathbb{Z} \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n) \end{aligned}$$

Следствие 1.1.1.

Утв. Общее решение уравнения Бесселя (1.1.1) задаётся каждой из формул

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_\nu(x) &= c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x) = c_3 H_\nu^{(1)}(x) + c_4 H_\nu^{(2)}(x), \quad \nu \in \mathbb{R}. \\ \mathbf{Z}_\nu(x) &= c_5 J_\nu(x) + c_6 J_{-\nu}(x) \quad \nu \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

1.1.1. Рекуррентные формулы для цилиндрических функций

Для функций Бесселя и Неймана имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$\mathbf{Z}'_\nu(x) = \mathbf{Z}_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} \mathbf{Z}_\nu(x), \quad \mathbf{Z}'_\nu(x) = -\mathbf{Z}_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} \mathbf{Z}_\nu(x). \quad (1.1.8)$$

Их можно также переписать в виде:

$$[x^\nu \mathbf{Z}_\nu]'(x) = x^\nu \mathbf{Z}_{\nu-1}(x), \quad [x^{-\nu} \mathbf{Z}_\nu]'(x) = -x^{-\nu} \mathbf{Z}_{\nu+1}(x). \quad (1.1.9)$$

Если из второй формулы (1.1.8) вычесть первую, получим ещё одно соотношение:

$$\mathbf{Z}_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} \mathbf{Z}_\nu(x) + \mathbf{Z}_{\nu-1}(x) = 0. \quad (1.1.10)$$

Для функций Бесселя и Неймана с целочисленным порядком $\nu = n \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$\mathbf{Z}_{-n}(x) = (-1)^n \mathbf{Z}_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.1.11)$$

Кроме приведённых формул, нам также понадобится соотношение, из которого, в частности, следует часть утверждений теоремы 1.1.1.

Утверждение 1.1.1 (Вронскиан функций Бесселя и Неймана).

Утв.

$$W[J_\nu, N_\nu](x) = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & N_\nu(x) \\ J'_\nu(x) & N'_\nu(x) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi x} \quad (1.1.12)$$

1.1.2. Интегральные формулы для функций Бесселя

Имеют место следующие интегральные формулы:

Интегралы Ломмеля:

$$\int_0^x t J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t) dt = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\alpha J_{\nu+1}(\alpha x) J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x) \right), \quad \alpha \neq \beta, \quad (1.1.13)$$

$$\int_0^x t \left(J_\nu(\alpha t) \right)^2 dt = \frac{x^2}{2} \left(\alpha J'_\nu(\alpha x) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2} \right) \left(J_\nu(\alpha x) \right)^2, \quad \nu > -1. \quad (1.1.14)$$

Имеют место и более общие формулы:

$$\int_a^b r \mathbf{Z}(\mu_k r) \mathbf{Z}(\mu_m r) dr = \frac{r \left(\mu_k \mathbf{Z}(\mu_m r) \mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m \mathbf{Z}(\mu_k r) \mathbf{Z}'(\mu_m r) \right) \Big|_a^b}{\mu_m^2 - \mu_k^2}; \quad (1.1.15)$$

$$\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2 = \int_a^b r \mathbf{Z}(\mu r) dr = \frac{1}{2} \left[\left(r^2 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) \mathbf{Z}^2(\mu r) \Big|_{r=a}^{r=b} + r^2 (\mathbf{Z}')^2(\mu r) \Big|_{r=a}^{r=b} \right]. \quad (1.1.16)$$

где $\mathbf{Z}(x)$ – произвольные решения уравнения Бесселя

$$(x \mathbf{Z}')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x} \right) \mathbf{Z} = 0.$$

1.1.3. Поведение функций Бесселя и Неймана

Теорема 1.1.2 (Поведение в окрестности нуля).

Усл. Число $\nu > -1$, а числа μ_1 и μ_2 – действительные корни уравнения

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta J'_\nu(\mu) = 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0.$$

Утв.

$$J_\nu(+0) = \begin{cases} \infty, & \nu < 0, \quad \nu \notin \mathbb{Z}; \\ 0, & \nu < 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}; \\ 1, & \nu = 0; \\ 0, & \nu > 0; \end{cases} \quad N_\nu(+0) = \infty, \quad \nu \in \mathbb{R}; .$$

1.1.4. Задачи Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0, R]$

Опр. 1.1.3. Через M мы будем обозначать следующий класс функций:

$$u(r) \in C^2(0, R]; \quad \frac{L_\nu(u)}{\sqrt{r}} \in L_2(0, R).$$

Опр. 1.1.4. Задачей Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0, R]$ мы будем называть задачу:

Найти числа λ и функции $0 \neq u(r) \in M$ из условий:

$$\begin{cases} -(ru')' + \frac{\nu^2}{r}u = \lambda ru, & r \in (0, R), \quad \nu \geq 0; \\ |u(+0)| < \infty; \\ \alpha u(R) + \beta u'(R) = 0, & \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0. \end{cases} \quad (1.1.17)$$

При этом функции $u \neq 0$ называются **собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля**, а числа λ – **собственными числами задачи Штурма-Лиувилля**.

Теорема 1.1.3.

Утв. 1. Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1.

Утв. 2. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(r) \equiv \text{const}$.

Теорема 1.1.4.

Утв. Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} r \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – положительные корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

Теорема 1.1.5.

Утв. 1. Функция $\sqrt{r} \varphi(r)$ разлагается в ряд Фурье на интервале $(0, R)$

$$\sqrt{r} \varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^\nu \sqrt{r} J_\nu \left(\frac{\mu_k^\nu r}{R} \right), \quad (1.1.18)$$

$$\alpha_k^\nu = \frac{1}{\frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_k^\nu)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{[\mu_k^\nu]^2} \right) J_\nu^2(\mu_k^\nu)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_\nu \left(\frac{\mu_k^\nu r}{R} \right) dr,$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – положительные корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

Утв. 2. В случае $\alpha = \nu = 0$, функция $\sqrt{r} \varphi(r)$ разлагается в ряд Фурье на интервале $(0, R)$

$$\sqrt{r} \varphi(r) = \alpha_0^0 \sqrt{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \sqrt{r} J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad (1.1.19)$$

$$\alpha_0^0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, \quad \alpha_k^0 = \frac{2}{\underbrace{[J_1(\mu_k)]^2}_{=0} + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr.$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

Заметим, что в формуле (1.1.18) можно (и нужно) сократить на $\sqrt{r}$. Зачем же его писать? Это делается для того, чтобы разлагаемая функция, даже если она будет неограничена в окрестности нуля, попал в нужный класс, то есть в класс функций, для которых справедлив аналог теоремы Стеклова, и ряд (1.1.18) сходилась равномерно даже в окрестности нуля.

1.1.5. Задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[a, b]$

Теорема 1.1.6 (Аналог теоремы В.А. Стеклова).

Усл. $\{\mathbf{Z}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

Утв. $\forall f(x) \in C^2[a, b]$, удовлетворяющей краевым условиям, $\exists \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{Z}_k(x),$$

причём последний ряд сходится к $f(x)$ абсолютно и равномерно на $[a, b]$, а для c_k верно представление

$$c_k = \frac{(f, \mathbf{Z}_k)}{\|\mathbf{Z}_k\|^2} = \frac{\int_a^b x f(x) \mathbf{Z}_k(x) dx}{\int_a^b x \mathbf{Z}_k^2(x) dx}.$$

Теорема 1.1.7.

Усл. Функция $\mathbf{Z}(x)$ есть решение на промежутке $x \in (a, b)$ уравнения

$$x^2 \mathbf{Z}'' + x \mathbf{Z}' + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Z} = 0.$$

μ_k – положительные решения уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 J_{\nu}(\mu a) + \beta_1 \mu J'_{\nu}(\mu a) & \alpha_1 N_{\nu}(\mu a) + \beta_1 \mu N'_{\nu}(\mu a) \\ \alpha_2 J_{\nu}(\mu b) + \beta_2 \mu J'_{\nu}(\mu b) & \alpha_2 N_{\nu}(\mu b) + \beta_2 \mu N'_{\nu}(\mu b) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.1.20)$$

УТВ. 1 Каждая из функций $\mathbf{X}_k(r) = \mathbf{Z}(\mu_k r)$, $k = \overline{1, \infty}$ является решением задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} -\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)' + \frac{\nu^2}{r}\mathbf{X}_k(r) = \mu_k^2 r\mathbf{X}_k(r), & a < r < b; \\ \alpha_1\mathbf{X}_k(a) + \beta_1\mathbf{X}'_k(a) = 0, \\ \alpha_2\mathbf{X}_k(b) + \beta_2\mathbf{X}'_k(b) = 0. \end{cases} \quad (1.1.21)$$

При этом функция $\mathbf{X}_k(r)$ имеет вид

$$\mathbf{X}_k(r) = \left(\alpha_1 N_\nu(\mu_k a) + \beta_1 \mu_k N'_\nu(\mu_k a) \right) J_\nu(\mu_k r) - \left(\alpha_1 J_\nu(\mu_k a) + \beta_1 \mu_k J'_\nu(\mu_k a) \right) N_\nu(\mu_k r).$$

УТВ. 2

$$\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2 = \int_a^b r \mathbf{Z}^2(\mu r) dr = \frac{1}{2} \left[\left(r^2 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) \mathbf{Z}^2(\mu r) \Big|_{r=a}^{r=b} + r^2 (\mathbf{Z}')^2(\mu r) \Big|_{r=a}^{r=b} \right].$$

УТВ. 3

$$\left(\mathbf{Z}(\mu_k r), \mathbf{Z}(\mu_m r) \right) = 0, \quad k \neq m.$$

1.2. № 769.

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ u_t(r, 0) = \psi(r), & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Заметим, что в правой части уравнения стоит оператор Лапласа в полярных координатах для случая $u \equiv u(r, t)$, поскольку в координатах (r, θ) он имеет вид:

$$\Delta u(r, \theta; t) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (1.2.2)$$

Поэтому данная задача имеет физический смысл «найти поперечные колебания круглой мембраны, вызванные начальным отклонением $\varphi(r)$ и начальной скоростью $\psi(r)$ ».

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.2.1) в виде

$$u(r; t) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.2.3)$$

то, подставив (1.2.3) в уравнение $u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$, получим:

$$\sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k''(t) = a^2 \sum_{k=\dots}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k''(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}_k''(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = 0, \quad (1.2.4)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.2.5)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.2.1).

Условие $|u(0, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.2.6)$$

а условие $u(R, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.2.7)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r \mathbf{X}_k'(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.2.8) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.2.8) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k^{(0)} = \left[\frac{\mu_k^{(0)}}{R} \right]^2, & J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k^{(0)} - \text{ корни уравнения } & J_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Шаг 3. Разложение функций φ и ψ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функции $\sqrt{r} \varphi(r)$ и $\sqrt{r} \psi(r)$ разлагаются в ряд Фурье

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right), \quad (1.2.10)$$

$$\psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right), \quad (1.2.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{1}{\frac{1}{2} \left[J_0'(\mu_k^{(0)}) \right]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k^{(0)})^2} \right) \underbrace{J_0^2(\mu_k^{(0)})}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2 \left[J_0'(\mu_k^{(0)}) \right]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr, \end{aligned}$$

короче,

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_0'(\mu_k^{(0)}) \right]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr, \quad \psi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_0'(\mu_k^{(0)}) \right]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr$$

Упростим вид этих выражений, применив рекуррентную формулу (1.1.8), стр. 2:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x).$$

У нас $\nu = 0$, поэтому

$$J'_0(\mu_k^{(0)}) = J_{-1}(\mu_k^{(0)}).$$

А в силу соотношения (1.1.11)

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{Z},$$

получаем

$$J'_0(\mu_k^{(0)}) = -J_1(\mu_k^{(0)}).$$

Поэтому

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr, \quad \psi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr \quad (1.2.12)$$

Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомым вид (1.2.3), стр. 6, подставить в начальные условия

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r),$$

заменяя функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ рядами (1.2.10) и (1.2.11), получим, что эти начальные условия будут заведомо выполнены, если ряды в левых и правых частях окажутся равны почленно, то есть будут выполнены соотношения

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(0) = \mathbf{X}_k(r) \varphi_k, \\ \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(0) = \mathbf{X}_k(r) \psi_k. \end{cases}$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k, \quad \mathbf{T}'_k(0) = \psi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.2.4), стр. 7, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}''_k(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = 0, \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k, \\ \mathbf{T}'_k(0) = \psi_k. \end{cases} \quad (1.2.13)$$

Общее решение уравнения $\mathbf{T}''_k(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_k(t) = c_1 \sin \left(\sqrt{\lambda_k} at \right) + c_2 \cos \left(\sqrt{\lambda_k} at \right).$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k$ получаем, что

$$c_2 = \varphi_k,$$

а из начального условия $\mathbf{T}'_k(0) = \psi_k$ получаем, что

$$c_1 = \frac{\psi_k}{a \sqrt{\lambda_k}}.$$

Таким образом, решение задачи (1.2.13) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \frac{\psi_k}{a \sqrt{\lambda_k}} \cdot \sin \left(\sqrt{\lambda_k} at \right) + \varphi_k \cos \left(\sqrt{\lambda_k} at \right),$$

где φ_k и ψ_k задаются формулой (1.2.12):

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr, \quad \psi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr$$

Вспоминая, что $\sqrt{\lambda_k} = \frac{\mu_k^{(0)}}{R}$, запишем

Ответ:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) \left(\frac{R \psi_k}{a \mu_k^{(0)}} \cdot \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right) + \varphi_k \cos \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right) \right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а φ_k и ψ_k задаются формулой

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr, \quad \psi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr$$

1.3. № 770.

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ u_t(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Заметим, что в правой части уравнения стоит оператор Лапласа в полярных координатах для случая $u \equiv u(r, t)$, поскольку в координатах (r, θ) он имеет вид:

$$\Delta u(r, \theta; t) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (1.3.2)$$

Поэтому данная задача имеет физический смысл «найти поперечные колебания круглой мембраны, вызванные силой $f(r, t)$ ».

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.3.1) в виде

$$u(r; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.3.3)$$

и предположить, что для $f(r, t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad (1.3.4)$$

то, подставив (1.3.4) и (1.3.3) в уравнение $u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f$, получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k''(t) = a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k''(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}_k''(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \quad (1.3.5)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.3.6)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (3.1.23) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.3.1).

Условие $|u(0, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.3.7)$$

а условие $u(R, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.3.8)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (3.1.23) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.3.9)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.3.9) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.3.9) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k^{(0)} = \left[\frac{\mu_k^{(0)}}{R} \right]^2, & J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k^{(0)} - \text{ корни уравнения } & J_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.3.10)$$

Шаг 3. Разложение функции $f(r, t)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0(\mu_k^{(0)} r), \quad (1.3.11)$$

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{1}{\frac{1}{2} \left[J_0'(\mu_k^{(0)}) \right]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k^{(0)})^2} \right) \underbrace{J_0^2(\mu_k^{(0)})}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2 \left[J_0'(\mu_k^{(0)}) \right]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr, \end{aligned}$$

короче,

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 \left[J_0'(\mu_k^{(0)}) \right]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr$$

Упростим вид этого выражения, применив рекуррентную формулу (1.1.8), стр. 2:

$$J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x).$$

У нас $\nu = 0$, поэтому

$$J_0'(\mu_k^{(0)}) = J_{-1}(\mu_k^{(0)}).$$

А в силу соотношения (1.1.11)

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{Z},$$

получаем

$$J_0'(\mu_k^{(0)}) = -J_1(\mu_k^{(0)}).$$

Поэтому

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 \left[J_1(\mu_k^{(0)}) \right]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr \quad (1.3.12)$$

Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомый вид (1.3.4), стр. 10, подставить в начальные условия

$$u(r, 0) = 0, \quad u_t(r, 0) = 0,$$

получим, что эти начальные условия будут заведомо выполнены, если все слагаемые рядов в левых частях окажутся равны нулю, то есть будут выполнены соотношения

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(0) = 0, \\ \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = 0, \quad \mathbf{T}'_k(0) = 0.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.3.5), стр. 10, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k^{(0)}}{R} \right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_k''(t) + \frac{a^2 [\mu_k^{(0)}]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = 0, \\ \mathbf{T}_k'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.3.13)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}''(t) + \frac{a^2 [\mu_k^{(0)}]^2}{R^2} \mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = c_1 \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R}\right).$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ образуют ФСР линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

то общее решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

имеет вид

$$y_{\text{oH}_0} = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \dots + c_n(x)y_n,$$

где функции $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$ находятся из системы

[illegible]

В нашем случае ФСР образуется парой функций $\left\{ \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right), \cos \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right) \right\}$, порядок уравнения $n = 2$, и в системе будет всего 2 уравнения:

$$\begin{cases} c'_1 \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R}\right) + c'_2 \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R}\right) = 0 \\ \frac{a\mu_k^{(0)}}{R} \left(c'_1 \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R}\right) - c'_2 \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R}\right) \right) = f_k(t). \end{cases}$$

Решив эту систему линейных алгебраических уравнений, например, по правилу Крамера, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1'(t) = \frac{f_k(t)R \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R}\right)}{a\mu_k^{(0)}}, \\ c_2'(t) = - \frac{f_k(t)R \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R}\right)}{a\mu_k^{(0)}}. \end{array} \right.$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k(t) &= \frac{R}{a\mu_k^{(0)}} \cdot \left(\sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right) \int_0^t f_k(\tau) \cos \left(\frac{\mu_k^{(0)} a\tau}{R} \right) d\tau - \cos \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right) \int_0^t f_k(\tau) \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} a\tau}{R} \right) d\tau \right) + \\ &\quad + \tilde{c}_1 \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right) + \tilde{c}_2 \cos \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right) = \\ &= \frac{R}{a\mu_k^{(0)}} \cdot \int_0^t f_k(\tau) \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} a(t-\tau)}{R} \right) d\tau + \tilde{c}_1 \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right) + \tilde{c}_2 \cos \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right). \quad (1.3.14) \end{aligned}$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = 0$ получаем, что

$$\tilde{c}_2 = 0,$$

а из начального условия $\mathbf{T}'_k(0) = 0$ получаем, что

$$\tilde{c}_1 = 0.$$

Таким образом, решение задачи (1.3.13) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \frac{R}{a\mu_k^{(0)}} \cdot \int_0^t f_k(\tau) \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} a(t-\tau)}{R} \right) d\tau,$$

где $f_k(t)$ задаются формулой (1.3.12):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr$$

Ответ:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) \cdot \frac{R}{a\mu_k^{(0)}} \cdot \int_0^t f_k(\tau) \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} a(t-\tau)}{R} \right) d\tau,$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ задаются формулой

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr.$$

1.4. № 771 а).

Определить поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса R , вызванные начальной скоростью

$$\psi(r) = \begin{cases} U, & 0 \leq r < \frac{R}{2}, \\ 0, & \frac{R}{2} < r < R, \end{cases} \quad (1.4.1)$$

если край мембраны закреплён жёстко.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ u_t(r, 0) = \psi(r), & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.4.2)$$

где $\psi(r)$ определена в (1.4.1). Эта задача – частный случай задачи, решённой нами в № 769. Воспользуемся его результатом:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) \left(\frac{R \psi_k}{a \mu_k^{(0)}} \cdot \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} a t}{R} \right) + \varphi_k \cos \left(\frac{\mu_k^{(0)} a t}{R} \right) \right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а φ_k и ψ_k задаются формулой

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr, \quad \psi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr$$

В нашем случае $\varphi(r) \equiv 0$ и, значит, $\varphi_k = 0$, а ψ_k надо найти, исходя из вида функции ψ .

$$\begin{aligned} \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr &= \left[\text{в силу (1.4.1)} \right] = U \int_0^{\frac{R}{2}} r J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr = \\ &= \left[x = \frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right] = \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \int_0^{\frac{\mu_k^{(0)}}{2}} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, } x J_0(x) = [x J_1(x)]' \right] = \\ &= \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \int_0^{\frac{\mu_k^{(0)}}{2}} [x J_1(x)]' dx = \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \cdot [x J_1(x)] \Big|_{x=0}^{x=\frac{\mu_k^{(0)}}{2}} = \frac{UR^2}{2 \mu_k^{(0)}} \cdot J_1 \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\frac{R \psi_k}{a \mu_k^{(0)}} = \frac{UR}{a \left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \cdot \frac{J_1 \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} \right)}{\left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2}$$

Ответ:

$$u(r; t) = \frac{UR}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \cdot \frac{J_1 \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} \right)}{\left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) \cdot \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} a t}{R} \right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

1.5. № 771 Б).

Определить поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса R , вызванные начальной скоростью

$$\psi(r) = \begin{cases} U, & 0 \leq r < \frac{R}{2}, \\ 0, & \frac{R}{2} < r < R, \end{cases} \quad (1.5.1)$$

если край мембраны закреплён упруго.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ u_t(r, 0) = \psi(r), & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) + hu(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

где $\psi(r)$ определена в (1.5.1).

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.5.2) в виде

$$u(r; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.5.3)$$

то, подставив (1.5.3) в уравнение $u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$, получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k''(t) = a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k''(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}_k''(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = 0, \quad (1.5.4)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.5.5)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17), стр. (1.1.17), с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.5.2).

Условие $|u(0, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.5.6)$$

а условие $u_r(R, t) + hu(R, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}'_k(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.5.7)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\alpha = h$ и $\beta = 1$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}'_k(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.5.8)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.5.8) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = h$, $\beta = 1$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.5.8) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k^{(0)} = \left[\frac{\mu_k^{(0)}}{R} \right]^2, & J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k^{(0)} - \text{положительные корни уравнения} & \mu J'_0(\mu) + hR J_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.5.9)$$

Шаг 3. Разложение функций φ и ψ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функции $\sqrt{r} \varphi(r)$ и $\sqrt{r} \psi(r)$ разлагаются в ряд Фурье

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right), \quad (1.5.10)$$

$$\psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right), \quad (1.5.11)$$

$$\begin{aligned}\psi_k &= \frac{1}{\frac{1}{2} \left[J_0' \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{\left(\mu_k^{(0)} \right)^2} \right)} \cdot \underbrace{J_0^2 \left(\mu_k^{(0)} \right)}_{= \left[-\frac{\mu_k}{hR} J_0' \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr = \\ &= \frac{2h^2}{\left(R^2 h^2 + \mu_k^2 \right) \left[J_0' \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr,\end{aligned}$$

короче,

$$\varphi_k = 0, \quad \psi_k = \frac{2h^2}{\left(R^2 h^2 + \mu_k^2 \right) \left[J_0' \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr,$$

Упростим вид этих выражений, применив рекуррентную формулу (1.1.8), стр. 2:

$$J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x).$$

У нас $\nu = 0$, поэтому

$$J_0' \left(\mu_k^{(0)} \right) = J_{-1} \left(\mu_k^{(0)} \right).$$

А в силу соотношения (1.1.11)

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{Z},$$

получаем

$$J_0' \left(\mu_k^{(0)} \right) = -J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right).$$

Поэтому

$$\varphi_k = 0, \quad \psi_k = \frac{2h^2}{\left(R^2 h^2 + \mu_k^2 \right) \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr \quad (1.5.12)$$

Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомый вид (1.5.3), стр. 16, подставить в начальные условия

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r),$$

заменяв функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ рядами (1.5.10) и (1.5.11), получим, что эти начальные условия будут заведомо выполнены, если ряды в левых и правых частях окажутся равны почленно, то есть будут выполнены соотношения

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(0) = \mathbf{X}_k(r) \varphi_k, \\ \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k'(0) = \mathbf{X}_k(r) \psi_k. \end{cases}$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k, \quad \mathbf{T}_k'(0) = \psi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.5.4), стр. 16, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_k''(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = 0, \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k, \\ \mathbf{T}_k'(0) = \psi_k. \end{cases} \quad (1.5.13)$$

Общее решение уравнения $\mathbf{T}_k''(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_k(t) = c_1 \sin \left(\sqrt{\lambda_k} at \right) + c_2 \cos \left(\sqrt{\lambda_k} at \right).$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k$ получаем, что

$$c_2 = \varphi_k,$$

а из начального условия $\mathbf{T}_k'(0) = \psi_k$ получаем, что

$$c_1 = \frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}}.$$

Таким образом, решение задачи (1.5.13) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \cdot \sin \left(\sqrt{\lambda_k} at \right) + \varphi_k \cos \left(\sqrt{\lambda_k} at \right),$$

где φ_k и ψ_k задаются формулой (1.5.12):

$$\varphi_k = 0, \quad \psi_k = \frac{2h^2}{(R^2 h^2 + \mu_k^2) \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr$$

Найдём ψ_k , пользуясь условием (1.5.1).

$$\begin{aligned} \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr &= \left[\text{в силу (1.5.1)} \right] = U \int_0^{\frac{R}{2}} r J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr = \\ &= \left[x = \frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right] = \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \int_0^{\frac{\mu_k^{(0)}}{2}} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, } x J_0(x) = [x J_1(x)]' \right] = \\ &= \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \int_0^{\frac{\mu_k^{(0)}}{2}} [x J_1(x)]' dx = \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \cdot [x J_1(x)] \Big|_{x=0}^{x=\frac{\mu_k^{(0)}}{2}} = \frac{UR^2}{2\mu_k^{(0)}} \cdot J_1 \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, вспоминая, что $\sqrt{\lambda_k} = \frac{\mu_k^{(0)}}{R}$, запишем

$$\frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}} = \frac{R\psi_k}{a\mu_k^{(0)}} = \frac{Uh^2 R^3}{a(R^2 h^2 + \mu_k^2) \left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \cdot \frac{J_1 \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} \right)}{\left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2}$$

Таким образом,

$$u(r; t) = \frac{Uh^2 R^3}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1 \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2} \right)}{(R^2 h^2 + \mu_k^2) \left[\mu_k^{(0)} \right]^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) \cdot \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $\mu J'_0(\mu) + hR J_0(\mu) = 0$.

Можно немного упростить этот ответ, воспользовавшись рекуррентными формулами (1.1.9) и (1.1.11), стр. 2:

$$[x^\nu J_\nu]'(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В самом деле, из того, что $\mu_k^{(0)}$ – корни уравнения $\mu J'_0(\mu) + hR J_0(\mu) = 0$, следует, что

$$\left(\frac{hR}{\mu_k^{(0)}}\right)^2 = \left(-\frac{J'_0(\mu_k^{(0)})}{J_0(\mu_k^{(0)})}\right)^2,$$

а из

$$J'_0(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x)$$

получаем:

$$\left(\frac{hR}{\mu_k^{(0)}}\right)^2 = \left(\frac{J_1(\mu_k^{(0)})}{J_0(\mu_k^{(0)})}\right)^2,$$

и ответ принимает вид:

Ответ:

$$u(r; t) = \frac{UR}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right)}{(R^2 h^2 + \mu_k^2) [J_0(\mu_k^{(0)})]^2} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) \cdot \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R}\right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $\mu J'_0(\mu) + hR J_0(\mu) = 0$.

1.6. № 772 а).

Однородная круглая мембрана радиуса R с жёстко закреплённым краем совершает поперечные колебания, вызванные начальным отклонением

$$\varphi(r) = A(R^2 - r^2). \quad (1.6.1)$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi(r) = A(R^2 - r^2), & 0 \leq r < R; \\ u_t(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.6.2)$$

Эта задача – частный случай задачи, решённой нами в № 769. Воспользуемся его результатом:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) \left(\frac{R \psi_k}{a \mu_k^{(0)}} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R}\right) + \varphi_k \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R}\right) \right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а φ_k и ψ_k задаются формулой

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k^{(0)})]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr, \quad \psi_k = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k^{(0)})]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr$$

В нашем случае $\psi(r) \equiv 0$ и, значит, $\psi_k = 0$, а φ_k надо найти, исходя из вида функции $\varphi = A(R^2 - r^2)$. Найдём сначала интегралы $\int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr$ и $\int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr$.

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right] = \frac{R^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \int_0^{\mu_k^{(0)}} x J_0(x) dx = \\ &= \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, } x J_0(x) = [x J_1(x)]'\right] = \frac{R^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \int_0^{\mu_k^{(0)}} [x J_1(x)]' dx = \\ &= \frac{R^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \cdot [x J_1(x)] \Big|_{x=0}^{x=\mu_k^{(0)}} = \frac{R^2}{\mu_k^{(0)}} \cdot J_1\left(\mu_k^{(0)}\right). \quad (1.6.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right] = \frac{R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^4} \int_0^{\mu_k^{(0)}} x^3 J_0(x) dx = \\ &= \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, } x J_0(x) = [x J_1(x)]'; \text{ берём по частям}\right] = \frac{R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^4} \int_0^{\mu_k^{(0)}} x^2 \cdot [x J_1(x)]' dx = \\ &= \frac{R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^4} \left(x^3 J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k^{(0)}} - 2 \int_0^{\mu_k^{(0)}} x^2 J_1(x) dx \right) = \\ &= \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, } x^2 J_1(x) = [x^2 J_2(x)]'\right] = \\ &= \frac{R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^4} \left(\left[\mu_k^{(0)}\right]^3 J_1\left(\mu_k^{(0)}\right) - 2 [x^2 J_2(x)] \Big|_{x=0}^{x=\mu_k^{(0)}} \right) = \\ &= \frac{R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^4} \left(\left[\mu_k^{(0)}\right]^3 J_1\left(\mu_k^{(0)}\right) - 2 \left[\mu_k^{(0)}\right]^2 J_2\left(\mu_k^{(0)}\right) \right) = \\ &= \frac{R^4}{\mu_k^{(0)}} \cdot J_1\left(\mu_k^{(0)}\right) - \frac{2R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \cdot J_2\left(\mu_k^{(0)}\right). \quad (1.6.4) \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^R A(R^2 - r^2) \cdot r J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr &= AR^2 \cdot \frac{R^2}{\mu_k^{(0)}} \cdot J_1\left(\mu_k^{(0)}\right) - A \cdot \left(\frac{R^4}{\mu_k^{(0)}} \cdot J_1\left(\mu_k^{(0)}\right) - \frac{2R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \cdot J_2\left(\mu_k^{(0)}\right) \right) = \\ &= \frac{2AR^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \cdot J_2\left(\mu_k^{(0)}\right). \end{aligned}$$

И, наконец,

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr = \frac{4AR^2}{\left[\mu_k^{(0)} J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot J_2 \left(\mu_k^{(0)} \right).$$

Осталось упростить это выражение. Воспользуемся рекуррентной формулой (1.1.10), стр. 2:

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0.$$

При $\nu = 1$ и при $x = \mu_k^{(0)}$ получим

$$J_2 \left(\mu_k^{(0)} \right) - \frac{2}{\mu_k^{(0)}} J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) + \underbrace{J_0 \left(\mu_k^{(0)} \right)}_{=0} = 0.$$

Поэтому,

$$\frac{J_2 \left(\mu_k^{(0)} \right)}{J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right)} = \frac{2}{\mu_k^{(0)}},$$

откуда

$$\varphi_k = \frac{4AR^2}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^2 J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right)} \cdot \frac{J_2 \left(\mu_k^{(0)} \right)}{J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right)} = \frac{8AR^2}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^3 J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right)}.$$

Ответ:

$$u(r; t) = 8AR^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^3 J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right)} \cdot J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) \cdot \cos \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

1.7. № 772 б).

Однородная круглая мембрана радиуса R с жёстко закреплённым краем совершает поперечные колебания, вызванные постоянной начальной скоростью U точек мембраны.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ u_t(r, 0) = \psi(r) = U, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.7.1)$$

Эта задача – частный случай задачи, решённой нами в № 769 и полностью аналогичную мы уже решили в № 701 а). Воспользуемся результатом № 769:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) \left(\frac{R\psi_k}{a\mu_k^{(0)}} \cdot \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right) + \varphi_k \cos \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right) \right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а φ_k и ψ_k задаются формулой

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr, \quad \psi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr$$

В нашем случае $\varphi(r) \equiv 0$ и, значит, $\varphi_k = 0$, а ψ_k надо найти, исходя из вида функции $\psi = U$.

$$\begin{aligned} \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr &= U \int_0^R r J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) dr = \left[x = \frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right] = \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \int_0^{\mu_k^{(0)}} x J_0(x) dx = \\ &= \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, } x J_0(x) = [x J_1(x)]' \right] = \\ &= \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \int_0^{\mu_k^{(0)}} [x J_1(x)]' dx = \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \cdot [x J_1(x)] \Big|_{x=0}^{x=\mu_k^{(0)}} = \frac{UR^2}{\mu_k^{(0)}} \cdot J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right). \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\frac{R\psi_k}{a\mu_k^{(0)}} = \frac{2UR}{a \left[\mu_k^{(0)} \right]^2} \cdot \frac{J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right)}{\left[J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right) \right]^2} = \frac{2UR}{a \left[\mu_k^{(0)} \right]^2 J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right)}$$

Ответ:

$$u(r; t) = \frac{2UR}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\mu_k^{(0)} \right]^2 J_1 \left(\mu_k^{(0)} \right)} \cdot J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right) \cdot \sin \left(\frac{\mu_k^{(0)} at}{R} \right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

1.8. № 773

Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + F, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ u_t(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) = U, & t > 0. \end{cases} \quad (1.8.1)$$

где F и U – заданные константы.

Шаг 1. Избавляемся от неоднородности в краевом условии

Будем искать решение задачи (1.8.1) в виде

$$u(r, t) = v(r, t) + w(r, t), \quad (1.8.2)$$

где $w(r, t)$ – есть какое-либо решение задачи

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r + F, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |w(0, t)| < \infty, \quad w_r(R, t) = U, & t > 0. \end{cases} \quad (1.8.3)$$

Поскольку нам нужно какое угодно решение (1.8.3), естественно искать функцию w наиболее простого вида, например, суммы многочлена от r и $\eta(t)$:

$$w(r, t) = \alpha r^2 + \eta(t).$$

Для такой $w(r, t)$

$$w_r = 2\alpha r, \quad w_{tt} = \eta''(t), \quad \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r \equiv w_{rr} + \frac{1}{r}w_r = 4\alpha.$$

Из краевого условия $w_r(R, t) = U$ находим

$$\alpha = \frac{U}{2R} \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{Ur^2}{2R} + \eta(t).$$

Подставляя w такого вида в уравнение $w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r + F$, получаем равенство

$$\eta''(t) = \frac{2a^2U}{R} + F,$$

которому удовлетворяет, например, функция

$$\eta(t) = \left(\frac{a^2U}{R} + \frac{F}{2} \right) t^2.$$

Итак,

$$w(r, t) = \frac{Ur^2}{2R} + \left(\frac{a^2U}{R} + \frac{F}{2} \right) t^2. \quad (1.8.4)$$

Такая функция $w(r, t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r + F, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ w(r, 0) = \frac{Ur^2}{2R}, & 0 \leq r < R; \\ w_t(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |w(0, t)| < \infty, \quad w_r(R, t) = U, & t > 0. \end{cases} \quad (1.8.5)$$

Вычтем из задачи (1.8.1) задачу (1.8.5). Получим, что функция $v(r, t) = u(r, t) - w(r, t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = -\frac{Ur^2}{2R}, & 0 \leq r < R; \\ v_t(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v_r(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.8.6)$$

Шаг 2. Решение задачи (1.8.6)

Эта задача – аналог задач, решённых нами в № 769 и 771 б).

Шаг 2-1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.8.6) в виде

$$v(r; t) = \sum_{k=...}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.8.7)$$

то, подставив (1.8.7) в уравнение $v_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r$, получим:

$$\sum_{k=...}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k''(t) = a^2 \sum_{k=...}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}_k'(r))' \mathbf{T}_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k''(t) = \frac{a^2}{r} \cdot (r\mathbf{X}_k'(r))' \mathbf{T}_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot (r \mathbf{X}_k'(r))'}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot (r \mathbf{X}_k'(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}_k''(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = 0, \quad (1.8.8)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot (r \mathbf{X}_k'(r))' + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$(r \mathbf{X}_k'(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.8.9)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17), стр. (1.1.17), с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.8.6).

Условие $|v(0, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.8.10)$$

а условие $v_r(R, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k'(R) = 0. \quad (1.8.11)$$

Шаг 2-2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\nu = 0$, $\alpha = 0$ и $\beta = 1$:

$$\begin{cases} (r \mathbf{X}_k'(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k'(R) = 0. \end{cases} \quad (1.8.12)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.8.12) имеет собственное значение $\lambda_0 = 0$ и соответствующую ему собственную функцию $\mathbf{X}_0(r) = 1$:

$$\lambda_0 = 0, \quad \mathbf{X}_0(r) = 1.$$

Осталось найти строго положительные собственные значения.

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.8.12) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k^{(0)} = \left[\frac{\mu_k^{(0)}}{R} \right]^2, & \mathbf{X}_k(r) = J_0 \left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k^{(0)} - \text{положительные корни уравнения} & J'_0(\mu) = 0. \end{cases}$$

Избавимся от производной в уравнении $J'_0(\mu) = 0$, благо рекуррентная формула (1.1.8)

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x),$$

взятая при $\nu = 0$, позволяет это сделать:

$$J'_0(x) = J_{-1}(x) - \frac{0}{x} \cdot J_0(x).$$

Отсюда, в силу равенства (1.1.11): $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, получаем, что

$$J'_0(\mu) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad J_1(\mu) = 0.$$

Итак, задача (1.8.12) имеет следующие собственные значения и функции:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \mathbf{X}_0(r) = 1, \\ \lambda_k^{(0)} = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & \mathbf{X}_k(r) = J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k - \text{положительные корни уравнения} & J_1(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.8.13)$$

Шаг 2-3. Разложение функций φ и ψ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функции $\sqrt{r} \varphi(r)$ и $\sqrt{r} \psi(r)$ разлагаются в ряд Фурье

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad (1.8.14)$$

$$\psi(r) = \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad (1.8.15)$$

Так как у нас $\psi \equiv 0$, то все коэффициенты $\psi_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. А для φ_k верны формулы:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, \\ \varphi_k &= \frac{2}{\underbrace{[J_1(\mu_k)]^2}_{=0} + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \frac{2}{R^2 [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \end{aligned}$$

Итак,

$$\psi_0 = \psi_k = 0, \quad \varphi_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2 [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \quad (1.8.16)$$

Шаг 2-4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомый вид (1.8.7), стр. 24, подставить в начальные условия

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r),$$

заменяя функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ рядами (1.8.14) и (1.8.15), получим, что эти начальные условия будут заведомо выполнены, если ряды в левых и правых частях окажутся равны почленно, то есть будут выполнены соотношения

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(0) = \mathbf{X}_k(r) \varphi_k, \\ \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(0) = \mathbf{X}_k(r) \psi_k. \end{cases}$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k, \quad \mathbf{T}'_k(0) = \psi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.8.8), стр. 25, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}''_k(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = 0, \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k, \\ \mathbf{T}'_k(0) = \psi_k. \end{cases} \quad (1.8.17)$$

Общее решение уравнения $\mathbf{T}''_k(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = 0$ при $k > 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_k(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k} at\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda_k} at\right).$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k$ получаем, что

$$c_2 = \varphi_k,$$

а из начального условия $\mathbf{T}'_k(0) = \psi_k$ получаем, что

$$c_1 = \frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}}.$$

Аналогично при $k = 0$ получаем, что

$$\mathbf{T}_0(t) = \psi_0 t + \varphi_0.$$

Таким образом, решение задачи (1.8.17) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \begin{cases} \psi_0 t + \varphi_0 & k = 0; \\ \frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_k} at\right) + \varphi_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k} at\right), & k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (1.8.18)$$

где φ_k и ψ_k задаются формулой (1.8.16):

$$\psi_0 = \psi_k = 0, \quad \varphi_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2 [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$$

Чтобы найти φ_k , пользуясь условием $\varphi(r) = -\frac{Ur^2}{2R}$, найдём сначала интеграл $\int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$. Мы его уже находили, когда решали № 772 а). Повторим:

$$\begin{aligned}
 \int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{R^4}{[\mu_k]^4} \int_0^{\mu_k} x^3 J_0(x) dx = \\
 &= \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, } x J_0(x) = [x J_1(x)]'; \text{ берём по частям}\right] = \frac{R^4}{[\mu_k]^4} \int_0^{\mu_k} x^2 \cdot [x J_1(x)]' dx = \\
 &= \frac{R^4}{[\mu_k]^4} \left(x^3 J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} - 2 \int_0^{\mu_k} x^2 J_1(x) dx \right) = \\
 &= \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, } x^2 J_1(x) = [x^2 J_2(x)]'\right] = \\
 &= \frac{R^4}{[\mu_k]^4} \left([\mu_k]^3 J_1(\mu_k) - 2 [x^2 J_2(x)] \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \\
 &= \frac{R^4}{[\mu_k]^4} ([\mu_k]^3 J_1(\mu_k) - 2 [\mu_k]^2 J_2(\mu_k)) = \\
 &= \frac{R^4}{\mu_k} \cdot J_1(\mu_k) - \frac{2R^4}{[\mu_k]^2} \cdot J_2(\mu_k). \quad (1.8.19)
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \varphi_k &= \frac{2}{R^2 [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\
 &= -\frac{U}{R^3 [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \left(\frac{R^4}{\mu_k} \cdot \underbrace{J_1(\mu_k)}_{=0} - \frac{2R^4}{[\mu_k]^2} \cdot J_2(\mu_k) \right) = \\
 &= \frac{2UR}{[\mu_k]^2} \cdot \frac{J_2(\mu_k)}{[J_0(\mu_k)]^2}.
 \end{aligned}$$

Осталось упростить это выражение. Воспользуемся рекуррентной формулой (1.1.10), стр. 2:

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0.$$

При $\nu = 1$ при $x = \mu_k$ получим

$$J_2(\mu_k) - \frac{2}{\mu_k} \underbrace{J_1(\mu_k)}_{=0} + J_0(\mu_k) = 0.$$

Поэтому,

$$\frac{J_2(\mu_k)}{J_0(\mu_k)} = -1,$$

откуда

$$\varphi_k = -\frac{2UR}{[\mu_k]^2 J_0(\mu_k)}.$$

Осталось посчитать φ_0 :

$$\varphi_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr = - \frac{U}{R^3} \int_0^R r^3 dr = - \frac{UR}{4}.$$

Подставляем φ_k и ψ_k в (1.8.18) и получаем

$$\mathbf{T}_k(t) = \begin{cases} -\frac{UR}{4} & k=0; \\ -\frac{2UR}{[\mu_k]^2 J_0(\mu_k)} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_k} at), & k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Тогда, вспоминая, что $\sqrt{\lambda_k} = \frac{\mu_k}{R}$, запишем решение задачи (1.8.6)

$$v(r; t) = \mathbf{X}_0(r) \mathbf{T}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$$

в окончательном виде

$$v(r; t) = -\frac{UR}{4} - 2UR \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\mu_k]^2 J_0(\mu_k)} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right)$$

Наконец, для решения

$$u(r, t) = v(r, t) + w(r, t) = v(r, t) + \frac{Ur^2}{2R} + \left(\frac{a^2 U}{R} + \frac{F}{2}\right) t^2$$

исходной задачи (1.8.1) получаем

Ответ:

$$u(r; t) = \frac{Ur^2}{2R} + \left(\frac{a^2 U}{R} + \frac{F}{2}\right) t^2 - \frac{UR}{4} - 2UR \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\mu_k]^2 J_0(\mu_k)} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

1.9. № 774

Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ u_t(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = U \sin(\omega t), & t > 0. \end{cases} \quad (1.9.1)$$

где ω и U – заданные константы.

Шаг 1. Избавляемся от неоднородности в краевом условии

Будем искать решение задачи (1.9.1) в виде

$$u(r, t) = v(r, t) + w(r, t), \quad (1.9.2)$$

где $w(r, t)$ – есть какое-либо решение задачи

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (r w_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |w(0, t)| < \infty, \quad w(R, t) = U \sin(\omega t), & t > 0. \end{cases} \quad (1.9.3)$$

Поскольку нам нужно какое угодно решение (1.9.3), естественно искать функцию w наиболее простого вида, например,

$$w(r, t) = b(r)\eta(t).$$

(w в виде суммы многочлена от r и $\eta(t)$ в данном случае не годится, ибо из краевого условия сразу получится $\eta(t) = U \sin(\omega t)$, и уравнение не будет выполнено)

Для $w(r, t)$ искомого вида $b(r)\eta(t)$ выполнены соотношения

$$w_r = b'(r)\eta(t), \quad w_{tt} = b(r)\eta''(t), \quad \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r \equiv w_{rr} + \frac{1}{r}w_r = \left(b''(r) + \frac{b'(r)}{r}\right)\eta(t).$$

Чтобы выполнялось краевое условие $w(R, t) = U \sin(\omega t)$, достаточно взять

$$\eta(t) = U \sin(\omega t), \quad b(R) = 1,$$

а подставляя $w = Ub(r) \sin(\omega t)$ в уравнение $w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r$, получаем равенство

$$-Ub(r)\omega^2 \sin(\omega t) = a^2 \left(b''(r) + \frac{b'(r)}{r}\right) U \sin(\omega t).$$

То есть функция $b(r)$ должна быть решением задачи Коши

$$\begin{cases} b''(r) + \frac{b'(r)}{r} = -\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 b(r), \\ b(R) = 1. \end{cases} \quad (1.9.4)$$

Уравнение в этой задаче есть уравнение Бесселя из задачи Штурма–Лиувилля (1.1.17), стр. 4, где $\nu = 0$, $\lambda = \mu^2 = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Заметим, что (1.9.4) не есть в чистом виде задача Штурма–Лиувилля (1.1.17), поскольку здесь у нас краевое условие неоднородно. Это не позволит нам напрямую применить теорему 1.1.4. Однако воспользоваться её результатом мы можем, рассуждая следующим образом:

Предположим, мы знаем решение задачи (1.9.4). Это решение наверняка удовлетворяет с некоторыми $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ краевому условию $\tilde{\alpha}b(R) + \tilde{\beta}b'(R) = 0$ и, соответственно, всей задаче Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} -(rb')' = \lambda rb, & \lambda = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2; \\ |b(+0)| < \infty; \\ \tilde{\alpha}b(R) + \tilde{\beta}b'(R) = 0, & \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \geq 0, \quad \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} > 0. \end{cases} \quad (1.9.5)$$

Поэтому функция $b(r)$, уже по теореме 1.1.4, имеет вид

$$b(r) = c \cdot J_0\left(\sqrt{\lambda}r\right) = c \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right).$$

Константа c , на которую мы умножили $J_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)$, не мешает выполнению (1.13.7), зато с её помощью легко добиться выполнения краевого условия $b(R) = 1$. Действительно,

$$c \cdot J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) = 1 \quad \implies \quad c = \frac{1}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}.$$

Итак,

$$b(r) = \frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}$$

и, наконец,

$$w(r, t) = \frac{U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \sin(\omega t). \quad (1.9.6)$$

Такая функция $w(r, t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ w(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ w_t(r, 0) = \frac{\omega U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}, & 0 \leq r < R; \\ |w(0, t)| < \infty, \quad w(R, t) = U \sin(\omega t), & t > 0. \end{cases} \quad (1.9.7)$$

Вычтем из задачи (1.9.1) задачу (1.9.7). Получим, что функция $v(r, t) = u(r, t) - w(r, t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ v_t(r, 0) = -\frac{\omega U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}, & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.9.8)$$

Шаг 2. Решение задачи (1.9.8)

Эта задача есть частный случай задачи № 769. Воспользуемся результатом:

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \left(\frac{R\psi_k}{a\mu_k} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) + \varphi_k \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) \right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а φ_k и ψ_k задаются формулой

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \quad \psi_k = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$$

Поскольку начальное отклонение $\varphi(r) \equiv 0$, все коэффициенты

$$\varphi_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нам остаётся только посчитать ψ_k для функции начальной скорости

$$\psi = -\frac{\omega U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}.$$

Поскольку интеграл

$$\int_0^R r J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$$

есть интеграл Ломмеля (1.1.13) – (1.1.14):

$$\begin{aligned} \int_0^x t J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t) dt &= \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha J_{\nu+1}(\alpha x) J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x)), \quad \alpha \neq \beta, \\ \int_0^x t (J_\nu(\alpha t))^2 dt &= \frac{x^2}{2} (\alpha J'_\nu(\alpha x))^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2} \right) (J_\nu(\alpha x))^2, \quad \nu > -1, \end{aligned}$$

имеем два случая:

Случай отсутствия резонанса, $\frac{\omega}{a} \neq \frac{\mu_k}{R}$ ни при каких $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \psi_k &= \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = - \frac{2\omega U}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2 J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\
 &= - \frac{2\omega U}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2 J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cdot \frac{a^2 R^3}{R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2} \cdot \left(\frac{\omega}{a} J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right) \underbrace{J_0(\mu_k)}_{=0} - \frac{\mu_k}{R} J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) J_1(\mu_k) \right) = \\
 &= \frac{2a^2 \omega U}{J_1(\mu_k)} \cdot \frac{\mu_k}{R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{R\psi_k}{a\mu_k} = \frac{2a\omega U R}{J_1(\mu_k) \cdot (R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2)}$$

и для функции $v(r, t)$ имеем представление:

$$v(r; t) = 2a\omega U R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{J_1(\mu_k) \cdot (R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k a t}{R}\right), \quad (1.9.9)$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Случай резонанса, $\exists m \in \mathbb{N} : \frac{\omega}{a} = \frac{\mu_m}{R}$.

В силу ортогональности функций $J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$ и $J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \equiv J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right)$ на промежутке $(0, R)$ при $k \neq m$,

$$\psi_k = 0 \quad k \neq m,$$

а при $k = m$ получаем

$$\begin{aligned}
 \psi_m &= \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_m)]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right) dr = \\
 &= \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_m)]^2} \cdot \left(\frac{R^2}{2} \left(\frac{\mu_m}{R} \underbrace{J_0'(\mu_m)}_{=-J_1(\mu_m)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(R^2 - \frac{0^2 \cdot R^2}{\mu_m^2} \right) \underbrace{(J_0(\mu_m))^2}_{=0} \right) = \frac{\mu_m^2}{R^2}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{R\psi_k}{a\mu_k} = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq m; \\ \frac{\mu_m}{aR}, & \text{при } k = m \end{cases}$$

и для функции $v(r, t)$ имеем представление:

$$\begin{aligned}
 v(r; t) &= \frac{\mu_m}{aR} \cdot J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right) \cdot \sin\left(\frac{\mu_m a t}{R}\right) = \\
 &= \left[\text{в силу равенства } \frac{\mu_m}{R} = \frac{\omega}{a} \right] = \frac{\omega}{a^2} \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cdot \sin(\omega t). \quad (1.9.10)
 \end{aligned}$$

Наконец, для решения

$$u(r, t) = v(r, t) + w(r, t) = v(r, t) + \frac{U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \sin(\omega t)$$

исходной задачи (1.9.1) получаем

Ответ: В случае отсутствия резонанса, то есть если $\frac{\omega}{a} \neq \frac{\mu_k}{R}$ ни при каких $k \in \mathbb{N}$,

$$u(r; t) = \frac{U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \sin(\omega t) + 2a\omega U R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{J_1(\mu_k) \cdot (R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k a t}{R}\right).$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

В случае резонанса, то есть если $\exists m \in \mathbb{N} : \frac{\omega}{a} = \frac{\mu_m}{R}$

$$u(r; t) = \frac{U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \sin(\omega t) + \frac{\omega}{a^2} \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cdot \sin(\omega t) = \left(\frac{U}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} + \frac{\omega}{a^2} \right) \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cdot \sin(\omega t).$$

1.10. № 775

Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ u_t(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) = U \cos(\omega t), & t > 0. \end{cases} \quad (1.10.1)$$

где ω и U – заданные константы.

Шаг 1. Избавляемся от неоднородности в краевом условии

Будем искать решение задачи (1.10.1) в виде

$$u(r, t) = v(r, t) + w(r, t), \quad (1.10.2)$$

где $w(r, t)$ – есть какое-либо решение задачи

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (r w_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |w(0, t)| < \infty, \quad w_r(R, t) = U \cos(\omega t), & t > 0. \end{cases} \quad (1.10.3)$$

Поскольку нам нужно какое угодно решение (1.10.3), естественно искать функцию w наиболее простого вида, например,

$$w(r, t) = b(r) \eta(t).$$

Для $w(r, t)$ искомого вида выполнены соотношения

$$w_r = b'(r) \eta(t), \quad w_{tt} = b(r) \eta''(t), \quad \frac{1}{r} \cdot (r w_r)_r \equiv w_{rr} + \frac{1}{r} w_r = \left(b''(r) + \frac{b'(r)}{r} \right) \eta(t).$$

Чтобы выполнялось краевое условие $w_r(R, t) = U \cos(\omega t)$, достаточно взять

$$\eta(t) = U \cos(\omega t), \quad b'(R) = 1,$$

а подставляя $w = U b(r) \cos(\omega t)$ в уравнение $w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (r w_r)_r$, получаем равенство

$$-U b(r) \omega^2 \cos(\omega t) = a^2 \left(b''(r) + \frac{b'(r)}{r} \right) U \cos(\omega t).$$

То есть функция $b(r)$ должна быть решением задачи Коши

$$\begin{cases} b''(r) + \frac{b'(r)}{r} = -\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 b(r), \\ b'(R) = 1. \end{cases} \quad (1.10.4)$$

Уравнение в этой задаче есть уравнение Бесселя из задачи Штурма–Лиувилля (1.1.17), стр. 4, где $\nu = 0$, $\lambda = \mu^2 = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Заметим, что (1.10.4) не есть в чистом виде задача Штурма–Лиувилля (1.1.17), поскольку здесь у нас краевое условие неоднородно. Это не позволит нам напрямую применить теорему 1.1.4. Однако воспользоваться её результатом мы можем, рассуждая следующим образом:

Предположим, мы знаем решение задачи (1.10.4). Это решение наверняка удовлетворяет с некоторыми $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ краевому условию $\tilde{\alpha}b(R) + \tilde{\beta}b'(R) = 0$ и, соответственно, всей задаче Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} -(rb')' = \lambda rb, & \lambda = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2; \\ |b(+0)| < \infty; \\ \tilde{\alpha}b(R) + \tilde{\beta}b'(R) = 0, & \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \geq 0, \quad \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} > 0. \end{cases} \quad (1.10.5)$$

Поэтому функция $b(r)$, уже по теореме 1.1.4, имеет вид

$$b(r) = c_1 \cdot J_0\left(\sqrt{\lambda}r\right) = c_1 \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right).$$

Константа c_1 , на которую мы умножили $J_0\left(\sqrt{\lambda}r\right)$, не мешает выполнению (1.13.7), зато с её помощью легко добиться выполнения краевого условия $b'(R) = 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \left[J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \right]_r \Big|_{r=R} &= \left[(1.1.9) \text{ с } \nu = 0 \text{ и } (1.1.11) \text{ с } n = 1 \right] = -c_1 \frac{\omega}{a} J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right) = 1 \\ \Rightarrow \quad c_1 &= -\frac{a}{\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$b(r) = -\frac{a J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}$$

и, наконец,

$$w(r, t) = -\frac{aU J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cos(\omega t). \quad (1.10.6)$$

Построенная функция $w(r, t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ w(r, 0) = -\frac{aU J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}, & 0 \leq r < R; \\ w_t(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |w(0, t)| < \infty, \quad w(R, t) = U \sin(\omega t), & t > 0. \end{cases} \quad (1.10.7)$$

Вычтем из задачи (1.10.1) задачу (1.10.7). Получим, что функция $v(r, t) = u(r, t) - w(r, t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = \frac{aU J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}, & 0 \leq r < R; \\ v_t(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v_r(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.10.8)$$

Шаг 2. Решение задачи (1.10.8)

Эта задача аналогична задаче, решённой в № 773. Воспользуемся результатом шагов 2-1 – 2-4:

$$v(r, t) = \mathbf{T}_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t),$$

где функции $\mathbf{T}_k(t)$ есть решения задачи Коши (1.8.18):

$$\mathbf{T}_k(t) = \begin{cases} \psi_0 t + \varphi_0 & k = 0; \\ \frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \cdot \sin(\sqrt{\lambda_k} at) + \varphi_k \cos(\sqrt{\lambda_k} at), & k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

в которой $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$, числа φ_k и ψ_k задаются формулой (1.8.16):

$$\psi_0 = \psi_k = 0, \quad \varphi_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2 [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Здесь, как и в номере № 774, надо рассмотреть два случая:

Случай отсутствия резонанса, $\frac{\omega}{a} \neq \frac{\mu_k}{R}$ ни при каких $k \in \mathbb{N}$.

Найдём φ_0 .

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr = \frac{2aU}{R^2 \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \int_0^R r J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) dr = \left[x = \frac{\omega r}{a}\right] = \\ &= \frac{2a^3 U}{R^2 \omega^3 J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \int_0^{\frac{\omega R}{a}} x J_0(x) dx = \frac{2a^3 U}{R^2 \omega^3 J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \int_0^{\frac{\omega R}{a}} [x J_1(x)]' dx = \\ &= \frac{2a^3 U}{R^2 \omega^3 J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cdot \frac{\omega R}{a} \cdot J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right) = \frac{2a^2 U}{R \omega^2} \end{aligned}$$

Для вычисления φ_k нам снова надо вспомнить формулу (1.1.13), стр. 3, интеграла Ломмеля:

$$\int_0^x t J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t) dt = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha J_{\nu+1}(\alpha x) J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x)), \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{2}{R^2 [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2aU}{R^2 \omega [J_0(\mu_k)]^2 J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\ &= \left[\text{как интеграла Ломмеля}\right] = \\ &= \frac{2aU}{R^2 \omega [J_0(\mu_k)]^2 J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cdot \frac{a^2 R^3}{R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2} \cdot \left(\frac{\omega}{a} J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right) J_0(\mu_k) - \frac{\mu_k}{R} J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) \underbrace{J_1(\mu_k)}_{=0} \right) = \\ &= \frac{2a^2 U R}{J_0(\mu_k)} \cdot \frac{1}{R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{T}_k(t) = \begin{cases} \frac{2a^2 U}{R \omega^2}, & k = 0; \\ \frac{2a^2 U R}{J_0(\mu_k)} \cdot \frac{1}{R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2} \cdot \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right), & k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

и для функции $v(r, t)$ имеем представление:

$$v(r; t) = \frac{2a^2 U}{R \omega^2} + 2a^2 U R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2} \cdot \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{J_0(\mu_k)} \cdot \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right), \quad (1.10.9)$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

Случай резонанса, $\exists m \in \mathbb{N} : \frac{\omega}{a} = \frac{\mu_m}{R}$.

В силу ортогональности функций $J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$ и $J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \equiv J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right)$ на промежутке $(0, R)$ при $k \neq m$,

$$\varphi_k = 0 \quad k \neq m,$$

а при $k = m$ получаем

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \frac{2}{R^2 [J_0(\mu_m)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2 [J_0(\mu_m)]^2} \cdot \left(\frac{R^2}{2} \left(\frac{\mu_m}{R} \underbrace{J_0'(\mu_m)}_{\substack{=-J_1(\mu_m) \\ = 0}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(R^2 - \frac{0^2 \cdot R^2}{\mu_m^2} \right) (J_0(\mu_m))^2 \right) = 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi_k = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq m; \\ 1, & \text{при } k = m \end{cases}$$

и для функции $v(r, t)$ имеем представление:

$$v(r; t) = J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{\mu_m a t}{R}\right) = \left[\text{так как } \frac{\mu_m}{R} = \frac{\omega}{a} \right] = J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cdot \cos(\omega t). \quad (1.10.10)$$

Наконец, для решения

$$u(r, t) = v(r, t) + w(r, t) = v(r, t) - \frac{aU J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cos(\omega t)$$

исходной задачи (1.9.1) получаем

Ответ: В случае отсутствия резонанса, то есть если $\frac{\omega}{a} \neq \frac{\mu_k}{R}$ ни при каких $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u(r; t) &= -\frac{aU J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cos(\omega t) + \frac{2a^2 U}{R\omega^2} + \\ &\quad + 2a^2 U R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2} \cdot \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{J_0(\mu_k)} \cdot \cos\left(\frac{\mu_k a t}{R}\right), \end{aligned}$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

В случае резонанса, то есть если $\exists m \in \mathbb{N} : \frac{\omega}{a} = \frac{\mu_m}{R}$

$$u(r; t) = -\frac{aU J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cos(\omega t) + J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cdot \cos(\omega t) = \left(1 - \frac{aU}{\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \right) \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cdot \cos(\omega t).$$

1.11. № 776 а).

Определить поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса R , вызванные непрерывно распределённой по мембране поперечной силой плотности

$$q \sin(\omega t),$$

действующей с момента $t = 0$, если край мембраны закреплён жёстко.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{q}{\rho} \sin(\omega t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ u_t(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.11.1)$$

Эта задача – частный случай задачи № 770. Но мы не будем пользоваться её результатом, поскольку тогда нам пришлось бы вычислять интегралы

$$\int_0^t \sin(\omega \tau) \sin\left(\frac{\mu_k a(t - \tau)}{R}\right) d\tau,$$

в двух случаях – резонансном и не-резонансном, а затем суммировать ряды, иначе получить ответ в том виде, как в задачнике, не удастся.

Самый простой путь решить данную задачу, – это представить её решение в виде суммы

$$u(r, t) = w(t) + v_1(r, t) + v_2(r, t),$$

где

$$w(r, t) = -\frac{q}{\rho \omega^2} \sin(\omega t),$$

и функции $v_1(r, t)$ и $v_2(r, t)$ есть решения задач:

$$\begin{cases} w_{tt} = \frac{q}{\rho} \sin(\omega t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1.11.2)$$

$$\begin{cases} v_{1tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (r v_{1r})_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v_1(r, 0) = -w(0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ v_{1t}(r, 0) = -w_t(0) = \frac{q}{\rho \omega}, & 0 \leq r < R; \\ |v_1(0, t)| < \infty, \quad v_1(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.11.3)$$

$$\begin{cases} v_{2tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (r v_{2r})_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v_2(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ v_{2t}(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |v_2(0, t)| < \infty, \quad v_2(R, t) = -w(t) = \frac{q}{\rho \omega^2} \sin(\omega t), & t > 0. \end{cases} \quad (1.11.4)$$

Задача (1.11.3) есть частный случай задачи из № 769, а (1.11.4) – частный случай задачи из № 774 при $U = \frac{q}{\rho \omega^2}$. Выпишем результаты:

$$v_1(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \left(\frac{R \psi_k}{a \mu_k} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k a t}{R}\right) + \varphi_k \cos\left(\frac{\mu_k a t}{R}\right) \right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а φ_k и ψ_k задаются формулой

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \quad \psi_k = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$$

В случае отсутствия резонанса, то есть если $\frac{\omega}{a} \neq \frac{\mu_k}{R}$ ни при каких $k \in \mathbb{N}$,

$$v_2(r; t) = \frac{q J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\rho \omega^2 J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \sin(\omega t) + \frac{2aqR}{\rho \omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{J_1(\mu_k) \cdot (R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right).$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

В случае резонанса, то есть если $\exists m \in \mathbb{N} : \frac{\omega}{a} = \frac{\mu_m}{R}$

$$v_2(r; t) = \left(\frac{q}{\rho \omega^2 J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} + \frac{\omega}{a^2} \right) \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cdot \sin(\omega t).$$

Чтобы использовать формулу для $v_1(r, t)$, надо найти φ_k и ψ_k . Поскольку $\varphi(r) = -w(0) = 0$, а $\psi(r) = -w'(0) = \frac{q}{\rho \omega}$,

$$\varphi_k = 0, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2q}{\rho \omega R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\ &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R} \right] = \frac{2q}{\rho \omega [\mu_k J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^{\mu_k} x J_0(x) dx = \\ &= \left[\text{в силу (1.1.9) при } \nu = 0 \right] = \frac{2q}{\rho \omega [\mu_k J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^{\mu_k} [x J_1(x)]' dx = \\ &= \frac{2q}{\rho \omega [\mu_k J_1(\mu_k)]^2} \cdot x J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} = \frac{2q}{\rho \omega \mu_k J_1(\mu_k)} \end{aligned}$$

Поэтому

$$v_1(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \frac{R \psi_k}{a \mu_k} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) = \frac{2qR}{\rho \omega a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right)$$

Таким образом, для решения

$$u(r, t) = w(t) + v_1(r, t) + v_2(r, t)$$

исходной задачи (1.11.1) получаем

Ответ: В случае отсутствия резонанса, то есть если $\frac{\omega}{a} \neq \frac{\mu_k}{R}$ ни при каких $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u(r; t) &= -\frac{q}{\rho \omega^2} \sin(\omega t) + \frac{2qR}{\rho \omega a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) + \\ &+ \frac{q J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\rho \omega^2 J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \sin(\omega t) + \frac{2aqR}{\rho \omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{J_1(\mu_k) \cdot (R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) = \\ &= \frac{q}{\rho \omega^2} \sin(\omega t) \left[\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right] + \frac{2qR^3 \omega}{a \rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{J_1(\mu_k) \cdot \mu_k^2 \cdot (R^2 \omega^2 - a^2 \mu_k^2)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) \end{aligned}$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

В случае резонанса, то есть если $\exists m \in \mathbb{N} : \frac{\omega}{a} = \frac{\mu_m}{R}$

$$\begin{aligned} u(r; t) &= -\frac{q}{\rho\omega^2} \sin(\omega t) + \frac{2qR}{\rho\omega a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{q}{\rho\omega^2 J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} + \frac{\omega}{a^2} \right) \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cdot \sin(\omega t) = \\ &= \frac{q}{\rho\omega^2} \sin(\omega t) \left[\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} + \frac{\rho\omega^3}{qa^2} - 1 \right] + \frac{2qR}{\rho\omega a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right), \end{aligned}$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

1.12. № 776 Б).

Определить поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса R , вызванные непрерывно распределённой по мембране поперечной силой плотности

$$q \sin(\omega t),$$

действующей с момента $t = 0$, если край мембраны закреплён упруго.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{q}{\rho} \sin(\omega t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ u_t(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) + hu(R, t) = 0, & h > 0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (1.12.1)$$

Для полноты картины, приведём решение данной задачи, аналогичное № 770 из прошлого семинара.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.12.1) в виде

$$u(r; t) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.12.2)$$

и предположить, что для $f(r, t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r; t) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad (1.12.3)$$

то, подставив (1.12.3) и (1.12.3) в уравнение $u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f$, получим:

$$\sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k''(t) = a^2 \sum_{k=\dots}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k''(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}_k''(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \quad (1.12.4)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.12.5)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.12.1).

Условие $|u(0, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.12.6)$$

а условие $u_r(R, t) + hu(R, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k'(R) + h \mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.12.7)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r \mathbf{X}_k'(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k'(R) + h \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.12.8)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.12.8) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = h$, $\beta = 1$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.12.8) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2, & J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k - \text{ корни уравнения } & h R J_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.12.9)$$

Шаг 3. Разложение функции $f(r, t)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0(\mu_k r), \quad (1.12.10)$$

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{1}{\frac{1}{2} [J'_0(\mu_k)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2}\right)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} [J'_0(\mu_k)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2}\right)} \cdot \underbrace{J_0^2(\mu_k)}_{= \left[-\frac{h\mu_k}{R} J'_0(\mu_k)\right]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\ &= \frac{2}{(R^2 + h^2 \mu_k^2) \underbrace{[J'_0(\mu_k)]^2}_{= [-J_1(\mu_k)]^2}} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \end{aligned}$$

Итак,

$$f_k(t) = \frac{2}{(R^2 + h^2 \mu_k^2) [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \quad (1.12.11)$$

Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомый вид (1.12.3), стр. 39, подставить в начальные условия

$$u(r, 0) = 0, \quad u_t(r, 0) = 0,$$

получим, что эти начальные условия будут заведомо выполнены, если все слагаемые рядов в левых частях окажутся равны нулю, то есть будут выполнены соотношения

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(0) = 0, \\ \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(0) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = 0, \quad \mathbf{T}'_k(0) = 0.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.12.4), стр. 40, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}''_k(t) + \frac{a^2 [\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = 0, \\ \mathbf{T}'_k(0) = 0. \end{cases} \quad (1.12.12)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}''(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = c_1 \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right).$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ образуют ФСР линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

то общее решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

имеет вид

$$y_{\text{oHo}} = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \dots + c_n(x)y_n,$$

где функции $c_1(x)$, $c_2(x)$, $\dots$, $c_n(x)$ находятся из системы

$$\left\{ \begin{array}{l} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \dots + c'_n y_n = 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + \dots + c'_n y'_n = 0 \\ \vdots \\ c'_1 y_1^{n-2} + c'_2 y_2^{n-2} + \dots + c'_n y_n^{n-2} = 0 \\ c'_1 y_1^{n-1} + c'_2 y_2^{n-1} + \dots + c'_n y_n^{n-1} = f(x). \end{array} \right.$$

В нашем случае ФСР образуется парой функций $\left\{ \sin \left(\frac{\mu_k at}{R} \right), \cos \left(\frac{\mu_k at}{R} \right) \right\}$, порядок уравнения $n = 2$, и в системе будет всего 2 уравнения:

$$\begin{cases} c_1' \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) + c_2' \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) = 0 \\ \frac{a\mu_k}{R} \left(c_1' \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) - c_2' \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) \right) = f_k(t). \end{cases}$$

Решив эту систему линейных алгебраических уравнений, например, по правилу Крамера, получим:

$$\begin{cases} c_1'(t) = \frac{f_k(t)R \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right)}{a\mu_k}, \\ c_2'(t) = -\frac{f_k(t)R \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right)}{a\mu_k}. \end{cases}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k(t) &= \frac{R}{a\mu_k} \cdot \left(\sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) \int_0^t f_k(\tau) \cos\left(\frac{\mu_k a\tau}{R}\right) d\tau - \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) \int_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k a\tau}{R}\right) d\tau \right) + \\ &\quad + \tilde{c}_1 \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) + \tilde{c}_2 \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) = \\ &= \frac{R}{a\mu_k} \cdot \int_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R}\right) d\tau + \tilde{c}_1 \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) + \tilde{c}_2 \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right). \quad (1.12.13) \end{aligned}$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = 0$ получаем, что

$$\tilde{c}_2 = 0,$$

а из начального условия $\mathbf{T}'_k(0) = 0$ получаем, что

$$\tilde{c}_1 = 0.$$

Таким образом, решение задачи (1.12.12) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \frac{R}{a\mu_k} \cdot \int_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R}\right) d\tau,$$

где $f_k(t)$ задаются формулой (1.12.11):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$$

Промежуточный ответ:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cdot \frac{R}{a\mu_k} \cdot \int_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R}\right) d\tau,$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hRJ_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ задаются формулой

$$f_k(t) = \frac{2}{(R^2 + h^2\mu_k^2) [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Чтобы получить окончательный ответ, надо найти интегралы

$$\int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \quad \text{и} \quad \int_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R}\right) d\tau.$$

С учётом вида $f(r, t) = \frac{q}{\rho} \sin(\omega t)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \frac{q}{\rho} \sin(\omega t) \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \\ &= \frac{qR^2}{\rho\mu_k^2} \sin(\omega t) \int_0^{\mu_k} x J_0(x) dx = \left[\text{по формуле (1.1.9) при } \nu = 0\right] = \\ &= \frac{qR^2}{\rho\mu_k^2} \sin(\omega t) \int_0^{\mu_k} [x J_1(x)]' dx = \frac{qR^2}{\rho\mu_k^2} \sin(\omega t) \cdot \mu_k J_1(\mu_k) = \frac{qR^2}{\rho\mu_k} J_1(\mu_k) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f_k(t) = \frac{2qR^2}{(R^2 + h^2\mu_k^2) \rho\mu_k [J_1(\mu_k)]^2} \cdot J_1(\mu_k) \sin(\omega t) \quad (1.12.14)$$

и мы теперь можем найти интегралы

$$\int_0^t f_k(\tau) \sin \left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R} \right) d\tau = \underbrace{\frac{2qR^2}{(R^2 + h^2\mu_k^2) \rho \mu_k J_1(\mu_k)}}_{=c_k = const} \cdot \int_0^t \sin(\omega\tau) \sin \left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R} \right) d\tau.$$

Случай отсутствия резонанса, то есть $\mu_k a \neq R\omega$ ни при каких $k \in \mathbb{N}$.

Простейший способ в данном случае связан с операционным исчислением. Нам понадобится свойство преобразования Лапласа:

Если $f_1 \doteq F_1(p)$ и $f_2 \doteq F_2(p)$, то

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \doteq F_1(p) \cdot F_2(p),$$

а также известное соотношение

$$\sin at \doteq \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} a|.$$

Обозначим

$$\alpha = \omega, \quad \beta = \frac{\mu_k a}{R}$$

и искомый интеграл примет вид:

$$\begin{aligned} \int_0^t f_k(\tau) \sin \left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R} \right) d\tau &= c_k \int_0^t \sin(\alpha\tau) \sin(\beta(t-\tau)) d\tau = \\ &= c_k \sin(\alpha t) * \sin(\beta t) \doteq c_k \cdot \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \cdot \frac{\beta}{p^2 + \beta^2} = \left[\text{так как } \alpha \neq \beta \right] = \\ &= \frac{c_k \alpha^2 \beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left(\frac{1}{p^2 + \alpha^2} - \frac{1}{p^2 + \beta^2} \right) = \frac{c_k \alpha \beta}{\beta^2 - \alpha^2} \left(\beta \cdot \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} - \alpha \cdot \frac{\beta}{p^2 + \beta^2} \right) \doteq \\ &\doteq \frac{c_k \alpha \beta}{\beta^2 - \alpha^2} (\beta \sin(\alpha t) - \alpha \sin(\beta t)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^t f_k(\tau) \sin \left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R} \right) d\tau = \frac{2aqR^3\omega}{\rho J_1(\mu_k) (R^2 + h^2\mu_k^2) (a^2\mu_k^2 - R^2\omega^2)} \cdot \left(\frac{\mu_k a}{R} \sin(\omega t) - \omega \sin \left(\frac{\mu_k a t}{R} \right) \right).$$

Случай резонанса, то есть $\exists m \in \mathbb{N} : \mu_m a = R\omega$.

В этом случае интеграл проще брать обычным образом:

$$\begin{aligned} \int_0^t f_k(\tau) \sin \left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R} \right) d\tau &= c_k \int_0^t \sin(\omega\tau) \sin(\omega(t-\tau)) d\tau = \\ &= \frac{c_k}{2} \int_0^t (\cos(\omega(2\tau - t)) - \cos(\omega t)) d\tau = \frac{c_k}{4\omega} \cdot \sin(\omega(2\tau - t)) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - c_k \cdot \frac{t}{2} \cos(\omega t) = \\ &= c_k \left(\frac{\sin(\omega t)}{4\omega} - \frac{t}{2} \cos(\omega t) \right) \end{aligned}$$

Наконец, в силу формулы из промежуточного ответа

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cdot \frac{R}{a\mu_k} \cdot \int_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R}\right) d\tau,$$

получаем:

Ответ: (В задачнике ответ неверный)

Случай отсутствия резонанса, то есть $\mu_k a \neq R\omega$ ни при каких $k \in \mathbb{N}$.

$$u(r; t) = \frac{2aqR^3\omega}{\rho} \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(\mu_k)(R^2 + h^2\mu_k^2)(a^2\mu_k^2 - R^2\omega^2)} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) - \\ - \frac{2qR^4\omega^2}{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_1(\mu_k)(R^2 + h^2\mu_k^2)(a^2\mu_k^2 - R^2\omega^2)} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hRJ_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0$.

Случай резонанса, то есть $\exists m \in \mathbb{N} : \mu_m a = R\omega$.

$$u(r; t) = \frac{2qR^3}{a\rho\mu_m^2 J_1(\mu_m)(R^2 + h^2\mu_m^2)} \left(\frac{\sin(\omega t)}{4\omega} - \frac{t}{2} \cos(\omega t) \right) = \left[\mu_m = \frac{R\omega}{a} \right] = \\ = \frac{2qa^3}{\rho R^4 \omega^2 J_1\left(\frac{R\omega}{a}\right)(a^2 + h^2\omega^2)} \left(\frac{\sin(\omega t)}{4\omega} - \frac{t}{2} \cos(\omega t) \right).$$

1.13. № 776 б). Способ, позволяющий найти явное представление вынужденных колебаний.

Найти функцию $u(x, y; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{q}{\rho} \sin(\omega t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ u_t(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) + hu(R, t) = 0, & h > 0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (1.13.1)$$

Шаг 1. Представление решения в виде суммы вынужденных и свободных колебаний

Представим решение $u(r, t)$ данной задачи в виде суммы

$$u(r, t) = w(r, t) + v(r, t), \quad (1.13.2)$$

где функция

$$w(t) = b(r) \sin(\omega t),$$

описывающая вынужденные колебания, и функция $v(r, t)$, соответствующая свободным колебаниям, есть решения задач:

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r + \frac{q}{\rho} \sin(\omega t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |w(0, t)| < \infty, \quad w_r(R, t) + hw(R, t) = 0, & h > 0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (1.13.3)$$

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = -w(r, 0), & 0 \leq r < R; \\ v_t(r, 0) = -w_t(r, 0), & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v_r(R, t) + hv(R, t) = 0, & h > 0 \quad t > 0. \end{cases} \quad (1.13.4)$$

Шаг 2. Решения задачи для $w(r, t)$

Для $w(r, t)$ искомого вида $b(r) \sin(\omega t)$ выполнены соотношения

$$w_r = b'(r) \sin(\omega t), \quad w_{tt} = -\omega^2 b(r) \sin(\omega t), \quad \frac{1}{r} \cdot (r w_r)_r \equiv w_{rr} + \frac{1}{r} w_r = \left(b''(r) + \frac{b'(r)}{r} \right) \sin(\omega t).$$

Подставляя $w = b(r) \sin(\omega t)$ в уравнение $w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (r w_r)_r + \frac{q}{\rho} \sin(\omega t)$, получаем равенство

$$-b(r) \omega^2 \sin(\omega t) = a^2 \left(b''(r) + \frac{b'(r)}{r} \right) \sin(\omega t) + \frac{q}{\rho} \sin(\omega t).$$

То есть функция $b(r)$ должна быть решением задачи Коши

$$\begin{cases} b''(r) + \frac{b'(r)}{r} = -\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 b(r) - \frac{q}{a^2 \rho}, \\ b'(R) + h b(R) = 0. \end{cases} \quad (1.13.5)$$

Уравнение в этой задаче есть неоднородное уравнение Бесселя. Чтобы свести его к однородному, достаточно найти какое-либо его частное решение. В данном случае его легко найти в виде константы:

$$b_{\text{чНо}} = -\frac{q}{\omega^2 \rho}$$

Поэтому искомая функция имеет вид

$$b(r) = -\frac{q}{\omega^2 \rho} + g(r),$$

где $g(r)$ есть какое-либо решение задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} g''(r) + \frac{g'(r)}{r} = -\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 g(r), \\ g'(R) + h g(R) = \frac{qh}{\omega^2 \rho}. \end{cases} \quad (1.13.6)$$

с неоднородным краевым условием.

Уравнение в этой задаче есть уравнение Бесселя из задачи Штурма–Лиувилля (1.1.17), стр. 4, где $\nu = 0$, $\lambda = \mu^2 = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2$, $\alpha = h$, $\beta = 1$. Заметим, что (1.9.4) не есть в чистом виде задача Штурма–Лиувилля (1.1.17), поскольку здесь у нас краевое условие неоднородно. Это не позволит нам напрямую применить теорему 1.1.4. Однако воспользоваться её результатом мы можем, рассуждая следующим образом:

Предположим, мы знаем решение задачи (1.9.4). Это решение наверняка удовлетворяет с некоторыми $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ краевому условию $\tilde{\alpha} g(R) + \tilde{\beta} g'(R) = 0$ и, соответственно, всей задаче Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} -(r g')' = \lambda r g, & \lambda = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2; \\ |g(+0)| < \infty; \\ \tilde{\alpha} g(R) + \tilde{\beta} g'(R) = 0, & \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \geq 0, \quad \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} > 0. \end{cases} \quad (1.13.7)$$

Поэтому функция $g(r)$, уже по теореме 1.1.4, имеет вид

$$g(r) = c \cdot J_0(\sqrt{\lambda} r) = c \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right).$$

Константа c , на которую мы умножили $J_0(\sqrt{\lambda} r)$, не мешает выполнению (1.13.7), зато с её помощью легко добиться выполнения краевого условия $g'(R) + h g(R) = \frac{qh}{\omega^2 \rho}$. Действительно,

$$c \cdot \left(\underbrace{\frac{\omega}{a} J_0'\left(\frac{\omega R}{a}\right)}_{=-J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} + h J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) \right) = \frac{qh}{\omega^2 \rho} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{aqh}{\omega^2 \rho} \cdot \frac{1}{ah J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}.$$

Итак,

$$g(r) = \frac{aqh}{\omega^2 \rho} \cdot \frac{1}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right),$$

следовательно,

$$b(r) = -\frac{q}{\omega^2 \rho} + \frac{aqh}{\omega^2 \rho} \cdot \frac{1}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) = \frac{q}{\omega^2 \rho} \left[\frac{ahJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right]$$

и, наконец, $w(r, t) = b(r) \sin(\omega t)$ примет вид

$$w(r, t) = \frac{q}{\omega^2 \rho} \left[\frac{ahJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right] \sin(\omega t). \quad (1.13.8)$$

Такая функция $w(r, t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ w(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ w_t(r, 0) = \frac{q}{\omega \rho} \left[\frac{ahJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right], & 0 \leq r < R; \\ |w(0, t)| < \infty, \quad w_r(R, t) + hw(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.13.9)$$

Шаг 3. Решение задачи для $v(r, t)$

Шаг 3-1. Решение в общем виде

Решим в общем виде задачу

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ v_t(r, 0) = \psi(r), & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v_r(R, t) + hv(R, t) = 0, & h > 0 \quad t > 0. \end{cases} \quad (1.13.10)$$

Шаг 3-1-1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.13.10) в виде

$$v(r; t) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.13.11)$$

и предположить, что для $f(r, t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r; t) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad (1.13.12)$$

то, подставив (1.13.11) и (1.13.12) в уравнение $v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k''(t) = a^2 \sum_{k=\dots}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k''(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}_k''(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \quad (1.13.13)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.13.14)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.13.10).

Условие $|v(0, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.13.15)$$

а условие $v_r(R, t) + hv(R, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k'(R) + h \mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.13.16)$$

Шаг 3-1-2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r \mathbf{X}_k'(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k'(R) + h \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.13.17)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.13.17) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = h$, $\beta = 1$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.13.17) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2, & J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k - \text{ корни уравнения } & h R J_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.13.18)$$

Шаг 3-1-3. Разложение функций $f(r, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0(\mu_k r), \quad (1.13.19)$$

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{1}{\frac{1}{2} \underbrace{[J'_0(\mu_k)]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2}\right) J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \end{aligned}$$

Итак,

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \quad (1.13.20)$$

Аналогично, для функций $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ справедливы разложения в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0(\mu_k r) \quad \psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0(\mu_k r) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.13.21)$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \quad (1.13.22)$$

$$\psi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \quad (1.13.23)$$

Шаг 3-1-4. Составление и решение задачи для $T_k(t)$

Если искомый вид (1.13.11), стр. 47, решения $v(r, t)$ и разложения (1.13.21) функций $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ подставить в начальные условия

$$v(r, 0) = \varphi(r), \quad v_t(r, 0) = \psi(r)$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k \mathbf{X}_k(r), \quad \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}'_k(0) = \psi_k \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k, \quad \mathbf{T}'_k(0) = \psi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.13.13), стр. 48, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_k''(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k, \\ \mathbf{T}_k'(0) = \psi_k. \end{cases} \quad (1.13.24)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = ce^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ образуют ФСР линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

то общее решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

имеет вид

$$y_{\text{oHo}} = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \dots + c_n(x)y_n,$$

где функции $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ находятся из системы

$$\left\{ \begin{array}{l} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \dots + c'_n y_n = 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + \dots + c'_n y'_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ c'_1 y_1^{n-2} + c'_2 y_2^{n-2} + \dots + c'_n y_n^{n-2} = 0 \\ c'_1 y_1^{n-1} + c'_2 y_2^{n-1} + \dots + c'_n y_n^{n-1} = f(x). \end{array} \right.$$

В нашем случае ФСР образуется парой функций $\left\{ \sin \left(\frac{\mu_k at}{R} \right), \cos \left(\frac{\mu_k at}{R} \right) \right\}$, порядок уравнения $n = 2$, и в системе будет всего 2 уравнения:

$$\begin{cases} c_1' \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) + c_2' \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) = 0 \\ \frac{a\mu_k}{R} \left(c_1' \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) - c_2' \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right)\right) = f_k(t). \end{cases}$$

Решив эту систему линейных алгебраических уравнений, например, по правилу Крамера, получим:

$$\begin{cases} c_1'(t) = \frac{f_k(t)R \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right)}{a\mu_k}, \\ c_2'(t) = -\frac{f_k(t)R \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right)}{a\mu_k}. \end{cases}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k(t) &= \frac{R}{a\mu_k} \cdot \left(\sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) \int_0^t f_k(\tau) \cos\left(\frac{\mu_k a\tau}{R}\right) d\tau - \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) \int_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k a\tau}{R}\right) d\tau \right) + \\ &\quad + \tilde{c}_1 \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) + \tilde{c}_2 \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) = \\ &= \frac{R}{a\mu_k} \cdot \int_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R}\right) d\tau + \tilde{c}_1 \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) + \tilde{c}_2 \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right). \end{aligned} \quad (1.13.25)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k$ получаем, что

$$\tilde{c}_2 = \varphi_k,$$

а из начального условия $\mathbf{T}'_k(0) = \psi_k$ получаем, что

$$\tilde{c}_1 = \frac{R}{a\mu_k} \psi_k.$$

Таким образом, решение задачи (1.13.24) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \frac{R}{a\mu_k} \cdot \int_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R}\right) d\tau + \frac{R\psi_k}{a\mu_k} \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) + \varphi_k \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right). \quad (1.13.26)$$

где $f_k(t)$, φ_k и ψ_k задаются формулами (1.13.20), (1.13.22) и (1.13.23):

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \\ \varphi_k &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \\ \psi_k &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \end{aligned}$$

Ответ в общем виде:

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{a\mu_k} \cdot \int_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k a(t-\tau)}{R}\right) d\tau + \frac{R\psi_k}{a\mu_k} \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) + \varphi_k \cos\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hRJ_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$, φ_k и ψ_k задаются формулами:

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \\ \varphi_k &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \\ \psi_k &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \end{aligned}$$

Шаг 3-2. Вычисление решения с данными $f(r, t)$, $\varphi(r)$ и $\psi(r)$

Поскольку в задаче (1.13.4) $f(r, t) \equiv 0$ и $\varphi(r) = -w(r, 0) \equiv 0$, то

$$f_k(t) = 0, \quad \varphi_k = 0.$$

Найдём ψ_k для функции $\psi(r) = -w_t(r, 0) = -\frac{q}{\omega\rho} \left[\frac{ahJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right]$:

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\ &= -\frac{ahq}{\omega\rho} \cdot \frac{1}{([J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2) (ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right))} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr - \\ &\quad - \frac{q}{\omega\rho} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \end{aligned}$$

Последний интеграл находится стандартным образом:

$$\int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{R^2}{\mu_k^2} \int_0^{\mu_k} [x J_1(x)]' dx = \frac{R^2 J_1(\mu_k)}{\mu_k}.$$

А для интеграла $\int_0^R r J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$ придётся рассмотреть два случая:

Случай без резонанса ($a\mu_k \neq \omega R$ ни при каких $k \in \mathbb{N}$)

По формуле для интегралов Ломмеля (1.1.13)

$$\int_0^x t J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t) dt = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha J_{\nu+1}(\alpha x) J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x)), \quad \alpha \neq \beta$$

получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \frac{aR^2}{\omega^2 R^2 - \mu_k^2 a^2} \left[\omega R J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right) J_0(\mu_k) - \mu_k a J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) J_1(\mu_k) \right] = \\ &= \left[\text{в силу равенства } hR J_0(\mu_k) = \mu_k J_1(\mu_k) \right] = \\ &= \frac{aR^3}{\omega^2 R^2 - \mu_k^2 a^2} \left[\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right) - ah J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) \right] J_0(\mu_k). \end{aligned}$$

Тогда для ψ_k верна формула

$$\begin{aligned} \psi_k &= -\frac{ahq}{\omega\rho} \cdot \frac{aR^3}{([J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2) (ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)) (\omega^2 R^2 - \mu_k^2 a^2)} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right) - ah J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) \right] J_0(\mu_k) - \frac{q}{\omega\rho} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{R^2 J_1(\mu_k)}{\mu_k} = \\ &= \frac{R^2 q}{\omega\rho} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \left[\frac{a^2 h R J_0(\mu_k)}{\omega^2 R^2 - \mu_k^2 a^2} - \frac{J_1(\mu_k)}{\mu_k} \right] \end{aligned}$$

Упростим это выражение, вновь пользуясь тем, что μ_k – корни уравнения $\mu J'_0(\mu) + hR J_0(\mu) = 0$, откуда следует, что

$$\mu_k J_1(\mu_k) \equiv -\mu_k J'_0(\mu_k) = hR J_0(\mu_k),$$

и, поэтому,

$$[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2 = \left(\frac{h^2 R^2}{\mu_k^2} + 1 \right) J_0^2(\mu_k) = (h^2 R^2 + \mu_k^2) \frac{J_0^2(\mu_k)}{\mu_k^2}$$

Таким образом, ψ_k имеет представление:

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{R^2 q}{\omega \rho} \cdot \frac{\mu_k^2}{(h^2 R^2 + \mu_k^2) J_0^2(\mu_k)} \cdot \left[\frac{a^2 \overbrace{hR J_0(\mu_k)}^{=\mu_k J_1(\mu_k)}}{\omega^2 R^2 - \mu_k^2 a^2} - \frac{J_1(\mu_k)}{\mu_k} \right] = \\ &= \frac{R^2 q}{\omega \rho} \cdot \frac{\mu_k^2 J_1(\mu_k)}{(h^2 R^2 + \mu_k^2) J_0^2(\mu_k)} \cdot \left[\frac{a^2 \mu_k}{\omega^2 R^2 - \mu_k^2 a^2} - \frac{1}{\mu_k} \right] \end{aligned}$$

Итак, функция $v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R \psi_k}{a \mu_k} \sin\left(\frac{\mu_k a t}{R}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$ принимает вид:

$$v(r; t) = \frac{R^3 q}{a \omega \rho} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 J_1(\mu_k)}{(h^2 R^2 + \mu_k^2) J_0^2(\mu_k)} \cdot \left[\frac{a^2 \mu_k}{\omega^2 R^2 - \mu_k^2 a^2} - \frac{1}{\mu_k} \right] \sin\left(\frac{\mu_k a t}{R}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \quad (1.13.27)$$

Случай резонанса ($\exists m \in \mathbb{N} : a \mu_m = \omega R$)

По формуле для интегралов Ломмеля (1.1.14)

$$\int_0^x t (J_\nu(\alpha t))^2 dt = \frac{x^2}{2} (\alpha J'_\nu(\alpha x))^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2} \right) (J_\nu(\alpha x))^2, \quad \nu > -1.$$

получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right) dr &= \int_0^R r J_0^2\left(\frac{\mu_m r}{R}\right) dr = \\ &= \frac{1}{2} (\mu_m J'_0(\mu_m))^2 + \frac{1}{2} \left(R^2 - \frac{0^2}{\alpha^2} \right) (J_0(\mu_m))^2 = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\mu_m J_1(\mu_m)}_{=hR J_0(\mu_m)} \right)^2 + \frac{R^2}{2} J_0^2(\mu_m) = \\ &= \frac{R^2}{2} (h^2 + 1) J_0^2(\mu_m). \end{aligned}$$

Тогда для ψ_k верна формула

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\ &= \begin{cases} -\frac{ahq}{\omega \rho} \cdot \frac{(h^2+1) J_0^2(\mu_m)}{[J_1(\mu_m)]^2 + [J_0(\mu_m)]^2} - \frac{q}{\omega \rho} \cdot \frac{R^2 J_1(\mu_m)}{\mu_m ([J_1(\mu_m)]^2 + [J_0(\mu_m)]^2)}, & k = m; \\ 0, & k \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

или, поскольку с учётом равенств $[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2 = (h^2 R^2 + \mu_k^2) \frac{J_0^2(\mu_k)}{\mu_k^2}$ и $\mu_k J_1(\mu_k) = h R J_0(\mu_k)$,

$$\begin{aligned} & - \frac{ahq}{\omega\rho} \cdot \frac{(h^2 + 1) J_0^2(\mu_m)}{[J_1(\mu_m)]^2 + [J_0(\mu_m)]^2} - \frac{q}{\omega\rho} \cdot \frac{R^2 J_1(\mu_m)}{\mu_m ([J_1(\mu_m)]^2 + [J_0(\mu_m)]^2)} = \\ & = - \frac{q}{\omega\rho} \cdot \frac{ah(h^2 + 1) \mu_m^2 J_0^2(\mu_m) + \overbrace{R^2 \mu_m J_1(\mu_m)}^{=hR J_0(\mu_m)}}{(h^2 R^2 + \mu_m^2) J_0^2(\mu_m)} = - \frac{hq}{\omega\rho} \cdot \frac{a(h^2 + 1) \mu_m^2 J_0(\mu_m) + R^3}{(h^2 R^2 + \mu_m^2) J_0(\mu_m)}, \end{aligned}$$

то для ψ_k окончательно получаем:

$$\psi_k = \begin{cases} - \frac{hq}{\omega\rho} \cdot \frac{a(h^2 + 1) \mu_m^2 J_0(\mu_m) + R^3}{(h^2 R^2 + \mu_m^2) J_0(\mu_m)}, & k = m; \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

и $v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R\psi_k}{a\mu_k} \sin\left(\frac{\mu_k at}{R}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$ принимает вид:

$$v(r; t) = - \frac{hqR}{a\omega\rho} \cdot \frac{a(h^2 + 1) \mu_m^2 J_0(\mu_m) + R^3}{\mu_m (h^2 R^2 + \mu_m^2) J_0(\mu_m)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_m at}{R}\right) \cdot J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right). \quad (1.13.28)$$

Наконец, для решения

$$u(r, t) = w(t) + v(r, t)$$

исходной задачи (1.13.1) в силу (1.13.2) и (1.13.8) получаем

Ответ:

$$u(r; t) = \frac{a^2 q}{\omega^2 \rho} \left[\frac{ah J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{ah J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right] \sin(\omega t) + v(r, t),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu) + h R J_0(\mu) = 0$, а функция $v(r, t)$ задаётся формулой (1.13.27) в случае без резонанса и формулой (1.13.28) в случае резонанса.

1.14. № 777 а)

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) + hu(R, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.14.1)$$

при $f(r, t) \equiv 0$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.14.1) в виде

$$u(r; t) = \sum_{k=...}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.14.2)$$

и предположить, что для $f(r, t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r; t) = \sum_{k=...}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad (1.14.3)$$

то, подставив (1.14.2) и (1.14.3) в уравнение $u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = a^2 \sum_{k=\dots}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}'_k(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \quad (1.14.4)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.14.5)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.14.1).

Условие $|u(0, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.14.6)$$

а условие $u_r(R, t) + hu(R, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}'_k(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.14.7)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}'_k(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.14.8)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда

$\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.14.8) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = h$, $\beta = 1$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.14.8) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k - \text{ корни уравнения } & h R J_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.14.9)$$

Шаг 3. Разложение функций $f(r, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0(\mu_k r), \quad (1.14.10)$$

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{1}{\frac{1}{2} \underbrace{[J'_0(\mu_k)]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \end{aligned}$$

Итак,

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr \quad (1.14.11)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0(\mu_k r) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.14.12)$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr \quad (1.14.13)$$

Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомый вид (1.14.2), стр. 54, решения $u(r, t)$ и разложение (1.14.12) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k\mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.14.4), стр. 55, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \quad (1.14.14)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = ce^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t) = f_k(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t)e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_k(t)e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int_0^t f_k(\tau)e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 \tau} d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{oHo}(t) = c_1 e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.14.15)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_k.$$

Таким образом, решение задачи (1.14.14) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.14.16)$$

где $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.14.11) и (1.14.13):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Ответ в общем виде:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hR J_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.14.11) и (1.14.13):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Поскольку в нашем случае $f(r, t) \equiv 0$, то мы получаем

Ответ:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t},$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hR J_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0$, а φ_k задаются формулой:

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

1.15. № 777 б)

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.15.1)$$

при $\varphi(r) \equiv 0$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.15.1) в виде

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.15.2)$$

то, подставив (1.15.2) в уравнение $u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = a^2 \sum_{k=\dots}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}'_k(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \quad (1.15.3)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.15.4)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.15.1).

Условие $|u(0, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.15.5)$$

а условие $u(R, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.15.6)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r \mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.15.7)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.15.7) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.15.7) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k \text{ – корни уравнения} & J_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.15.8)$$

Шаг 3. Разложение функций $f(r, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0(\mu_k r), \quad (1.15.9)$$

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2} [J'_0(\mu_k)]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) \underbrace{J_0^2(\mu_k)}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \end{aligned}$$

Итак,

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \quad (1.15.10)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0(\mu_k r) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.15.11)$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \quad (1.15.12)$$

Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомый вид (1.15.2), стр. 58, решения $u(r, t)$ и разложение (1.15.11) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.15.3), стр. 59, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \quad (1.15.13)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = ce^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t)e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_k(t)e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int_0^t f_k(\tau)e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 \tau} d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{OHO}(t) = c_1 e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.15.14)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_k.$$

Таким образом, решение задачи (1.15.13) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.15.15)$$

где $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.15.10) и (1.15.12):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Ответ в общем виде:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.15.10) и (1.15.12):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr.$$

Поскольку в нашем случае $vp(r) \equiv 0$, то мы получаем

Ответ:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и $\varphi_k(t)$ задаются формулами (1.15.10):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr.$$

1.16. № 777 в)

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r - \mathbf{h}^2 \mathbf{u} + f_1(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.16.1)$$

при $f(r, t) \equiv 0$.

Шаг 1. Избавление от слагаемого $-h^2 u(r, t)$.

Поскольку $-h^2 = const$, от слагаемого $-h^2 u(r, t)$ можно избавиться с помощью стандартной замены:

$$v(r, t) = u(r, t) \cdot e^{h^2 t}.$$

Тогда уравнение $u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r - h^2 u + f_1(r, t)$, домноженное на $e^{h^2 t}$ превратится в

$$v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f(r, t),$$

где $f(r, t) = f_1(r, t) \cdot e^{h^2 t}$, и вся задача (1.16.1) примет вид

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v_r(R, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.16.2)$$

Шаг 2. Решение задачи (1.16.2)

Шаг 2-1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.16.1) в виде

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.16.3)$$

и предположить, что для $f(r, t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad (1.16.4)$$

то, подставив (1.16.3) и (1.16.4) в уравнение $v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}'_k(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \quad (1.16.5)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.16.6)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.16.1).

Условие $|v(0, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.16.7)$$

а условие $v_r(R, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}'_k(R) = 0. \quad (1.16.8)$$

Шаг 2-2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\alpha = 0$ и $\beta = 1$:

$$\begin{cases} (r \mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}'_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.16.9)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.16.9) имеет собственное значение $\lambda_0 = 0$ и соответствующую собственную функцию $\mathbf{X}_0(r) = 1 \equiv J_0(0)$.

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.16.9) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \mathbf{X}_0(r) = 1 = J_0(0), \\ \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & \mathbf{X}_k(r) = J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k - \text{ корни уравнения } J'_0(\mu) = 0 \Leftrightarrow J_1(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.16.10)$$

Шаг 2-3. Разложение функций $f(r, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = f_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0(\mu_k r), \quad (1.16.11)$$

$$f_0(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r, t) dr, \quad f_k(t) = \frac{2}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \quad (1.16.12)$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0(\mu_k r) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.16.13)$$

$$\varphi_0(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr \quad (1.16.14)$$

Шаг 2-4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомый вид (1.16.3), стр. 62, решения $u(r, t)$ и разложение (1.16.13) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.16.5), стр. 63, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_0(t) = f_0(t), \\ \mathbf{T}_0(0) = \varphi_0. \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \quad (1.16.15)$$

Решение задачи (1.16.15) задаётся, очевидно, формулой

$$\mathbf{T}_0(t) = \varphi_0 + \int_0^t f_0(\tau) d\tau. \quad (1.16.16)$$

Общее решение однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = ce^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t)e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_k(t)e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int_0^t f_k(\tau)e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 \tau} d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{oHo}(t) = c_1 e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.16.17)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_k.$$

Таким образом, решение задачи (1.16.15) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.16.18)$$

где $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.16.12) и (1.16.14):

$$f_0(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r, t) dr, \quad f_k(t) = \frac{2}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr;$$

$$\varphi_0(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Ответ в общем виде для задачи (1.16.2):

$$v(r; t) = \varphi_0 + \int_0^t f_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.16.12) и (1.16.14):

$$f_0(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r, t) dr, \quad f_k(t) = \frac{2}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr;$$

$$\varphi_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Поскольку в нашем случае $f(r, t) \equiv 0$, а $u(r, t) = e^{-h^2 t} v(r, t)$ то мы получаем

Ответ:

$$u(r; t) = e^{-h^2 t} \left[\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \right],$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$, а φ_k задаются формулой:

$$\varphi_0(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

1.17. № 777 Г)

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r - h^2 u, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = T, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = T, & t > 0. \end{cases} \quad (1.17.1)$$

Указание: искать решение в виде $u(r, t) = v(r, t)e^{-h^2 t} + w(r) + T$.

Шаг 1. Избавление от неоднородности и выбор вида решения

Во-первых надо избавиться от неоднородности в краевом условии. Поскольку в данной задаче

$$u(r, 0) = T, \quad \text{и} \quad u(R, t) = T,$$

то естественно искать функцию $u(r, t)$ в виде

$$u(r, t) = b(r, t) + T.$$

Тогда функция $b(r, t)$ будет решением задачи

$$\begin{cases} b_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rb_r)_r - h^2b - h^2T, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ b(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |b(0, t)| < \infty, \quad b(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.17.2)$$

В принципе, эта задача – почти частный случай уже решённой задачи в № 777 б), и мы можем воспользоваться её результатом (если сначала стандартной заменой избавимся от слагаемого $(-h^2b)$). Но нам предлагается явно выделить в решении часть, зависящую только от r . Это задание может иметь физический смысл: надо явно выделить стационарное (то есть не меняющееся со временем) распределение температуры в мембране и явно выделить сам процесс изменения температуры.

Поэтому мы представим искомую функцию $b(r, t)$ в виде

$$b(r, t) = v(r, t)e^{-h^2t} + w(r)$$

и попытаемся найти $w(r)$, являющуюся решением задачи, в которую мы загоним все стационарные входные данные (в данном случае это функция источников тепла $f(r, t) \equiv -h^2T$, не зависящая от времени).

$$\begin{cases} a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r = h^2w + h^2T, & 0 \leq r < R; \\ |w(0)| < \infty, \quad w(R) = 0. \end{cases} \quad (1.17.3)$$

Здесь легко угадать частное решение неоднородного уравнения $a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r = h^2w + h^2T$.

$$w_{\text{ЧНО}}(r) = -T.$$

А общее решение соответствующего однородного уравнения

$$-(rw_r)_r = -h^2rw \equiv \left(\frac{ih}{a}\right)^2 rw,$$

поскольку оно заменой $r = \frac{a}{ih}x$, $w(r) = \mathbf{Z}(x)$ сводится к

$$-(x\mathbf{Z}')' = x\mathbf{Z},$$

имеет, по следствию 1.1.1, стр. 2, вид:

$$\mathbf{Z}(x) = c_1 J_0(x) + c_2 N_0(x).$$

В силу краевого условия $|w(0)| < \infty$ и теоремы 1.1.2, стр. 3, $c_2 = 0$, и таким образом,

$$w_o(r) = c_1 J_0\left(\frac{ihr}{a}\right).$$

Но по определению 1.1.2, стр. 1,

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi i}{2}\nu} J_\nu(ix),$$

откуда при $\nu = 0$ получаем, что

$$J_0\left(\frac{ihr}{a}\right) \equiv I_0\left(\frac{hr}{a}\right).$$

Итак, решение однородного уравнения с первым краевым условием имеет вид $w_o(r) = c_1 I_0\left(\frac{hr}{a}\right)$, откуда

$$w(r) = w_o(r) + w_{\text{ЧНО}}(r) = c_1 I_0\left(\frac{hr}{a}\right) - T,$$

и нам осталось только добиться выполнения второго краевого условия $w(R) = 0$, подходящим образом выбрав константу c_1 .

$$w(R) = 0 \implies c_1 I_0\left(\frac{hR}{a}\right) = T \implies c_1 = \frac{T}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)}.$$

Окончательно получаем

$$w(r) = \frac{TI_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} - T. \quad (1.17.4)$$

Эта функция есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} w_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r - h^2 w - h^2 T, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ w(r, 0) = \frac{TI_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} - T, & 0 \leq r < R; \\ |w(0, t)| < \infty, \quad w(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.17.5)$$

Поэтому функция

$$z(r, t) = u(r, t) - w(r) - T \equiv u(r, t) - \frac{TI_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)},$$

в свою очередь, является решением задачи

$$\begin{cases} z_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rz_r)_r - h^2 z, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ z(r, 0) = T - \frac{TI_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)}, & 0 \leq r < R; \\ |z(0, t)| < \infty, \quad z(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.17.6)$$

Осталось совершить стандартную замену

$$v(r, t) = z(r, t)e^{h^2 t},$$

чтобы избавиться от слагаемого $(-h^2 z)$. Тогда для функции $v(r, t)$ имеем задачу:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = T - \frac{TI_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)}, & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.17.7)$$

Шаг 2. Решение задачи (1.17.7)

Эта задача – частный случай решённой в общем виде задачи (1.15.1), стр. 58, из № 777 б).

Воспользуемся результатом:

Ответ в общем виде:

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами:

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

В нашем случае $f(r, t) \equiv 0$, поэтому все $f_k(t) \equiv 0$. Осталось найти φ_k для функции

$$\varphi = T - \frac{TI_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)}.$$

$$\begin{aligned}
\varphi_k &= \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2T}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr - \\
&\quad - \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \frac{T}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \int_0^R r I_0\left(\frac{hr}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\
&= \frac{2T}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot [\mu_k J_1(\mu_k)] - \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \frac{T}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \int_0^R r I_0\left(\frac{hr}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\
&= \frac{2T}{\mu_k J_1(\mu_k)} - \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \frac{T}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \int_0^R r I_0\left(\frac{hr}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где φ_k вычисляются по формуле

$$\varphi_k = \frac{2T}{\mu_k J_1(\mu_k)} - \frac{2T}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2 I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \int_0^R r I_0\left(\frac{hr}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \quad (1.17.8)$$

Вспомнив, что $u(r, t) = v(r; t)e^{-h^2 t} + w(r) + T \equiv \frac{TI_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} + v(r; t)e^{-h^2 t}$, запишем

Ответ:

$$u(r, t) = \frac{TI_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\left[\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 + h^2\right]t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а φ_k задаются формулой (1.17.8).

1.18. № 777 Д)

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.18.1)$$

при $\varphi(r) \equiv 0$, а $f(r, t) = Ue^{-h^2 t}$.

Шаг 1. Вид решения

Эта задача – частный случай задачи (1.15.1), стр. 58, при $\varphi(r) \equiv 0$ и $f(r, t) = Ue^{-h^2 t}$. Однако, воспользовавшись напрямую её результатом, мы получим ответ

$$u(r; t) = 2UR^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-h^2 t} - e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}}{(a^2 \mu_k^2 - h^2 R^2) \mu_k J_1(\mu_k)} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. А хотелось бы выделить явно часть решения, ведущую себя подобно f , то есть фактически найти сумму ряда

$$e^{-h^2 t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 \mu_k^2 - h^2 R^2) \mu_k J_1(\mu_k)} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right).$$

Для этого представим решение $u(r, t)$ в виде

$$u(r, t) = v(r, t) + w(r)e^{-h^2t}$$

и найдём $w(r)$ из решения $z(r, t) = w(r)e^{-h^2t}$ задачи

$$\begin{cases} z_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rz_r)_r + Ue^{-h^2t}, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |z(0, t)| < \infty, \quad z(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.18.2)$$

Перепишем (1.18.2) подставив $z(r, t) = w(r)e^{-h^2t}$:

$$\begin{cases} -h^2w(r)e^{-h^2t} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw')' e^{-h^2t} + Ue^{-h^2t}, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |w(0)| < \infty, \quad w(R) = 0. \end{cases} \quad (1.18.3)$$

И для $w(r)$ после деления на $a^2e^{-h^2t}$ и умножения на r получим:

$$-(rw')' = \frac{h^2}{a^2} \cdot rw(r) + \frac{Ur}{a^2}.$$

Частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$w_{\text{чно}} = -\frac{U}{h^2}.$$

А общее решение однородного, по следствию 1.1.1, поскольку оно заменой $r = \frac{a}{h}x$, $w(r) = \mathbf{Z}(x)$ сводится к

$$-(x\mathbf{Z}')' = x\mathbf{Z},$$

имеет, по следствию 1.1.1, стр. 2, вид:

$$\mathbf{Z}(x) = c_1 J_0(x) + c_2 N_0(x).$$

В силу краевого условия $|w(0)| < \infty$ и теоремы 1.1.2, стр. 3, $c_2 = 0$, и таким образом,

$$w_o(r) = c_1 J_0\left(\frac{hr}{a}\right) \implies w(r) = c_1 J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - \frac{U}{h^2}.$$

Осталось при помощи второго краевого условия $w(R) = 0$ найти c_1 .

$$w(R) = 0 \implies c_1 J_0\left(\frac{hR}{a}\right) = \frac{U}{h^2} \implies c_1 = \frac{U}{h^2 J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}.$$

Окончательно получаем

$$w(r) = \frac{U \left(J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - J_0\left(\frac{hR}{a}\right) \right)}{h^2 J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}. \quad (1.18.4)$$

Найденная функция $z(r, t) = w(r)e^{-h^2t}$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} z_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rz_r)_r + Ue^{-h^2t}, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ z(r, 0) = \frac{U \left(J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - J_0\left(\frac{hR}{a}\right) \right)}{h^2 J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}, & 0 \leq r < R; \\ |z(0, t)| < \infty, \quad z(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.18.5)$$

Поэтому функция

$$v(r, t) = u(r, t) - w(r)e^{-h^2t} \equiv u(r, t) - \frac{U \left(J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - J_0\left(\frac{hR}{a}\right) \right)}{h^2 J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot e^{-h^2t},$$

в свою очередь, является решением задачи

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = -\frac{U(J_0(\frac{hr}{a}) - J_0(\frac{hR}{a}))}{h^2 J_0(\frac{hR}{a})}, & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.18.6)$$

Эта задача – снова частный случай задачи (1.15.1), стр. 58, при $\varphi(r) = -\frac{U(J_0(\frac{hr}{a}) - J_0(\frac{hR}{a}))}{h^2 J_0(\frac{hR}{a})}$ и $f(r, t) \equiv 0$. Воспользуемся результатом:

Ответ в общем виде:

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-(\frac{\mu_k a}{R})^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-(\frac{\mu_k a}{R})^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами:

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Поскольку в нашем случае $f(r, t) \equiv 0$, то все $f_k = 0$, и нам надо найти $\varphi_k(t)$ при $\varphi(r) = -\frac{U(J_0(\frac{hr}{a}) - J_0(\frac{hR}{a}))}{h^2 J_0(\frac{hR}{a})}$.

(Заметим, что этот способ решения данной задачи годится только для случая

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a\mu_k \neq hR,$$

поскольку иначе в знаменателе выражения для $\varphi(r)$ стоял бы нуль.)

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\ &= \frac{-2U}{h^2 R^2 [J_1(\mu_k)]^2 J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \left(\int_0^R r J_0\left(\frac{hr}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr - J_0\left(\frac{hR}{a}\right) \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \right) = \\ &= \left[\text{по формулам (1.1.13) и (1.1.9) при } x = \frac{\mu_k r}{R} \text{ и } \nu = 1 \right] = \\ &= \frac{-2U}{h^2 R^2 [J_1(\mu_k)]^2 J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \left(\frac{a^2 R^3}{h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2} \left[\frac{h}{a} J_1\left(\frac{hR}{a}\right) \underbrace{J_0(\mu_k)}_{=0} - \frac{\mu_k}{R} J_0\left(\frac{hR}{a}\right) J_1(\mu_k) \right] - \right. \\ &\quad \left. - J_0\left(\frac{hR}{a}\right) \cdot \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} [x J_1(x)]' dx \right) = \\ &= \frac{-2U}{h^2 R^2 [J_1(\mu_k)]^2 J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \left(-\frac{a^2 R^2}{h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2} \cdot \mu_k J_0\left(\frac{hR}{a}\right) J_1(\mu_k) - \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \mu_k J_0\left(\frac{hR}{a}\right) J_1(\mu_k) \right) = \\ &= \frac{-2U}{h^2 J_1(\mu_k)} \cdot \left(-\frac{a^2}{h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2} - \frac{1}{\mu_k^2} \right) \cdot \mu_k = \frac{2U}{h^2 J_1(\mu_k)} \cdot \frac{h^2 R^2 \mu_k}{(h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2) \mu_k^2} = \frac{-2UR^2}{(a^2 \mu_k^2 - h^2 R^2) \mu_k J_1(\mu_k)} \end{aligned}$$

Итак,

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-(\frac{\mu_k a}{R})^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) = -2UR^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{(a^2 \mu_k^2 - h^2 R^2) J_1(\mu_k)} \cdot e^{-(\frac{\mu_k a}{R})^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Ответ:

$$u(r; t) = \frac{U \left(J_0 \left(\frac{hr}{a} \right) - J_0 \left(\frac{hR}{a} \right) \right)}{h^2 J_0 \left(\frac{hR}{a} \right)} \cdot e^{-h^2 t} - 2UR^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 \mu_k^2 - h^2 R^2) \mu_k J_1(\mu_k)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

1.19. № 777 е)

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = Te^{-h^2 t}, & t > 0. \end{cases} \quad (1.19.1)$$

Шаг 1. Избавление от неоднородности и выбор вида решения

Во-первых надо избавиться от неоднородности в краевом условии. Вид этой неоднородности

$$u(R, t) = Te^{-h^2 t}$$

предлагает нам искать функцию $u(r, t)$ в виде

$$u(r, t) = v(r, t) + \underbrace{w(r)e^{-h^2 t}}_{=z(r, t)}.$$

Попробуем найти функцию $z(r, t) = w(r)e^{-h^2 t}$ как решение задачи

$$\begin{cases} \underbrace{-h^2 w(r)e^{-h^2 t}}_{z_t} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \underbrace{(rw'(r))'}_{(rz_r)_r} e^{-h^2 t}, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |z(0, t)| < \infty, \quad \underbrace{w(R)e^{-h^2 t}}_{z(R, t)} = Te^{-h^2 t}, & t > 0. \end{cases} \quad (1.19.2)$$

Тогда $w(r)$ должно удовлетворять соотношениям

$$\begin{cases} -(rw'(r))' = \frac{h^2}{a^2} rw(r), & 0 \leq r < R; \\ |w(0)| < \infty, \quad w(R) = T. \end{cases} \quad (1.19.3)$$

Решением уравнения $-(rw'(r))' = \frac{h^2}{a^2} rw(r)$, удовлетворяющим первому краевому условию $|w(0)| < \infty$ будет функция $w(r) = cJ_0\left(\frac{hr}{a}\right)$, а из второго краевого условия $w(R) = T$ находим константу c :

$$cJ_0\left(\frac{hR}{a}\right) = T \quad \implies \quad c = \frac{T}{J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}.$$

Таким образом,

$$w(r) = \frac{TJ_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \quad (1.19.4)$$

и для функции $u(r, t)$ имеем представление:

$$u(r, t) = v(r, t) + \underbrace{T \cdot \frac{J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot e^{-h^2 t}}_{=z(r, t)}. \quad (1.19.5)$$

Функция $z(r, t)$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} z_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rz_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ z(r, 0) = T \cdot \frac{J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}, & 0 \leq r < R; \\ |z(0, t)| < \infty, \quad z(R, t) = Te^{-h^2t}, & t > 0. \end{cases} \quad (1.19.6)$$

Тогда для функции $v(r, t)$ имеем задачу:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = -T \cdot \frac{J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}, & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.19.7)$$

Шаг 2. Решение задачи (1.19.7)

Эта задача – частный случай решённой в общем виде задачи (1.15.1), стр. 58, из № 777 б). Воспользуемся результатом:

Ответ в общем виде:

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами:

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

В нашем случае $f(r, t) \equiv 0$, поэтому все $f_k(t) \equiv 0$. Осталось найти φ_k для функции

$$\varphi = -T \cdot \frac{J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}.$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = - \frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \frac{T}{J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{hr}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \quad (1.19.8)$$

Вычисление последнего интеграла в формуле (1.19.8) различается в зависимости от соотношения величин hR и $a\mu_k$, поскольку, в силу формул Ломмеля (1.1.13) и (1.1.14) при $\nu = 0$,

$$\int_0^x t J_0(\alpha t) J_0(\beta t) dt = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha J_1(\alpha x) J_0(\beta x) - \beta J_0(\alpha x) J_1(\beta x)), \quad \alpha \neq \beta, \quad (1.1.13_0)$$

$$\int_0^x t (J_0(\alpha t))^2 dt = \frac{x^2}{2} (\alpha J_0'(\alpha x))^2 + \frac{x^2}{2} (J_0(\alpha x))^2 \equiv \frac{x^2}{2} (\alpha^2 J_1^2(\alpha x) + J_0^2(\alpha x)). \quad (1.1.14_0)$$

Однако, в данной ситуации, поскольку в знаменателе функции начального условия стоит функция $J_0\left(\frac{hr}{a}\right)$, исключена возможность, что при каком-то $m \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$a\mu_m = hR$. И нам надо рассматривать только **общий случай**: $\forall k \in \mathbb{N} \quad a\mu_k \neq hR$.

$$\begin{aligned}\varphi_k &= -\frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \frac{T}{J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{hr}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \left[\text{как интеграл Ломмеля (1.1.13)} \right] = \\ &= -\frac{2}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2} \cdot \frac{T}{J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \frac{a^2 R^3}{h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2} \left(\frac{h}{a} J_1\left(\frac{hR}{a}\right) \underbrace{J_0(\mu_k)}_{=0} - \frac{\mu_k}{R} J_0\left(\frac{hR}{a}\right) \cdot J_1(\mu_k) \right) = \\ &= \frac{2Ta^2 \mu_k J_0\left(\frac{hR}{a}\right) J_1(\mu_k)}{(h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2) [J_1(\mu_k)]^2 J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} = \frac{2Ta^2 \mu_k}{(h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2) J_1(\mu_k)}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$$

представляется в виде

$$v(r; t) = 2Ta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{(h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2) J_1(\mu_k)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right).$$

Вспомнив, что $u(r, t) = v(r, t) + T \cdot \frac{J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot e^{-h^2 t}$, запишем

Ответ:

$$u(r, t) = T \cdot \frac{J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot e^{-h^2 t} + 2Ta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{(h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2) J_1(\mu_k)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

1.20. № 777 Ж)

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + Ue^{-\gamma^2 t}, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) = Te^{-h^2 t}, & t > 0. \end{cases} \quad (1.20.1)$$

Шаг 1. Избавление от неоднородности и выбор вида решения

Вид неоднородности в уравнении и в краевом условии предлагает нам искать функцию $u(r, t)$ в виде

$$u(r, t) = v(r, t) + \underbrace{w_1(r)e^{-\gamma^2 t}}_{=y(r, t)} + \underbrace{w_2(r)e^{-h^2 t}}_{=z(r, t)}.$$

1-1. Первая вспомогательная задача

Попробуем найти функцию $y(r, t) = w_1(r)e^{-\gamma^2 t}$ как решение задачи

$$\begin{cases} \underbrace{-\gamma^2 w_1(r)e^{-\gamma^2 t}}_{y_t} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \underbrace{(rw_1'(r))' e^{-\gamma^2 t}}_{(ry_r)_r} + Ue^{-\gamma^2 t}, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |y(0, t)| < \infty, \quad \underbrace{w_1'(R)e^{-\gamma^2 t}}_{y_r(R, t)} = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.20.2)$$

Тогда $w_1(r)$ должно удовлетворять соотношениям

$$\begin{cases} -(rw'_1(r))' = \frac{\gamma^2}{a^2}rw_1(r) + \frac{Ur}{a^2}, & 0 \leq r < R; \\ |w_1(0)| < \infty, & w'_1(R) = 0. \end{cases} \quad (1.20.3)$$

Частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$w_{1\text{ЧНО}} = -\frac{U}{\gamma^2}.$$

Решением однородного уравнения $-(rw'_{1o}(r))' = \frac{\gamma^2}{a^2}rw_{1o}(r)$, удовлетворяющим первому краевому условию $|w(0)| < \infty$ будет функция $w_{1o}(r) = cJ_0\left(\frac{\gamma r}{a}\right)$. Поэтому решение задачи (1.20.3) естественно искать в виде

$$w_1(r) = cJ_0\left(\frac{\gamma r}{a}\right) - \frac{U}{\gamma^2}.$$

Из второго краевого условия $w'_1(R) = 0$ находим константу c :

$$c\frac{\gamma}{a}J_0\left(\frac{\gamma R}{a}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0^1.$$

Таким образом,

$$w_1(r) = -\frac{U}{\gamma^2}. \quad (1.20.4)$$

и для функции $y(r, t)$ имеем представление:

$$y(r, t) = -\frac{U}{\gamma^2} \cdot e^{-\gamma^2 t}. \quad (1.20.5)$$

Функция $y(r, t)$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} y_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ry_r)_r + Ue^{-\gamma^2 t}, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ y(r, 0) = -\frac{U}{\gamma^2}, & 0 \leq r < R; \\ |y(0, t)| < \infty, \quad y_r(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.20.6)$$

1-2. Вторая вспомогательная задача

Попробуем найти функцию $z(r, t) = w(r)e^{-h^2 t}$ как решение задачи

$$\begin{cases} \underbrace{-\gamma^2 w_2(r)e^{-h^2 t}}_{z_t} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \underbrace{(rw'_2(r))' e^{-h^2 t}}_{(rz_r)_r}, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |z(0, t)| < \infty, \quad \underbrace{w'_2(R)e^{-h^2 t}}_{z_r(R, t)} = Te^{-h^2 t}, & t > 0. \end{cases} \quad (1.20.7)$$

Тогда $w_2(r)$ должно удовлетворять соотношениям

$$\begin{cases} -(rw'_2(r))' = \frac{h^2}{a^2}rw_2(r), & 0 \leq r < R; \\ |w_2(0)| < \infty, & w'_2(R) = T. \end{cases} \quad (1.20.8)$$

Решением уравнения $-(rw'_2(r))' = \frac{h^2}{a^2}rw_2(r)$, удовлетворяющим первому краевому условию $|w_2(0)| < \infty$ будет функция $w_2(r) = cJ_0\left(\frac{hr}{a}\right)$, а из второго краевого условия $w'_r(R) = T$ находим константу c :

$$-c \cdot \frac{h}{a}J_1\left(\frac{hR}{a}\right) = T \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{aT}{hJ_1\left(\frac{hR}{a}\right)}.$$

¹Строго говоря, именно здесь мы теряем возможное решение, соответствующее случаю, когда $\exists m \in \mathbb{N} : a\mu_m = hR$. Читателю предлагается самостоятельно рассмотреть данный вырожденный случай.

Таким образом,

$$w_2(r) = - \frac{aT J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{hJ_1\left(\frac{hR}{a}\right)} \quad (1.20.9)$$

и для функции $z(r, t)$ имеем представление:

$$z(r, t) = - \frac{aT J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{hJ_1\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot e^{-h^2 t}. \quad (1.20.10)$$

Функция $z(r, t)$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} z_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rz_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ z(r, 0) = - \frac{aT J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{hJ_1\left(\frac{hR}{a}\right)}, & 0 \leq r < R; \\ |z(0, t)| < \infty, \quad z_r(R, t) = Te^{-h^2 t}, & t > 0. \end{cases} \quad (1.20.11)$$

Тогда для функции $v(r, t) = u(r, t) - y(r, t) - z(r, t)$ имеем задачу:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = \frac{U}{\gamma^2} + \frac{aT J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{hJ_1\left(\frac{hR}{a}\right)}, & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v_r(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.20.12)$$

Чтобы упростить себе жизнь при решении этой задачи разобьём её ещё на две.

1-3. Третья вспомогательная задача

Найдём $w_3(r)$ из условий

$$\begin{cases} \underbrace{w_{3t}}_{=0} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_{3r})_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ w_3(r, 0) = \frac{U}{\gamma^2}, & 0 \leq r < R; \\ |w_3(0, t)| < \infty, \quad w_{3r}(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.20.13)$$

Решение этой задачи очень легко угадать в виде константы:

$$w_3(r) = \frac{U}{\gamma^2}. \quad (1.20.14)$$

Тогда функция

$$b(r, t) = v(r, t) - w_3(r)$$

является решением задачи

$$\begin{cases} b_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rb_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ b(r, 0) = \frac{aT J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{hJ_1\left(\frac{hR}{a}\right)}, & 0 \leq r < R; \\ |b(0, t)| < \infty, \quad b_r(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.20.15)$$

Шаг 2. Решение задачи (1.20.15)

Эта задача – частный случай решённой в общем виде задачи (1.16.2), стр. 62, из № 777 в).

Воспользуемся результатом:

Ответ в общем виде для задачи (1.16.2):

$$b(r; t) = \varphi_0 + \int_0^t f_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.16.12) и (1.16.14):

$$f_0(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r, t) dr, \quad f_k(t) = \frac{2}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr;$$

$$\varphi_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

В нашем случае $f(r, t) \equiv 0$, поэтому все $f_k(t) \equiv 0$. Осталось найти φ_k для функции

$$\varphi = \frac{aT J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{h J_1\left(\frac{hR}{a}\right)}.$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{aT}{h J_1\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{hr}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \quad (1.20.16)$$

Вычисление последнего интеграла в формуле (1.20.16) различается в зависимости от соотношения величин hR и $a\mu_k$, поскольку, в силу формул Ломмеля (1.1.13) и (1.1.14) при $\nu = 0$,

$$\int_0^x t J_0(\alpha t) J_0(\beta t) dt = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha J_1(\alpha x) J_0(\beta x) - \beta J_0(\alpha x) J_1(\beta x)), \quad \alpha \neq \beta, \quad (1.1.13_0)$$

$$\int_0^x t (J_0(\alpha t))^2 dt = \frac{x^2}{2} (\alpha J_0'(\alpha x))^2 + \frac{x^2}{2} (J_0(\alpha x))^2 \equiv \frac{x^2}{2} (\alpha^2 J_1^2(\alpha x) + J_0^2(\alpha x)). \quad (1.1.14_0)$$

Однако, в данной ситуации, поскольку в знаменателе функции начального условия стоит функция $J_1\left(\frac{hR}{a}\right)$, исключена возможность, что при каком-то $m \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $a\mu_m = hR$ (см. также сноску на стр. 75). И нам надо рассматривать только общий случай: $\forall k \in \mathbb{N} \quad a\mu_k \neq hR$.

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{2aT}{hR^2 J_0^2(\mu_k) J_1\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{hr}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \left[\text{как интеграл Ломмеля (1.1.13)} \right] = \\ &= \frac{2aT}{hR^2 J_0^2(\mu_k) J_1\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \frac{a^2 R^3}{h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2} \left(\frac{h}{a} J_1\left(\frac{hR}{a}\right) J_0(\mu_k) - \frac{\mu_k}{R} J_0\left(\frac{hR}{a}\right) \cdot \underbrace{J_1(\mu_k)}_{=0} \right) = \\ &= \frac{2a^2 T R J_1\left(\frac{hR}{a}\right) J_0(\mu_k)}{(h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2) J_0^2(\mu_k) J_1\left(\frac{hR}{a}\right)} = \frac{2a^2 T R}{(h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2) J_0(\mu_k)}. \\ \varphi_0 &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr = \frac{2aT}{hR^2 J_1\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{hr}{a}\right) dr = \left[\text{при } x = \frac{hr}{a} \right] = \\ &= \frac{2aT}{hR^2 J_1\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \frac{a^2}{h^2} \int_0^{\frac{hR}{a}} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9) при } \nu = 1 \right] = \\ &= \frac{2a^3 T}{h^3 R^2 J_1\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \int_0^{\frac{hR}{a}} [x J_1(x)]' dx = \frac{2a^3 T}{h^3 R^2 J_1\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \frac{hR}{a} J_1\left(\frac{hR}{a}\right) = \frac{2a^2 T}{h^2 R^2} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$b(r; t) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$$

представляется в виде

$$b(r; t) = \frac{2a^2 T}{h^2 R^2} + 2a^2 T R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2) J_0(\mu_k)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right).$$

Вспомнив теперь, что

$$u(r, t) = b(r, t) + w_1(r)e^{-\gamma^2 t} + w_2(r)e^{-h^2 t} + w_3(r) = b(r, t) + \frac{U}{\gamma^2} \left(1 - e^{-\gamma^2 t}\right) - \frac{aT J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{h J_1\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot e^{-h^2 t},$$

запишем

Ответ:

$$u(r, t) = \frac{U}{\gamma^2} \left(1 - e^{-\gamma^2 t}\right) - \frac{aT J_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{h J_1\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot e^{-h^2 t} + \frac{2a^2 T}{h^2 R^2} + 2a^2 T R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(h^2 R^2 - a^2 \mu_k^2) J_0(\mu_k)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. (Ответ задачника для невырожденного случая верен, если учесть, что $J_1(\mu_k) = 0$.)

1.21. № 777 з)

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = U, & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) = q, & t > 0. \end{cases} \quad (1.21.1)$$

Шаг 1. Избавление от неоднородности и выбор вида решения

Вид неоднородности в начальном и краевом условиях предлагает нам искать функцию $u(r, t)$ в виде

$$u(r, t) = v(r, t) + w(r) + U.$$

Поскольку функция $z(r, t) = u(r, t) - U$ есть решение задачи

$$\begin{cases} z_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rz_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ z(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |z(0, t)| < \infty, \quad z_r(R, t) = q, & t > 0, \end{cases} \quad (1.21.2)$$

то для $v(r, t)$ и $w(r)$ следует искать как решения следующих вспомогательных задач:

1-1. Первая вспомогательная задача

Попробуем найти функцию $w(r)$ как решение задачи

$$\begin{cases} \underbrace{w_t(r)}_{=0} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |w(0)| < \infty, \quad w_r(R) = q. \end{cases} \quad (1.21.3)$$

Перепишем эту задачу, учтя, что $w = w(r)$

$$\begin{cases} (rw'(r))' = 0, & 0 \leq r < R; \\ |w(0)| < \infty, & w'(R) = q. \end{cases} \quad (1.21.4)$$

Из уравнения сразу получаем, что

$$w'(r) = \frac{c}{r}, \quad \implies \quad w(r) = c_1 \ln |r| + c_2,$$

Из первого краевого условия следует, что $c_1 = 0$, и второе условие не будет выполнено ни при каких c_2 . Значит, надо модифицировать задачу для $w(r)$.

Попробуем найти функцию $w(r)$ как решение задачи

$$\begin{cases} \underbrace{w_t(r)}_{=0} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r - A, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |w(0)| < \infty, & w_r(R) = q, \end{cases} \quad (1.21.5)$$

где число A мы найдём позже подходящим образом.

Перепишем задачу (1.21.5), учтя, что $w = w(r)$

$$\begin{cases} (rw'(r))' = \frac{A}{a^2} \cdot r, & 0 \leq r < R; \\ |w(0)| < \infty, & w'(R) = q. \end{cases} \quad (1.21.6)$$

Из уравнения сразу получаем, что

$$w'(r) = \frac{A}{2a^2} \cdot r + \frac{c_1}{r}, \quad \implies \quad w(r) = \frac{Ar^2}{4a^2} + c_1 \ln |r| + c_2,$$

Из первого краевого условия следует, что $c_1 = 0$, а второе условие выполнено при любой c_2 поэтому

$$\frac{AR}{2a^2} = q \quad \implies \quad A = \frac{2a^2q}{R}.$$

Таким образом, выбрав для простоты $c_2 = 0$, получим

$$w(r) = \frac{qr^2}{2R}. \quad (1.21.7)$$

Тогда для функции $v(r, t) = u(r, t) - w(r) - U$ имеем задачу:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + \frac{2a^2q}{R}, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = -\frac{qr^2}{2R}, & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, & v_r(R, t) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (1.21.8)$$

Чтобы упростить себе жизнь при решении этой задачи разобьём её ещё на две.

1-3. Третья вспомогательная задача

Найдём $w_1(t)$ из условий

$$\begin{cases} w_{1t} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \underbrace{(rw_{1r})_r}_{=0} + \frac{2a^2q}{R}, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |w_1(0, t)| < \infty, & w_{1r}(R, t) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (1.21.9)$$

Решение этой задачи очень легко угадать в виде константы, умноженной на t :

$$w_1(t) = \frac{2a^2qt}{R}. \quad (1.21.10)$$

Тогда функция

$$b(r, t) = v(r, t) - w_1(t)$$

является решением задачи

$$\begin{cases} b_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rb_r)_r, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ b(r, 0) = -\frac{qr^2}{2R}, & 0 \leq r < R; \\ |b(0, t)| < \infty, \quad b_r(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.21.11)$$

Шаг 2. Решение задачи (1.21.11)

Эта задача – частный случай решённой в общем виде задачи (1.16.2), стр. 62, из № 777 в). Воспользуемся результатом:

Ответ в общем виде для задачи (1.16.2):

$$b(r; t) = \varphi_0 + \int_0^t f_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.16.12) и (1.16.14):

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r, t) dr, & f_k(t) &= \frac{2}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr; \\ \varphi_0 &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, & \varphi_k &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \end{aligned}$$

В нашем случае $f(r, t) \equiv 0$, поэтому все $f_k(t) \equiv 0$. Осталось найти φ_k для функции

$$\varphi = -\frac{qr^2}{2R}.$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{-q}{2R} \cdot \int_0^R r^3 J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \quad (1.21.12)$$

Для вычисления последнего интеграла нам придётся вспомнить формулу (1.1.9)

$$[x^\nu J_\nu]'(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x). \quad (1.1.9)$$

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \left[\text{при } x = \frac{\mu_k r}{R} \right] = -\frac{q}{R^3 J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{R^4}{\mu_k^4} \int_0^{\mu_k} x^3 J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9) при } \nu = 1 \right] = \\ &= -\frac{qR}{\mu_k^4 J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^{\mu_k} x^2 \cdot [x J_1(x)]' dx = \left[\text{по частям} \right] = \\ &= -\frac{qR}{\mu_k^4 J_0^2(\mu_k)} \cdot \left(x^3 J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} - 2 \int_0^{\mu_k} x^2 J_1(x) dx \right) = \left[\text{в силу (1.1.9) при } \nu = 2 \right] = \\ &= -\frac{qR}{\mu_k^4 J_0^2(\mu_k)} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 \int_0^{\mu_k} [x^2 J_2(x)]' dx \right) = \\ &= -\frac{qR}{\mu_k^4 J_0^2(\mu_k)} \cdot (\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2\mu_k^2 J_2(\mu_k)) = \frac{qR(2J_2(\mu_k) - \mu_k J_1(\mu_k))}{\mu_k^2 J_0^2(\mu_k)}. \end{aligned}$$

$$\varphi_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr = -\frac{q}{R^3} \cdot \int_0^R r^3 dr = -\frac{q}{R^3} \cdot \frac{R^4}{4} = -\frac{qR}{4}.$$

Таким образом,

$$b(r; t) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$$

представляется в виде

$$b(r; t) = -\frac{qR}{4} + qR \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_2(\mu_k) - \overbrace{\mu_k J_1(\mu_k)}^{=0}}{\mu_k^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right).$$

Упростим это выражение при помощи рекуррентной формулы (1.1.10):

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) + J_{\nu-1}(x) = 0, \quad (1.1.10)$$

которая при $\nu = 1$ и $x = \mu_k$ в нашем случае принимает вид:

$$J_2(\mu_k) - \frac{2}{\mu_k} \overbrace{J_1(\mu_k)}^{=0} + J_0(\mu_k) = 0 \quad \implies \quad J_2(\mu_k) = -J_0(\mu_k). \quad (1.21.13)$$

$$\begin{aligned} b(r; t) &= -\frac{qR}{4} + 2qR \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_k)}{\mu_k^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) = \\ &= \left[\text{в силу (1.21.13)} \right] = -\frac{qR}{4} - 2qR \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right). \end{aligned}$$

Вспомнив теперь, что

$$u(r, t) = \underbrace{b(r, t) + w_1(t)}_{v(r, t)} + w(r) + U = b(r, t) + \frac{2a^2 qt}{R} + \frac{qr^2}{2R} + U,$$

запишем

Ответ:

$$u(r, t) = \frac{2a^2 qt}{R} + \frac{qr^2}{2R} + U - \frac{qR}{4} - 2qR \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. (Ответ задачника станет верен, если к нему добавить U .)

1.22. № 778 а)

Найти распределение температуры при $t > 0$ в бесконечном однородном круглом цилиндре радиуса R , если начальная температура цилиндра равна Ur^2 для случая, когда поверхность цилиндра теплоизолирована.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.22.1)$$

при $f(r, t) \equiv 0$, а $\varphi(r) = Ur^2$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.22.1) в виде

$$u(r; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.22.2)$$

и предположить, что для $f(r, t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad (1.22.3)$$

то, подставив (1.22.2) и (1.22.3) в уравнение $v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}'_k(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \quad (1.22.4)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.22.5)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.22.1).

Условие $|v(0, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.22.6)$$

а условие $v_r(R, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}'_k(R) = 0. \quad (1.22.7)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\alpha = 0$ и $\beta = 1$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}'_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.22.8)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.22.8) имеет собственное значение $\lambda_0 = 0$ и соответствующую собственную функцию $\mathbf{X}_0(r) = 1 \equiv J_0(0)$.

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.22.8) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \mathbf{X}_0(r) = 1 = J_0(0), \\ \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & \mathbf{X}_k(r) = J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k - \text{ корни уравнения } & J'_0(\mu) = 0 \Leftrightarrow J_1(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.22.9)$$

Шаг 3. Разложение функций $f(r, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = f_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0(\mu_k r), \quad (1.22.10)$$

$$f_0(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r, t) dr, \quad f_k(t) = \frac{2}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \quad (1.22.11)$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0(\mu_k r) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.22.12)$$

$$\varphi_0(t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \quad (1.22.13)$$

Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомый вид (1.22.2), стр. 82, решения $u(r, t)$ и разложение (1.22.12) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r, 0) = 0,$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.22.4), стр. 82, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_0(t) = f_0(t), \\ \mathbf{T}_0(0) = \varphi_0. \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \quad (1.22.14)$$

Решение задачи (1.22.14) задаётся, очевидно, формулой

$$\mathbf{T}_0(t) = \varphi_0 + \int_0^t f_0(\tau) d\tau. \quad (1.22.15)$$

Общее решение однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{00}(t) = c e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_k(t) e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int_0^t f_k(\tau) e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 \tau} d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{\text{оHo}}(t) = c_1 e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.22.16)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = vp_k$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_k.$$

Таким образом, решение задачи (1.22.14) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.22.17)$$

где $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.22.11) и (1.22.13):

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r, t) dr, & f_k(t) &= \frac{2}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr; \\ \varphi_0(t) &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, & \varphi_k &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \end{aligned}$$

Ответ в общем виде для задачи (1.22.1):

$$u(r; t) = \varphi_0 + \int_0^t f_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \quad (1.22.18)$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.22.11) и (1.22.13):

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r, t) dr, & f_k(t) &= \frac{2}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr; \\ \varphi_0 &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, & \varphi_k &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \end{aligned}$$

Поскольку в нашем случае $f(r, t) \equiv 0$, а $\varphi(r) = Ur^2$ то все $f_k(t) \equiv 0$, и нам надо посчитать

ТОЛЬКО φ_k :

$$\begin{aligned}
 \varphi_k &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2U}{R^2 [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\
 &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R} \right] = \frac{2U}{R^2 [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int_0^{\mu_k} x^3 J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1 \right] = \\
 &= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^{\mu_k} x^2 \cdot [x J_1(x)]' dx = \left[\text{по частям} \right] = \\
 &= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 J_0^2(\mu_k)} \cdot \left(x^3 J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} - 2 \int_0^{\mu_k} x^2 J_1(x) dx \right) = \left[\text{в силу (1.1.9) при } \nu = 2 \right] = \\
 &= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 J_0^2(\mu_k)} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 \int_0^{\mu_k} [x^2 J_2(x)]' dx \right) = \\
 &= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 J_0^2(\mu_k)} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 x^2 J_2(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{2UR^2}{\mu_k^4 J_0^2(\mu_k)} \cdot \left(\mu_k^3 \underbrace{J_1(\mu_k)}_{=0} - 2 \mu_k^2 J_2(\mu_k) \right) = \\
 &= \left[\text{в силу (1.1.10) при } \nu = 1, \quad J_2(\mu_k) - \frac{2}{\mu_k} \underbrace{J_1(\mu_k)}_{=0} + J_0(\mu_k) = 0 \right] = \frac{4UR^2}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)}
 \end{aligned}$$

Осталось посчитать φ_0 :

$$\varphi_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr = \frac{2U}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{UR^2}{2}.$$

Подставляем φ_k и $f_k(t) \equiv 0$ в (1.22.18) и получаем

Ответ:

$$u(r; t) = \frac{UR^2}{2} + 4UR^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)} e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$,

1.23. № 778 б)

Найти распределение температуры при $t > 0$ в бесконечном однородном круглом цилиндре радиуса R , если начальная температура цилиндра равна Ur^2 для случая, когда на поверхности цилиндра происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) + hu(R, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.23.1)$$

при $f(r, t) \equiv 0$, а $\varphi(r) = Ur^2$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.23.1) в виде

$$u(r; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.23.2)$$

и предположить, что для $f(r, t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad (1.23.3)$$

то, подставив (1.23.2) и (1.23.3) в уравнение $u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}'_k(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \quad (1.23.4)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.23.5)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.23.1).

Условие $|u(0, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.23.6)$$

а условие $u_r(R, t) + hu(R, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}'_k(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.23.7)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}'_k(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.23.8)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.23.8) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = h$, $\beta = 1$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.23.8) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k - \text{ корни уравнения } & h R J_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.23.9)$$

Шаг 3. Разложение функций $f(r, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0(\mu_k r), \quad (1.23.10)$$

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2} [J'_0(\mu_k)]^2}_{= [-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \end{aligned}$$

Итак,

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \quad (1.23.11)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0(\mu_k r) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.23.12)$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \quad (1.23.13)$$

Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомый вид (1.23.2), стр. 87, решения $u(r, t)$ и разложение (1.23.12) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r, 0) = 0,$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.23.4), стр. 87, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \quad (1.23.14)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = c e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_k(t) e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int_0^t f_k(\tau) e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 \tau} d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{oHo}(t) = c_1 e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.23.15)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = vp_k$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_k.$$

Таким образом, решение задачи (1.23.14) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.23.16)$$

где $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.23.11) и (1.23.13):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Ответ в общем виде:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hR J_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.23.11) и (1.23.13):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Поскольку в нашем случае $f(r, t) \equiv 0$, то все $f_k(t) \equiv 0$, и нам осталось найти φ_k :

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2U}{R^2 (J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k))} \cdot \int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\ &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R} \right] = \frac{2U}{R^2 (J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k))} \cdot \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int_0^{\mu_k} x^3 J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1 \right] = \\ &= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 (J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k))} \cdot \int_0^{\mu_k} x^2 \cdot [x J_1(x)]' dx = \left[\text{по частям} \right] = \\ &= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 (J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k))} \cdot \left(x^3 J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} - 2 \int_0^{\mu_k} x^2 J_1(x) dx \right) = \left[\text{в силу (1.1.9) при } \nu = 2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 (J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k))} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 \int_0^{\mu_k} [x^2 J_2(x)]' dx \right) = \\
&= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 (J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k))} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 x^2 J_2(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \\
&= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 (J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k))} \cdot (\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2\mu_k^2 J_2(\mu_k)) = \\
&= \left[\text{в силу (1.1.10) при } \nu = 1, \quad J_2(\mu_k) - \frac{2}{\mu_k} J_1(\mu_k) + J_0(\mu_k) = 0 \right] = \\
&= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 (J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k))} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2\mu_k^2 \left(\frac{2}{\mu_k} J_1(\mu_k) - J_0(\mu_k) \right) \right) = \\
&= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 (J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k))} \cdot ((\mu_k^2 - 4) \mu_k J_1(\mu_k) + 2\mu_k^2 J_0(\mu_k)).
\end{aligned}$$

Поскольку μ_k – положительные корни уравнения $hRJ_0(\mu) + \mu \underbrace{J_0'(\mu)}_{=-J_1(\mu)} = 0$, то

$$\mu_k J_1(\mu_k) = hRJ_0(\mu_k). \quad (1.23.17)$$

Поэтому выражение для φ_k упрощается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varphi_k &= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 (J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k))} \cdot ((\mu_k^2 - 4) \mu_k J_1(\mu_k) + 2\mu_k^2 J_0(\mu_k)) = \\
&= \frac{2UR^2}{\mu_k^4 \left(1 + \left(\frac{hR}{\mu_k} \right)^2 \right) J_0^2(\mu_k)} \cdot ((\mu_k^2 - 4) hRJ_0(\mu_k) + 2\mu_k^2 J_0(\mu_k)) = \frac{2UR^2 \cdot ((\mu_k^2 - 4) hR + 2\mu_k^2)}{\mu_k^2 (\mu_k^2 + h^2 R^2) J_0(\mu_k)}.
\end{aligned}$$

Ответ:

$$u(r; t) = 2UR^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_k^2 - 4) hR + 2\mu_k^2}{\mu_k^2 (\mu_k^2 + h^2 R^2) J_0(\mu_k)} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t},$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hRJ_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0$.

1.24. № 778 В)

Найти распределение температуры при $t > 0$ в бесконечном однородном круглом цилиндре радиуса R , если начальная температура цилиндра равна Ur^2 для случая, когда температура поверхности цилиндра поддерживается равной T .

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi_1(r), & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = T, & t > 0 \end{cases} \quad (1.24.1)$$

при $f(r, t) \equiv 0$, а $\varphi_1(r) = Ur^2$.

Шаг 0. Избавление от неоднородности в краевом условии

Поскольку функция в правой части краевого условия I-го рода имеет вид константы, естественно искать решение (1.24.1) в виде

$$u(r, t) = T + v(r, t).$$

Тогда функция $v(r, t)$ будет удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v(R, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.24.2)$$

при $f(r, t) \equiv 0$, а $\varphi(r) = Ur^2 - T$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.24.2) в виде

$$v(r; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.24.3)$$

то, подставив (1.24.3) в уравнение $v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}'_k(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \quad (1.24.4)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.24.5)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.24.2).

Условие $|v(0, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.24.6)$$

а условие $v(R, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.24.7)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.24.8)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.24.8) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.24.8) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k \text{ – корни уравнения} & J_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.24.9)$$

Шаг 3. Разложение функций $f(r, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0(\mu_k r), \quad (1.24.10)$$

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{1}{\frac{1}{2} \underbrace{[J'_0(\mu_k)]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) \underbrace{J_0^2(\mu_k)}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \end{aligned}$$

Итак,

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \quad (1.24.11)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0(\mu_k r) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.24.12)$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \quad (1.24.13)$$

Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомый вид (1.24.3), стр. 92, решения $u(r, t)$ и разложение (1.24.12) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r, 0) = 0,$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.24.4), стр. 92, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \quad (1.24.14)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = c e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_k(t) e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int_0^t f_k(\tau) e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 \tau} d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{OHO}(t) = c_1 e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.24.15)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = vp_k$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_k.$$

Таким образом, решение задачи (1.24.14) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.24.16)$$

где $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.24.11) и (1.24.13):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Ответ в общем виде:

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.24.11) и (1.24.13):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \quad \varphi_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Поскольку в нашем случае $f(r, t) \equiv 0$, а $\varphi(r) = Ur^2 - T$ то все $f_k(t) \equiv 0$, и нам надо посчитать только φ_k :

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2U}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr - \frac{2T}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Поэтому надо взять интегралы $\int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$ и $\int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$:

$$\begin{aligned} \int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R} \right] = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int_0^{\mu_k} x^3 J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1 \right] = \\ &= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int_0^{\mu_k} x^2 \cdot [x J_1(x)]' dx = \left[\text{по частям} \right] = \\ &= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(x^3 J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} - 2 \int_0^{\mu_k} x^2 J_1(x) dx \right) = \left[\text{в силу (1.1.9) при } \nu = 2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 \int_0^{\mu_k} [x^2 J_2(x)]' dx \right) = \\
&= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 x^2 J_2(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot (\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 \mu_k^2 J_2(\mu_k)) = \\
&= \left[\text{в силу (1.1.10) при } \nu = 1, \quad J_2(\mu_k) - \frac{2}{\mu_k} J_1(\mu_k) + \underbrace{J_0(\mu_k)}_{=0} = 0 \right] = \frac{R^4 (\mu_k^2 - 4)}{\mu_k^3} J_1(\mu_k).
\end{aligned} \tag{1.24.17}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R} \right] = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1 \right] = \\
&= \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} [x J_1(x)]' dx = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \left(x J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k).
\end{aligned} \tag{1.24.18}$$

Поэтому для φ_k справедливо представление:

$$\begin{aligned}
\varphi_k &= \frac{2U}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr - \frac{2T}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\
&= \frac{2U}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \frac{R^4 (\mu_k^2 - 4)}{\mu_k^3} J_1(\mu_k) - \frac{2T}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k) = \\
&= \frac{2(U R^2 (\mu_k^2 - 4) - T \mu_k^2)}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}
\end{aligned}$$

Итак, для функции $v(r, t)$ – решения задачи (1.24.2) получаем:

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(U R^2 (\mu_k^2 - 4) - T \mu_k^2)}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} e^{-(\frac{\mu_k a}{R})^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Наконец, для $u(r, t) = T + v(r, t)$ у нас получился

Ответ:

$$u(r; t) = T + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(U R^2 (\mu_k^2 - 4) - T \mu_k^2)}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} e^{-(\frac{\mu_k a}{R})^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

1.25. № 779 Выделение стационарной части решения.

В бесконечном однородном круглом цилиндре радиуса R с момента $t = 0$ выделяется тепло постоянной плотностью Q . Считая температуру цилиндра при $t = 0$ равной нулю, определить распределение температуры в нём при $t > 0$, если поверхность цилиндра поддерживается при температуре T .

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f_1(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi_1(r), & 0 \leq r < R; \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = T, & t > 0 \end{cases} \quad (1.25.1)$$

при $f_1(r, t) = \frac{Q}{c\rho}$, а $\varphi_1(r) \equiv 0$.

Шаг 0. Избавление от неоднородности в краевом условии

Поскольку функции в правых частях краевого условия I-го рода и уравнения имеют вид константы, естественно искать решение (1.25.1) в виде

$$u(r, t) = T + w(r) + v(r, t),$$

где $w(r)$ – решение задачи:

$$\begin{cases} \underbrace{w_t}_{=0} = a^2 \cdot (w_{rr} + \frac{1}{r}w_r) + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ |w(0)| < \infty, \quad w(R) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.25.2)$$

Легко найти частное решение неоднородного уравнения

$$w''(r) + \frac{1}{r}w'(r) = -\frac{Q}{a^2c\rho} \equiv -\frac{Q}{k}, \quad (1.25.3)$$

(k – коэффициент теплопроводности) в виде $w_{\text{ЧНО}} = c_1 r^2$. Подставив его в уравнение получаем, что

$$2c_1 + c_1 \frac{2r}{r} = -\frac{Q}{k} \implies c_1 = -\frac{Q}{4k}.$$

Поэтому

$$w_{\text{ЧНО}} = -\frac{Q}{4k} r^2.$$

Общее же решение однородного уравнения $w_o''(r) + \frac{1}{r}w_o'(r) = 0$ находится так:

$$(\ln w_o'(r))' = -\frac{1}{r} \equiv \left(\ln \frac{1}{r}\right)',$$

откуда

$$w_o'(r) = \frac{1}{c_2 r} \implies w_o(r) = \ln r + c_3.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.25.3) имеет вид

$$w(r) = {}_3 \ln r + c_4 - \frac{Q}{4k} r^2.$$

Из краевого условия $|w(0)| < \infty$ получаем, что $c_3 = 0$, а из краевого условия $w(R) = 0$ следует, что $c_4 = \frac{QR^2}{4k}$. Таким образом,

$$w(r) = \frac{Q(R^2 - r^2)}{4k}.$$

Тогда функция $v(r, t) = u(r, t) - T - w(r)$ будет удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f(r, t), & 0 \leq r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v(R, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.25.4)$$

при $f(r, t) \equiv 0$, а $\varphi(r) = -T - \frac{Q(R^2 - r^2)}{4k}$.

Именно такую задачу (1.28.2) мы решили на стр. 111 – 95. Воспользуемся результатом:

Ответ в общем виде:

$$v(r; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_n(t)$ и φ_n задаются формулами (1.24.11) и (1.24.13):

$$f_n(t) = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \int_0^R r f(r, t) J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr, \quad \varphi_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr.$$

Там же, на стр. 180 – 180 мы взяли² интегралы

$$\int_0^R r^3 J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr = \frac{R^4 (\mu_n^2 - 4)}{\mu_n^3} J_1(\mu_n), \quad (1.43.16)$$

$$\int_0^R r J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr = \frac{R^2}{\mu_n} J_1(\mu_n). \quad (1.43.17)$$

Поэтому для $\varphi(r) = -T - \frac{Q(R^2 - r^2)}{4k} = \left(-T - \frac{QR^2}{4k} \right) + \frac{Q}{4k} \cdot r^2$ получаем

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{Q}{4k} \cdot \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \int_0^R r^3 J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr - \left(T + \frac{QR^2}{4k} \right) \cdot \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \int_0^R r J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr = \\ &= \frac{Q}{4k} \cdot \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \frac{R^4 (\mu_n^2 - 4)}{\mu_n^3} J_1(\mu_n) - \left(T + \frac{QR^2}{4k} \right) \cdot \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \frac{R^2}{\mu_n} J_1(\mu_n) = \\ &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \frac{R^2 (QR^2 (\mu_n^2 - 4 - \mu_n^2) - 4kT\mu_n^2) \cdot J_1(\mu_n)}{4k\mu_n^3} = - \frac{2 (QR^2 + kT\mu_n^2)}{k\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$v(r; t) = - \frac{2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{QR^2 + kT\mu_n^2}{\mu_n^3 \cdot J_1(\mu_n)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 t} J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, и, наконец, для функции $u(r, t) = T + w(r) + v(r, t)$ получаем:

Ответ:

$$u(r; t) = T + \frac{Q(R^2 - r^2)}{4k} - \frac{2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{QR^2 + kT\mu_n^2}{\mu_n^3 \cdot J_1(\mu_n)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 t} J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

²Для случая, когда μ_n есть положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

1.26. № 780 а)

В начальный момент времени $t = 0$ температура бесконечной однородной трубы $b \leq r \leq d$ равна U . Найти распределение температуры в трубе при $t > 0$ если поверхности трубы поддерживаются при нулевой температуре.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f(r, t), & b < r < d, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi(r), & b < r < d; \\ u(b, t) = u(d, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.26.1)$$

при $f(r, t) \equiv 0$ и $\varphi(r) = U$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.26.1) в виде

$$u(r; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.26.2)$$

и предположить, что для $f(r, t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad (1.26.3)$$

то, подставив (1.26.2) и (1.26.3) в уравнение $u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}'_k(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \quad (1.26.4)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.26.5)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.26.1).

Условия $u(b, t) = 0$ и $u(d, t) = 0$ превратятся в

$$\mathbf{X}_k(b) = 0, \quad \mathbf{X}_k(d) = 0. \quad (1.26.6)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя с $\nu = 0$

$$\begin{cases} (r \mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), & b < r < d; \\ \mathbf{X}_k(b) = 0, \\ \mathbf{X}_k(d) = 0. \end{cases} \quad (1.26.7)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.1, стр. 2.

Общее решение уравнения Бесселя (1.1.1)

$$x^2 \mathbf{Z}''(x) + x \mathbf{Z}'(x) + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Z}(x) = 0 \quad (1.1.1)$$

задаётся формулой

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x), \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Наше уравнение $(r \mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r)$ обычной уже заменой

$$x = \sqrt{\lambda_k} r, \quad \lambda_k = \mu_k^2 \geq 0$$

сводится к уравнению

$$x^2 \mathbf{Z}''(x) + x \mathbf{Z}'(x) + x^2 \mathbf{Z}(x) = 0,$$

которое совпадает с (1.1.1) при $\nu = 0$. Поэтому его общее решение задаётся формулой

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda_k} r) + c_2 N_0(\sqrt{\lambda_k} r) = c_1 J_0(\mu_k r) + c_2 N_0(\mu_k r). \quad (1.26.8)$$

В силу краевых условий $\mathbf{X}_k(b) = 0$, $\mathbf{X}_k(d) = 0$ имеем

$$\begin{cases} c_1 J_0(\mu_k b) + c_2 N_0(\mu_k b) = 0, \\ c_1 J_0(\mu_k d) + c_2 N_0(\mu_k d) = 0. \end{cases} \quad (1.26.9)$$

Если рассматривать (1.26.9) как систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно переменных c_1 и c_2 , то, учитывая, что нас интересуют нетривиальные решения

$$c_1^2 + c_2^2 \neq 0,$$

определитель этой системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} J_0(\mu_k b) & N_0(\mu_k b) \\ J_0(\mu_k d) & N_0(\mu_k d) \end{vmatrix} = J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k d) - J_0(\mu_k d) N_0(\mu_k b) = 0. \quad (1.26.10)$$

Тогда, решив систему (1.26.9), получим

$$c_1 = N_0(\mu_k b), \quad c_2 = -J_0(\mu_k b). \quad (1.26.11)$$

Итак, при $\mu_k > 0$, при которых выполнено равенство (1.26.10), существует нетривиальное решение (1.26.8) задачи (1.26.7):

$$\mathbf{X}_k(r) = N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k r), \quad (1.26.12)$$

где μ_k – положительные решения уравнения (1.26.10)

$$J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k d) - J_0(\mu_k d) N_0(\mu_k b) = 0.$$

Шаг 3. Разложение функций $f(r, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

Выясним, какие формулы будут справедливы для коэффициентов разложения функции $\varphi(r)$ в ряд по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (1.26.7). В соответствии с теоремой 3.1.10, стр. 240, функция $f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \mathbf{X}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \left(N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k r) \right), \quad (1.26.13)$$

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{2}{\left(r^2 - \frac{\nu^2}{\mu_k^2} \right) \mathbf{Z}^2(\mu_k r) \Big|_{r=b}^{r=d} + r^2 (\mathbf{Z}')^2(\mu_k r) \Big|_{r=b}^{r=d}} \cdot \int_b^d r f(r, t) \mathbf{X}(r) dr = [\nu = 0] = \\ &= \frac{2}{d^2 (\mathbf{Z}^2(\mu_k d) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k d)) - b^2 (\mathbf{Z}^2(\mu_k b) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k b))} \cdot \int_b^d r f(r, t) \mathbf{X}(r) dr. \end{aligned}$$

Далее, так как $\mathbf{X}(r) = N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k r)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^2(\mu_k d) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k d) &= \underbrace{\left(N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k d) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k d) \right)^2}_{=0 \text{ в силу (1.26.10)}} + \\ &+ \mu_k^2 \left(N_0(\mu_k b) J_0'(\mu_k d) - J_0(\mu_k b) N_0'(\mu_k d) \right)^2 = \left[\text{в силу (1.26.10)} \quad N_0(\mu_k b) = \frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot N_0(\mu_k d) \right] = \\ &= \mu_k^2 \cdot \left(\frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \right)^2 \cdot \left(N_0(\mu_k d) J_0'(\mu_k d) - J_0(\mu_k d) N_0'(\mu_k d) \right)^2 = \\ &= \mu_k^2 \cdot \left(\frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \right)^2 \cdot \left| \begin{array}{cc} J_0(\mu_k d) & N_0(\mu_k d) \\ J_0'(\mu_k d) & N_0'(\mu_k d) \end{array} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^2(\mu_k b) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k b) &= \underbrace{\left(N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k b) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k b) \right)^2}_{=0 \text{ тождественно}} + \\ &+ \mu_k^2 \left(N_0(\mu_k b) J_0'(\mu_k b) - J_0(\mu_k b) N_0'(\mu_k b) \right)^2 = \mu_k^2 \left| \begin{array}{cc} J_0(\mu_k b) & N_0(\mu_k b) \\ J_0'(\mu_k b) & N_0'(\mu_k b) \end{array} \right|^2 \end{aligned}$$

Поскольку известно равенство (см. утверждение 3.1.1) для Вронскиана функций Бесселя и Неймана

$$W[J_\nu, N_\nu](x) = \left| \begin{array}{cc} J_\nu(x) & N_\nu(x) \\ J_\nu'(x) & N_\nu'(x) \end{array} \right| = \frac{2}{\pi x} \quad (3.1.12)$$

то

$$\begin{aligned} d^2 \left(\mathbf{Z}^2(\mu_k d) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k d) \right) - b^2 \left(\mathbf{Z}^2(\mu_k b) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k b) \right) = \\ = \mu_k^2 \left[d^2 \cdot \left(\frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \right)^2 \cdot \frac{4}{\pi^2 \mu_k^2 d^2} - b^2 \cdot \frac{4}{\pi^2 \mu_k^2 b^2} \right] = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)}{J_0^2(\mu_k d)} \end{aligned}$$

Итак,

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \mathbf{X}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \left(N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k r) \right), \quad (1.26.13)$$

$$f_k(t) = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2 [J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)]} \cdot \int_b^d r f(r, t) \mathbf{X}(r) dr. \quad (1.26.14)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \mathbf{X}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \left(N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k r) \right) \quad (1.26.15)$$

с коэффициентами

$$\varphi_k = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2 [J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)]} \cdot \int_b^d r \varphi(r) \mathbf{X}(r) dr. \quad (1.26.16)$$

Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомый вид (1.26.2), стр. 99, решения $u(r, t)$ и разложение (1.26.15) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.26.4), стр. 99, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2 [\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \quad (1.26.17)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + \frac{a^2 [\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = c e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R} \right)^2 t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2 [\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R} \right)^2 t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_k(t) e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int_0^t f_k(\tau) e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 \tau} d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{\text{оНo}}(t) = c_1 e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.26.18)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = vp_k$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_k.$$

Таким образом, решение задачи (1.26.17) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.26.19)$$

где $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.26.14) и (1.26.16).

Ответ в общем виде:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \left(N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k r) \right),$$

где μ_k – положительные решения уравнения (1.26.10)

$$J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k d) - J_0(\mu_k d) N_0(\mu_k b) = 0,$$

а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.26.14) и (1.26.16):

$$f_k(t) = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2 [J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)]} \cdot \int_b^d r f(r, t) \mathbf{X}(r) dr. \quad (1.26.14)$$

$$\varphi_k = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2 [J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)]} \cdot \int_b^d r \varphi(r) \mathbf{X}(r) dr. \quad (1.26.16)$$

Поскольку в нашем случае $f(r, t) \equiv 0$, а $\varphi(r) \equiv U$, то нам надо посчитать $\int_b^d r \varphi(r) \mathbf{X}(r) dr$.

$$\begin{aligned}
 \int_b^d r \varphi(r) \mathbf{X}(r) dr &= U \int_b^d r \left(N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k r) \right) dr = \\
 &= U N_0(\mu_k b) \int_b^d r J_0(\mu_k r) dr - U J_0(\mu_k b) \int_b^d r N_0(\mu_k r) dr = \left[x = \mu_k r, \quad \text{в силу (1.1.9)} \right] = \\
 &= \frac{U}{\mu_k^2} N_0(\mu_k b) \int_{\mu_k b}^{\mu_k d} \left[x J_1(x) \right]' dx - \frac{U}{\mu_k^2} J_0(\mu_k b) \int_{\mu_k b}^{\mu_k d} \left[x N_1(x) \right]' dx = \\
 &= \frac{Ud}{\mu_k} \left(N_0(\mu_k b) \underbrace{J_1(\mu_k d)}_{=-J_0'(\mu_k d)} - J_0(\mu_k b) \underbrace{N_1(\mu_k d)}_{=-N_0'(\mu_k d)} \right) - \frac{Ub}{\mu_k} \left(N_0(\mu_k b) \underbrace{J_1(\mu_k b)}_{=-J_0'(\mu_k b)} - J_0(\mu_k b) \underbrace{N_1(\mu_k b)}_{=-N_0'(\mu_k b)} \right) = \\
 &= \left[\text{в силу (1.26.10)} \quad N_0(\mu_k b) = \frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot N_0(\mu_k d) \right] = \\
 &= \frac{Ud}{\mu_k} \cdot \frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot \left(J_0(\mu_k d) N_0'(\mu_k d) - N_0(\mu_k d) J_0'(\mu_k d) \right) - \\
 &\quad - \frac{Ub}{\mu_k} \left(J_0(\mu_k b) N_0'(\mu_k b) - N_0(\mu_k b) J_0'(\mu_k b) \right) = \\
 &= \frac{Ud}{\mu_k} \cdot \frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot \left| \begin{array}{cc} J_0(\mu_k d) & N_0(\mu_k d) \\ J_0'(\mu_k d) & N_0'(\mu_k d) \end{array} \right| - \frac{Ub}{\mu_k} \cdot \left| \begin{array}{cc} J_0(\mu_k b) & N_0(\mu_k b) \\ J_0'(\mu_k b) & N_0'(\mu_k b) \end{array} \right| = \left[\text{в силу (3.1.12)} \right] = \\
 &= \frac{U}{\mu_k} \left[d \cdot \frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot \frac{2}{\pi \mu_k d} - b \cdot \frac{2}{\pi \mu_k b} \right] = \frac{2U}{\pi \mu_k^2} \cdot \frac{J_0(\mu_k b) - J_0(\mu_k d)}{J_0(\mu_k d)}.
 \end{aligned}$$

Поэтому для коэффициентов φ_k получаем формулу:

$$\begin{aligned}
 \varphi_k &= \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2 [J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)]} \cdot \int_b^d r \varphi(r) \mathbf{X}(r) dr = \\
 &= \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2 [J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)]} \cdot \frac{2U}{\pi \mu_k^2} \cdot \frac{J_0(\mu_k b) - J_0(\mu_k d)}{J_0(\mu_k d)} = \\
 &= \left[\text{по формуле разности квадратов} \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \Rightarrow \quad \frac{a - b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a + b} \right] = \\
 &= \frac{\pi U J_0(\mu_k d)}{\mu_k^2 (J_0(\mu_k b) + J_0(\mu_k d))}
 \end{aligned}$$

Итак, мы уже готовы записать

Ответ:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \left(N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k r) \right),$$

где μ_k – положительные решения уравнения (1.26.10)

$$J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k d) - J_0(\mu_k d) N_0(\mu_k b) = 0,$$

а φ_k задаются формулой:

$$\varphi_k = \frac{\pi U J_0(\mu_k d)}{\mu_k^2 (J_0(\mu_k b) + J_0(\mu_k d))}$$

1.27. № 780 Б)

В начальный момент времени $t = 0$ температура бесконечной однородной трубы $b \leq r \leq d$ равна U . Найти распределение температуры в трубе при $t > 0$ если внутренняя поверхность трубы теплоизолирована, а внешняя поддерживается при температуре T .

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f(r, t), & b < r < d, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi_1(r), & b < r < d; \\ u_r(b, t) = 0, \quad u(d, t) = T, & t > 0 \end{cases} \quad (1.27.1)$$

при $f(r, t) \equiv 0$ и $\varphi_1(r) = U$.

Шаг 0. Избавление от неоднородности в краевом условии

В данном случае естественно искать решение в виде суммы

$$u(r, t) = T + v(r, t).$$

Тогда функция $v(r, t)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f(r, t), & b < r < d, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ v_r(b, t) = 0, \quad v(d, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.27.2)$$

при $f(r, t) \equiv 0$ и $\varphi(r) = U - T$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.27.2) в виде

$$v(r; t) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \quad (1.27.3)$$

и предположить, что для $f(r, t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r; t) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad (1.27.4)$$

то, подставив (1.27.3) и (1.27.4) в уравнение $v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = a^2 \sum_{k=\dots}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}'_k(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}'_k(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \quad (1.27.5)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r} \right) \right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \quad (1.27.6)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.27.1).

Условия $v_r(b, t) = 0$ и $v(d, t) = 0$ превратятся в

$$\mathbf{X}'_k(b) = 0, \quad \mathbf{X}_k(d) = 0. \quad (1.27.7)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя с $\nu = 0$

$$\begin{cases} (r \mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), & b < r < d; \\ \mathbf{X}'_k(b) = 0, \\ \mathbf{X}_k(d) = 0. \end{cases} \quad (1.27.8)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.1, стр. 2.

Общее решение уравнения Бесселя (1.1.1)

$$x^2 \mathbf{Z}''(x) + x \mathbf{Z}'(x) + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Z}(x) = 0 \quad (1.1.1)$$

задаётся формулой

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x), \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Наше уравнение $(r \mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r)$ обычной уже заменой

$$x = \sqrt{\lambda_k} r, \quad \lambda_k = \mu_k^2 \geq 0$$

сводится к уравнению

$$x^2 \mathbf{Z}''(x) + x \mathbf{Z}'(x) + x^2 \mathbf{Z}(x) = 0,$$

которое совпадает с (1.1.1) при $\nu = 0$. Поэтому его общее решение задаётся формулой

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda_k} r) + c_2 N_0(\sqrt{\lambda_k} r) = c_1 J_0(\mu_k r) + c_2 N_0(\mu_k r). \quad (1.27.9)$$

В силу краевых условий $\mathbf{X}'_k(b) = \mathbf{X}_k(b) = 0$ имеем

$$\begin{cases} c_1 J'_0(\mu_k b) + c_2 N'_0(\mu_k b) = 0, \\ c_1 J_0(\mu_k d) + c_2 N_0(\mu_k d) = 0. \end{cases} \quad (1.27.10)$$

Если рассматривать (1.27.10) как систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно переменных c_1 и c_2 , то, учитывая, что нас интересуют нетривиальные решения

$$c_1^2 + c_2^2 \neq 0,$$

определитель этой системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} J'_0(\mu_k b) & N'_0(\mu_k b) \\ J_0(\mu_k d) & N_0(\mu_k d) \end{vmatrix} = J'_0(\mu_k b) N_0(\mu_k d) - J_0(\mu_k d) N'_0(\mu_k b) = 0. \quad (1.27.11)$$

Тогда, решив систему (1.27.10), получим

$$c_1 = N'_0(\mu_k b) \equiv -N_1(\mu_k b), \quad c_2 = -J'_0(\mu_k b) \equiv J_1(\mu_k b). \quad (1.27.12)$$

Итак, при $\mu_k > 0$, при которых выполнено равенство (1.27.11), существует нетривиальное решение (1.27.9) задачи (1.27.8):

$$\mathbf{X}_k(r) = J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k r) - N_1(\mu_k b) J_0(\mu_k r), \quad (1.27.13)$$

где μ_k – положительные решения уравнения (1.27.11)

$$J_0(\mu_k d) N_1(\mu_k b) - J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k d) = 0. \quad (1.27.11)$$

Шаг 3. Разложение функций $f(r, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

Выясним, какие формулы будут справедливы для коэффициентов разложения функции $\varphi(r)$ в ряд по системе собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (1.27.8). В соответствии с теоремой 3.1.10 (аналог теоремы Стеклова) и теоремой 3.1.11 о собственных функциях задачи Штурма–Лиувилля

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{Z}_k(x), \quad c_k = \frac{(f, \mathbf{Z}_k)}{\|\mathbf{Z}_k\|^2} = \frac{\int_a^b x f(x) \mathbf{Z}_k(x) dx}{\int_a^b x \mathbf{Z}_k^2(x) dx}, \quad \text{где}$$

$$\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2 = \int_a^b r \mathbf{Z}(\mu r) dr = \frac{1}{2} \left[\left(r^2 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) \mathbf{Z}^2(\mu r) \Big|_{r=a}^{r=b} + r^2 (\mathbf{Z}')^2(\mu r) \Big|_{r=a}^{r=b} \right].$$

Поэтому функция $f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \mathbf{X}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \left(J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k r) - N_1(\mu_k b) J_0(\mu_k r) \right), \quad (1.27.14)$$

$$f_k(t) = \frac{2}{d^2 (\mathbf{Z}^2(\mu_k d) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k d)) - b^2 (\mathbf{Z}^2(\mu_k b) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k b))} \cdot \int_b^d r f(r, t) \mathbf{X}(r) dr.$$

Далее, так как $\mathbf{X}(r) = J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k r) - N_1(\mu_k b) J_0(\mu_k r)$,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}^2(\mu_k d) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k d) &= \underbrace{\left(J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k d) - N_1(\mu_k b) J_0(\mu_k d) \right)^2}_{=0 \text{ в силу (1.27.11)}} + \\
 &\quad + \mu_k^2 \left(J_1(\mu_k b) N_0'(\mu_k d) - N_1(\mu_k b) J_0'(\mu_k d) \right)^2 = \\
 &= \left[\text{так как } \mu_k - \text{корни (1.27.11), } N_1(\mu_k b) = \frac{J_1(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} N_0(\mu_k d) \right] = \mu_k^2 \left(\frac{J_1(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \right)^2 \cdot \\
 &\quad \cdot \left[J_0(\mu_k d) N_0'(\mu_k d) - N_0(\mu_k d) J_0'(\mu_k d) \right]^2 = \mu_k^2 \left(\frac{J_1(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \right)^2 \cdot \left| \begin{array}{cc} J_0(\mu_k d) & N_0(\mu_k d) \\ J_0'(\mu_k d) & N_0'(\mu_k d) \end{array} \right|^2 \\
 \\
 \mathbf{Z}^2(\mu_k b) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k b) &= \left(J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k b) - N_1(\mu_k b) J_0(\mu_k b) \right)^2 + \\
 &\quad + \mu_k^2 \underbrace{\left(J_1(\mu_k b) N_0'(\mu_k b) - N_1(\mu_k b) J_0'(\mu_k b) \right)^2}_{=0 \text{ тождественно}} = \mu_k^2 \left| \begin{array}{cc} J_0(\mu_k b) & N_0(\mu_k b) \\ J_0'(\mu_k b) & N_0'(\mu_k b) \end{array} \right|^2
 \end{aligned}$$

В силу тождества о Вронскиане из утверждения 3.1.1

$$W[J_\nu, N_\nu](x) = \left| \begin{array}{cc} J_\nu(x) & N_\nu(x) \\ J_\nu'(x) & N_\nu'(x) \end{array} \right| = \frac{2}{\pi x}, \quad (3.1.12)$$

$$\begin{aligned}
 d^2 \left(\mathbf{Z}^2(\mu_k d) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k d) \right) - b^2 \left(\mathbf{Z}^2(\mu_k b) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k b) \right) &= \\
 = d^2 \mu_k^2 \left(\frac{J_1(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \right)^2 \cdot \left(\frac{2}{\pi \mu_k d} \right)^2 - b^2 \mu_k^2 \left(\frac{2}{\pi \mu_k b} \right)^2 &= \\
 = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{J_1^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)}{J_0^2(\mu_k d)}
 \end{aligned}$$

Итак,

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \mathbf{X}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \left(J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k r) - N_1(\mu_k b) J_0(\mu_k r) \right), \quad (1.27.14)$$

$$f_k(t) = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2(J_1^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d))} \cdot \int_b^d r f(r, t) \mathbf{X}(r) dr. \quad (1.27.15)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \mathbf{X}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \left(J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k r) - N_1(\mu_k b) J_0(\mu_k r) \right) \quad (1.27.16)$$

с коэффициентами

$$\varphi_k = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2(J_1^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d))} \cdot \int_b^d r \varphi(r) \mathbf{X}(r) dr. \quad (1.27.17)$$

Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$

Если искомый вид (1.27.3), стр. 105, решения $u(r, t)$ и разложение (1.27.16) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.27.5), стр. 106, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2} \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \quad (1.27.18)$$

Эту задачу мы уже решали не раз (например, в № 780 а)), воспользуемся результатом:

$$\mathbf{T}_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.27.19)$$

Ответ в общем виде:

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \left(J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k r) - N_1(\mu_k b) J_0(\mu_k r) \right),$$

где μ_k – положительные решения уравнения (1.27.11)

$$J_0(\mu_k d) N_1(\mu_k b) - J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k d) = 0.$$

а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами (1.27.15) и (1.27.17):

$$f_k(t) = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2(J_1^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d))} \cdot \int_b^d r f(r, t) \mathbf{X}(r) dr, \quad (1.27.15)$$

$$\varphi_k = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2(J_1^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d))} \cdot \int_b^d r \varphi(r) \mathbf{X}(r) dr. \quad (1.27.17)$$

Поскольку в нашем случае $f(r, t) \equiv 0$, а $\varphi(r) \equiv U - T$, то нам надо посчитать $\int_b^d r \varphi(r) \mathbf{X}(r) dr$.

$$\begin{aligned}
 \int_b^d r \varphi(r) \mathbf{X}(r) dr &= (U - T) \int_b^d r \left(J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k r) - N_1(\mu_k b) J_0(\mu_k r) \right) dr = \\
 &= (U - T) J_1(\mu_k b) \int_b^d r N_0(\mu_k r) dr - (U - T) N_1(\mu_k b) \int_b^d r J_0(\mu_k r) dr = \left[x = \mu_k r \right] = \\
 &= \frac{(U - T)}{\mu_k^2} J_1(\mu_k b) \int_{\mu_k b}^{\mu_k d} \left[x N_1(x) \right]' dx - \frac{U - T}{\mu_k^2} N_1(\mu_k b) \int_{\mu_k b}^{\mu_k d} \left[x J_1(x) \right]' dx = \\
 &= \frac{(U - T)d}{\mu_k} \left(J_1(\mu_k b) N_1(\mu_k d) - N_1(\mu_k b) J_1(\mu_k d) \right) - \\
 &\quad - \frac{(U - T)b}{\mu_k} \left(\underbrace{J_1(\mu_k b) N_1(\mu_k b) - N_1(\mu_k b) J_1(\mu_k b)}_{=0 \text{ тождественно}} \right) = \\
 &= \left[\text{так как } \mu_k - \text{корни (1.27.11), } N_1(\mu_k b) = \frac{J_1(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} N_0(\mu_k d) \right] = \\
 &= \frac{(U - T)d}{\mu_k} \cdot \frac{J_1(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot \left(J_0(\mu_k d) \underbrace{N_1(\mu_k d)}_{=-N'_0(\mu_k d)} - N_0(\mu_k d) \underbrace{J_1(\mu_k d)}_{=-J'_0(\mu_k d)} \right) = \\
 &= \frac{(T - U)d}{\mu_k} \cdot \frac{J_1(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot \left(J_0(\mu_k d) N'_0(\mu_k d) - N_0(\mu_k d) J'_0(\mu_k d) \right) = \\
 &= \frac{(T - U)d}{\mu_k} \cdot \frac{J_1(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot \left| \begin{array}{cc} J_0(\mu_k d) & N_0(\mu_k d) \\ J'_0(\mu_k d) & N'_0(\mu_k d) \end{array} \right| = \left[\text{в силу (3.1.12)} \right] = \\
 &= \frac{(T - U)d}{\mu_k} \cdot \frac{J_1(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot \frac{2}{\pi \mu_k d} = \frac{2(T - U)}{\pi \mu_k^2} \cdot \frac{J_1(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)}.
 \end{aligned}$$

Поэтому для коэффициентов φ_k получаем формулу:

$$\begin{aligned}
 \varphi_k &= \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2(J_1^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d))} \cdot \int_b^d r \varphi(r) \mathbf{X}(r) dr = \\
 &= \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2(J_1^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d))} \cdot \frac{2(T - U)}{\pi \mu_k^2} \cdot \frac{J_1(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} = \frac{\pi(T - U) J_0(\mu_k d) J_1(\mu_k b)}{\mu_k^2 (J_1^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d))}
 \end{aligned}$$

Итак, мы уже готовы записать

Ответ:

$$u(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \left(J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k r) - N_1(\mu_k b) J_0(\mu_k r) \right),$$

где μ_k – положительные решения уравнения (1.27.11)

$$J_0(\mu_k d) N_1(\mu_k b) - J_1(\mu_k b) N_0(\mu_k d) = 0.$$

а φ_k задаются формулой:

$$\varphi_k = \frac{\pi(T - U) J_0(\mu_k d) J_1(\mu_k b)}{\mu_k^2 (J_1^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d))}$$

1.28. № 780 В)

В начальный момент времени $t = 0$ температура бесконечной однородной трубы $b \leq r \leq d$ равна U . Найти распределение температуры в трубе при $t > 0$ если в трубе действуют постоянные источники тепла плотности Q , а её поверхности поддерживаются при температуре U .

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f(r, t), & b < r < d, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = \varphi_1(r), & b < r < d; \\ u(b, t) = u(d, t) = U, & t > 0 \end{cases} \quad (1.28.1)$$

при $f(r, t) = \frac{Q}{c\rho}$ и $\varphi_1(r) = U$.

Шаг 0. Избавление от неоднородности в краевых условиях

В данном случае естественно искать решение в виде суммы

$$u(r, t) = U + v(r, t).$$

Тогда функция $v(r, t)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f(r, t), & b < r < d, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R; \\ v_r(b, t) = 0, \quad v(d, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.28.2)$$

при $f(r, t) = \frac{Q}{c\rho}$ и $\varphi(r) \equiv 0$.

Шаг 1. Решение задачи (1.28.1)

Эту задачу мы уже полностью решили в № 780 а). Воспользуемся результатом:

Ответ в общем виде:

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \left(N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k r) \right),$$

где μ_k – положительные решения уравнения

$$J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k d) - J_0(\mu_k d) N_0(\mu_k b) = 0, \quad (1.28.3)$$

а $f_k(t)$ и φ_k задаются формулами:

$$f_k(t) = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2 [J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)]} \cdot \int_b^d r f(r, t) \mathbf{X}(r) dr. \quad (1.28.4)$$

$$\varphi_k = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2 [J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)]} \cdot \int_b^d r \varphi(r) \mathbf{X}(r) dr. \quad (1.28.5)$$

Поскольку в нашем случае $f(r, t) = \frac{Q}{c\rho}$, а $\varphi(r) \equiv 0$, то нам надо посчитать $\int_b^d r f(r, t) \mathbf{X}(r) dr$.

$$\begin{aligned}
 \int_b^d r f(r, t) \mathbf{X}(r) dr &= \frac{Q}{c\rho} \int_b^d r \left(N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k r) \right) dr = \\
 &= \frac{Q}{c\rho} N_0(\mu_k b) \int_b^d r J_0(\mu_k r) dr - \frac{Q}{c\rho} J_0(\mu_k b) \int_b^d r N_0(\mu_k r) dr = \left[x = \mu_k r \right] = \\
 &= \frac{Q}{c\rho\mu_k^2} N_0(\mu_k b) \int_{\mu_k b}^{\mu_k d} \left[x J_1(x) \right]' dx - \frac{Q}{c\rho\mu_k^2} J_0(\mu_k b) \int_{\mu_k b}^{\mu_k d} \left[x N_1(x) \right]' dx = \\
 &= \frac{Qd}{c\rho\mu_k} \left(N_0(\mu_k b) \underbrace{J_1(\mu_k d)}_{=-J_0'(\mu_k d)} - J_0(\mu_k b) \underbrace{N_1(\mu_k d)}_{=-N_0'(\mu_k d)} \right) - \frac{Qb}{c\rho\mu_k} \left(N_0(\mu_k b) \underbrace{J_1(\mu_k b)}_{=-J_0'(\mu_k b)} - J_0(\mu_k b) \underbrace{N_1(\mu_k b)}_{=-N_0'(\mu_k b)} \right) = \\
 &= \frac{Qd}{c\rho\mu_k} \left(J_0(\mu_k b) N_0'(\mu_k d) - N_0(\mu_k b) J_0'(\mu_k d) \right) - \frac{Qb}{c\rho\mu_k} \cdot \begin{vmatrix} J_0(\mu_k b) & N_0(\mu_k b) \\ J_0'(\mu_k b) & N_0'(\mu_k b) \end{vmatrix} = \\
 &= \left[\text{в силу (1.26.10)} \quad N_0(\mu_k b) = \frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot N_0(\mu_k d) \right] = \\
 &= \frac{Qd}{c\rho\mu_k} \cdot \frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot \left(J_0(\mu_k d) N_0'(\mu_k d) - N_0(\mu_k d) J_0'(\mu_k d) \right) - \\
 &\quad - \frac{Qb}{c\rho\mu_k} \cdot \begin{vmatrix} J_0(\mu_k b) & N_0(\mu_k b) \\ J_0'(\mu_k b) & N_0'(\mu_k b) \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{Ud}{\mu_k} \cdot \frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot \begin{vmatrix} J_0(\mu_k d) & N_0(\mu_k d) \\ J_0'(\mu_k d) & N_0'(\mu_k d) \end{vmatrix} - \frac{Qb}{c\rho\mu_k} \cdot \begin{vmatrix} J_0(\mu_k b) & N_0(\mu_k b) \\ J_0'(\mu_k b) & N_0'(\mu_k b) \end{vmatrix} = \left[\text{в силу (3.1.12)} \right] = \\
 &= \frac{Q}{c\rho\mu_k} \cdot \left[d \cdot \frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)} \cdot \frac{2}{\pi\mu_k d} - b \cdot \frac{2}{\pi\mu_k b} \right] = \frac{2Q}{\pi c\rho\mu_k^2} \cdot \frac{J_0(\mu_k b) - J_0(\mu_k d)}{J_0(\mu_k d)}.
 \end{aligned}$$

Поэтому для коэффициентов $f_k(t)$ получаем формулу:

$$\begin{aligned}
 f_k(t) &= \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2 [J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)]} \cdot \int_b^d r f(r, t) \mathbf{X}(r) dr = \\
 &= \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2 [J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)]} \cdot \frac{2Q}{\pi c\rho\mu_k^2} \cdot \frac{J_0(\mu_k b) - J_0(\mu_k d)}{J_0(\mu_k d)} = \\
 &= \left[\text{по формуле разности квадратов } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \Rightarrow \frac{a - b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a + b} \right] = \\
 &= \frac{\pi Q J_0(\mu_k d)}{c\rho\mu_k^2 (J_0(\mu_k b) + J_0(\mu_k d))}
 \end{aligned}$$

Итак, мы будем готовы записать ответ задачи (1.28.2)

$$v(r; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \left(N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k r) \right),$$

как только посчитаем интегралы $\int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau$. Это просто, поскольку в нашем случае $f_k(\tau) \equiv \text{const}$.

$$\begin{aligned} \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau &= f_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \int_0^t e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 \tau} d\tau = f_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \cdot \frac{R^2}{\mu_k^2 a^2} \cdot \left(e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} - 1 \right) = \\ &= \frac{R^2 f_k}{\mu_k^2 a^2} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \right) \end{aligned}$$

Наконец, поскольку $u(r; t) = v(r; t) + U$,

Ответ:

$$u(r; t) = U + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^2 f_k}{\mu_k^2 a^2} \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} \right) \cdot \left(N_0(\mu_k b) J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k r) \right),$$

где μ_k – положительные решения уравнения (1.28.3)

$$J_0(\mu_k b) N_0(\mu_k d) - J_0(\mu_k d) N_0(\mu_k b) = 0,$$

а f_k задаются формулой:

$$f_k = \frac{\pi Q J_0(\mu_k d)}{c \rho \mu_k^2 (J_0(\mu_k b) + J_0(\mu_k d))}$$

Замечание 1.28.1. Ответ к примеру № 780 в) записаны в форме, отличной от формы ответа в задачнике. Чтобы получить ответ такого же вида, надо искать решение не в виде

$$u(r; t) = v(r; t) + U,$$

а в виде

$$u(r; t) = v(r; t) + U + w(r),$$

который позволяет явно выделить стационарную (то есть не зависящую от времени) составляющую часть решения.

1.29. № 781 а)

Считая начальную температура однородного цилиндра $0 \leq r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 < z < l$ равной нулю, определить распределение температуры в цилиндре при $t > 0$ для случая, когда поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре U .

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left(\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} \right) + f(r, z; t), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(r, z; 0) = \varphi_1(r), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0, z; t)| < \infty, \quad u(R, z; t) = U & 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(r, 0; t) = u(r, l; t) = U, & 0 \leq r < R, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1.29.1)$$

при $f(r, z; t) \equiv 0$ и $\varphi_1(r, z) \equiv 0$.

Шаг 0. Избавление от неоднородности в краевых условиях

Поскольку на всей границе цилиндра задано одно и то же условие I-го рода с функцией, равной тождественно константе, естественно искать решение задачи (1.29.1) в виде:

$$u(r, z; t) = U + v(r, z; t), \quad (1.29.2)$$

где функция $v(r, z; t)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} v_t = a^2 \left(\frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} \right) + f(r, z; t), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0; \\ v(r, z; 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |v(0, z; t)| < \infty, \quad v(R, z; t) = 0 & 0 < z < l, \quad t > 0; \\ v(r, 0; t) = v(r, l; t) = 0, & 0 \leq r < R, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1.29.3)$$

при $f(r, z; t) \equiv 0$ и $\varphi(r, z) = -U$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.29.3) в виде

$$v(r, z; t) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \sum_{n=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t), \quad (1.29.4)$$

то, подставив (1.29.4) в уравнение $v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} + f$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k,n=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}'_{kn}(t) = \\ = a^2 \sum_{k,n=\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_n(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_n(z) \right) \mathbf{T}_{kn}(t) + \sum_{k,n=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) f_{kn}(t). \end{aligned}$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}'_{kn}(t) = \frac{a^2}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t) + a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) f_{kn}(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2 \mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r и z , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_{kn} \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2 \mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)} = -\lambda_{kn}.$$

С другой стороны, сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть константой в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – константа. То есть

$$\exists \eta_k, \nu_n \in \mathbb{R} : \quad \eta_k + \nu_n = \lambda_{kn}, \quad \text{и} \quad (1.29.5)$$

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = \eta_k, \quad \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)} = \nu_n.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$, $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \quad (1.29.6)$$

$$\frac{1}{r} \cdot (r \mathbf{X}'_k(r))' + \eta_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.29.7)$$

$$\mathbf{Z}''_n(z) + \nu_k \mathbf{Z}_n(z) = 0. \quad (1.29.8)$$

Равенство (1.29.7) мы перепишем в виде:

$$- \frac{1}{r} \cdot (r \mathbf{X}'_k(r))' = \eta_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.29.9)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.29.3).

Условие $|v(0, z; t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.29.10)$$

а условие $v(R, z; t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.29.11)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\lambda = \eta_k$, $\nu = 0$, $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} - (r \mathbf{X}'_k(r))' = \eta_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.29.12)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\eta = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $v(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.29.12) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\eta_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.29.12) имеют вид:

$$\begin{cases} \eta_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k - \text{ корни уравнения } & J_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.29.13)$$

Шаг 3. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $Z_n(z)$

Для функций $Z_n(z)$ мы получили уравнение (1.29.8) $Z_n''(z) + \nu_n Z_n(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий $v(r, 0; t) = v(r, l; t) = 0$, $0 \leq r < R$, $t > 0$, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} Z_n''(z) + \nu_n Z_n(z) = 0, \\ Z_n(0) = 0, \\ Z_n(l) = 0. \end{cases} \quad (1.29.14)$$

Эту задачу мы неоднократно решали, выпишем результат:

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.29.14) имеют вид:

$$\nu_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad Z_n(z) = \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.29.15)$$

Шаг 4. Разложение функций $f(r, z; t)$ и $\varphi(r, z)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, z; t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z; t) J_0(\mu_k r), \quad (1.29.16)$$

$$\begin{aligned} f_k(z; t) &= \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2} \left[J_0'(\mu_k) \right]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) \underbrace{J_0^2(\mu_k)}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \end{aligned}$$

Итак,

$$f_k(z; t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) J_0(\mu_k r) \quad \text{с коэффициентами}$$

$$\varphi_k(z) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

В свою очередь, каждая из функций $f_k(z; t)$ и $\varphi_k(z)$ могут быть разложены в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (1.29.14), в результате получаем следующие представления функций $f(r, z; t)$ и $\varphi(r, z)$:

$$f(r, z; t) = \sum_{k,n=1}^{\infty} f_{kn}(t) J_0(\mu_k r) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right), \quad (1.29.17)$$

$$f_{kn}(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \frac{2}{l} \cdot \int_0^R \left(\int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dz.$$

Итак,

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{l R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dr dz. \quad (1.29.18)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \varphi_{kn} J_0(\mu_k r) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.29.19)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{l R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dr dz. \quad (1.29.20)$$

Шаг 5. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_{kn}(t)$

Если искомый вид (1.29.4), стр. 114, решения $v(r, t)$ и разложение (1.29.19) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$v(r, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn} \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$:

$$\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.29.6), стр. 115, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}. \end{cases} \quad (1.29.21)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = c e^{-a^2 \lambda_{kn} t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t) e^{-a^2 \lambda_{kn} t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_{kn}(t) e^{a^2 \lambda_{kn} t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int_0^t f_{kn}(\tau) e^{a^2 \lambda_{kn} \tau} d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{\text{oHo}}(t) = c_1 e^{-a^2 \lambda_{kn} t} + \int_0^t f_{kn}(\tau) e^{-a^2 \lambda_{kn} (t-\tau)} d\tau. \quad (1.29.22)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_{kn}.$$

Таким образом, решение задачи (1.29.21) имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \varphi_{kn} e^{-\lambda_{kn} a^2 t} + \int_0^t f_{kn}(\tau) e^{-\lambda_{kn} a^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.29.23)$$

где $f_{kn}(t)$ и φ_k задаются формулами (1.29.18) и (1.29.20).

Ответ в общем виде:

$$v(r, z; t) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\lambda_{kn} a^2 t} + \int_0^t f_{kn}(\tau) e^{-\lambda_{kn} a^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left(\frac{\pi n z}{l} \right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, $\lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k}{R} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$ а $f_{kn}(t)$ и φ_k задаются формулами (1.29.18) и (1.29.20):

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{l R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r f(r, z; t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left(\frac{\pi n z}{l} \right) dr dz. \quad (1.29.18)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{l R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left(\frac{\pi n z}{l} \right) dr dz. \quad (1.29.20)$$

Поскольку в нашем случае $f(r, z; t) \equiv 0$, а $\varphi(r, z) \equiv -U$, то все $f_{kn} = 0$, а для вычисления φ_{kn} нам надо найти интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R} \right] = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1 \right] = \\ &= \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} \left[x J_1(x) \right]' dx = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \left(x J_1(x) \right) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} = \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k). \end{aligned} \quad (1.29.24)$$

Тогда для φ_{kn} мы получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{kn} &= \frac{4}{l R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left(\frac{\pi n z}{l} \right) dr dz = \\ &= \frac{4U}{l R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \left(\frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k) \right) \sin \left(\frac{\pi n z}{l} \right) dz = \\ &= \frac{4U}{l \mu_k J_1(\mu_k)} \cdot \int_0^l \sin \left(\frac{\pi n z}{l} \right) dz = \frac{4U}{l \mu_k J_1(\mu_k)} \cdot \frac{l}{\pi n} \left(-\cos \left(\frac{\pi n z}{l} \right) \right) \Big|_{z=0}^{z=l} = \\ &= \frac{4U}{\pi n \mu_k J_1(\mu_k)} \cdot (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{8U}{\pi(2m-1)\mu_k J_1(\mu_k)}, & n = 2m - 1; \\ 0, & n = 2m, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, мы уже знаем функцию

$$v(r, z; t) = \frac{8U}{\pi} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)\mu_k J_1(\mu_k)} e^{-\lambda_{k(2m-1)} a^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2m-1)z}{l}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $\lambda_{k(2m-1)} = \left(\frac{\mu_k}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi(2m-1)}{l}\right)^2$. Итак,

Ответ:

$$u(r, z; t) = U + \frac{8U}{\pi} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)\mu_k J_1(\mu_k)} e^{-\lambda_{k(2m-1)} a^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2m-1)z}{l}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $\lambda_{k(2m-1)} = \left(\frac{\mu_k}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi(2m-1)}{l}\right)^2$.

1.30. № 781 Б)

Считая начальную температура однородного цилиндра $0 \leq r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 < z < l$ равной нулю, определить распределение температуры в цилиндре при $t > 0$ для случая, когда температура нижнего основания поддерживается равной U , а верхнее основание и боковая поверхность цилиндра теплоизолированы.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left(\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} \right) + f(r, z; t), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(r, z; 0) = \varphi_1(r), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0, z; t)| < \infty, \quad u_r(R, z; t) = 0 & 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(r, 0; t) = U, \quad u_z(r, l; t) = 0, & 0 \leq r < R, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1.30.1)$$

при $f(r, z; t) \equiv 0$ и $\varphi_1(r, z) \equiv 0$.

Шаг 0. Избавление от неоднородности в краевых условиях

Поскольку на той части границы цилиндра, где задано граничное условие I-го рода, температура постоянна, а все остальные граничные условия II-го рода, естественно искать решение задачи (1.30.1) в виде:

$$u(r, z; t) = U + v(r, z; t), \quad (1.30.2)$$

где функция $v(r, z; t)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} v_t = a^2 \left(\frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} \right) + f(r, z; t), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0; \\ v(r, z; 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |v(0, z; t)| < \infty, \quad v_r(R, z; t) = 0 & 0 < z < l, \quad t > 0; \\ v(r, 0; t) = v_z(r, l; t) = 0, & 0 \leq r < R, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1.30.3)$$

при $f(r, z; t) \equiv 0$ и $\varphi(r, z) = -U$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.30.3) в виде

$$v(r, z; t) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \sum_{n=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t), \quad (1.30.4)$$

то, подставив (1.30.4) в уравнение $v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} + f$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k,n=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}'_{kn}(t) &= \\ &= a^2 \sum_{k,n=\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_n(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_n(z) \right) \mathbf{T}_{kn}(t) + \sum_{k,n=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) f_{kn}(t). \end{aligned}$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}'_{kn}(t) = \frac{a^2}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t) + a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) f_{kn}(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2 \mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r и z , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_{kn} \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2 \mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)} = -\lambda_{kn}.$$

С другой стороны, сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть константой в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – константа. То есть

$$\begin{aligned} \exists \eta_k, \nu_n \in \mathbb{R} : \quad \eta_k + \nu_n &= \lambda_{kn}, \quad \text{и} \\ \frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} &= \eta_k, \quad \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)} = \nu_n. \end{aligned} \quad (1.30.5)$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$, $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \quad (1.30.6)$$

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' + \eta_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.30.7)$$

$$\mathbf{Z}''_n(z) + \nu_k \mathbf{Z}_n(z) = 0. \quad (1.30.8)$$

Равенство (1.30.7) мы перепишем в виде:

$$- \frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' = \eta_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.30.9)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.30.3).

Условие $|v(0, z; t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.30.10)$$

а условие $v_r(R, z; t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}'_k(R) = 0. \quad (1.30.11)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\lambda = \eta_k$, $\nu = 0$, $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} - (r\mathbf{X}'_k(r))' = \eta_k r \mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}'_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.30.12)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\eta = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $v(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\nu = \alpha = 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.30.12) имеет собственное значение $\eta_0 = 0$ и соответствующую ему собственную функцию

$$\mathbf{X}_0(r) = 1.$$

Остальные её строго положительные собственные значения находятся из

теоремы 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\eta_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.30.12) имеют вид:

$$\begin{cases} \eta_0 = 0 & \mathbf{X}_0(r) = 1 \\ \eta_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & \mathbf{X}_k = J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k \text{ – корни уравнения} & J_1(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.30.13)$$

Шаг 3. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_n(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_n(z)$ мы получили уравнение (1.30.8) $\mathbf{Z}_n''(z) + \nu_n \mathbf{Z}_n(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий $v(r, 0; t) = v_z(r, l; t) = 0$, $0 \leq r < R$, $t > 0$, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_n''(z) + \nu_n \mathbf{Z}_n(z) = 0, \\ \mathbf{Z}_n(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_n'(l) = 0. \end{cases} \quad (1.30.14)$$

Эту задачу мы неоднократно решали, выпишем результат:

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.30.14) имеют вид:

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} \right)^2, \quad \mathbf{Z}_n(z) = \sin \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.30.15)$$

Шаг 4. Разложение функций $f(r, z; t)$ и $\varphi(r, z)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, z; t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, z; t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z; t) J_0(\mu_k r), \quad (1.30.16)$$

$$f_k(z; t) = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2} \left[J_0'(\mu_k) \right]^2}_{=0} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr =$$

$$= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr.$$

Итак,

$$f_k(z; t) = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr.$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z) J_0(\mu_k r) \quad \text{с коэффициентами}$$

$$\varphi_k(z) = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r, z) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr.$$

В свою очередь, каждая из функций $f_k(z; t)$ и $\varphi_k(z)$ могут быть разложены в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (1.30.14), в результате получаем следующие представления функций $f(r, z; t)$ и $\varphi(r, z)$:

$$f(r, z; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{kn}(t) J_0(\mu_k r) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right), \quad (1.30.17)$$

$$f_{kn}(t) = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{2}{l} \cdot \int_0^R \left(\int_0^R r f(r, z; t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr \right) \sin \left(\frac{\pi n z}{l} \right) dz.$$

Итак,

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{l R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r f(r, z; t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) dr dz. \quad (1.30.18)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn} J_0(\mu_k r) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.30.19)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{l R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) dr dz. \quad (1.30.20)$$

Шаг 5. Составление и решение задачи для $T_{kn}(t)$

Если искомый вид (1.30.4), стр. 119, решения $v(r, t)$ и разложение (1.30.19) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$v(r, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$:

$$\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.30.6), стр. 120, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}. \end{cases} \quad (1.30.21)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = ce^{-a^2\lambda_{kn}t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t)e^{-a^2\lambda_{kn}t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_{kn}(t)e^{a^2\lambda_{kn}t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{a^2\lambda_{kn}\tau}d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{OHO}(t) = c_1e^{-a^2\lambda_{kn}t} + \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)}d\tau. \quad (1.30.22)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_{kn}.$$

Таким образом, решение задачи (1.30.21) имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \varphi_{kn}e^{-\lambda_{kn}a^2t} + \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-\lambda_{kn}a^2(t-\tau)}d\tau. \quad (1.30.23)$$

где $f_{kn}(t)$ и φ_k задаются формулами (1.30.18) и (1.30.20).

Ответ в общем виде:

$$v(r, z; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_{kn}e^{-\lambda_{kn}a^2t} + \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-\lambda_{kn}a^2(t-\tau)}d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right),$$

где $\mu_0 = 0$, μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, $\lambda_{kn} = \frac{\mu_k^2}{R^2} + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$, а $f_{kn}(t)$ и φ_k задаются формулами (1.30.18) и (1.30.20):

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{lR^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz. \quad (1.30.18)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{lR^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz. \quad (1.30.20)$$

Поскольку в нашем случае $f(r, z; t) \equiv 0$, а $\varphi(r, z) \equiv -U$, то все $f_{kn} = 0$, а для вычисления φ_{kn} нам надо найти интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1\right] = \\ &= \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} \left[x J_1(x)\right]' dx = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \left(x J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k}\right) = \frac{R^2}{\mu_k} \underbrace{J_1(\mu_k)}_{=0} = 0, \quad k \neq 0. \end{aligned} \quad (1.43.17)$$

Тогда для φ_{kn} мы получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{kn} &= \frac{4}{lR^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \underbrace{\int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr}_{=0} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dz = 0, \quad k \neq 0. \\ \varphi_{0n} &= \frac{4}{lR^2 \underbrace{J_0^2(\mu_0)}_{=J_0^2(0)=1}} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) \underbrace{J_0\left(\frac{\mu_0 r}{R}\right)}_{=J_0(0)=1} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz = \\ &= \frac{4U}{lR^2} \cdot \int_0^R r dr \int_0^l \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dz = \\ &= \frac{4U}{lR^2} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \frac{2l}{\pi(2n-1)} \left(-\cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right)\right) \Big|_{z=0}^{z=l} = \\ &= \frac{4U}{\pi(2n-1)} \cdot (1-0) = \frac{4U}{\pi(2n-1)} \end{aligned}$$

Таким образом, мы уже знаем функцию

$$v(r, z; t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-\lambda_{0n} a^2 t} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right),$$

где $\lambda_{0n} = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$. Итак,

Ответ:

$$u(r, z; t) = U + \frac{4U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-\lambda_{0n} a^2 t} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right),$$

где $\lambda_{0n} = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$.

1.31. № 781 В)

Считая начальную температура однородного цилиндра $0 \leq r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 < z < l$ равной нулю, определить распределение температуры в цилиндре при $t > 0$ для случая, когда температура боковой поверхности поддерживается равной U , а основания цилиндра теплоизолированы.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left(\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} \right) + f(r, z; t), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(r, z; 0) = \varphi_1(r), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0, z; t)| < \infty, \quad u(R, z; t) = U & 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u_z(r, 0; t) = u_z(r, l; t) = 0, & 0 \leq r < R, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1.31.1)$$

при $f(r, z; t) \equiv 0$ и $\varphi_1(r, z) \equiv 0$.

Шаг 0. Избавление от неоднородности в краевых условиях

Поскольку на той части границы цилиндра, где задано граничное условие I-го рода, температура постоянна, а все остальные граничные условия II-го рода, естественно искать решение задачи (1.31.1) в виде:

$$u(r, z; t) = U + v(r, z; t), \quad (1.31.2)$$

где функция $v(r, z; t)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} v_t = a^2 \left(\frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} \right) + f(r, z; t), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0; \\ v(r, z; 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |v(0, z; t)| < \infty, \quad v(R, z; t) = 0 & 0 < z < l, \quad t > 0; \\ v_z(r, 0; t) = v_z(r, l; t) = 0, & 0 \leq r < R, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1.31.3)$$

при $f(r, z; t) \equiv 0$ и $\varphi(r, z) = -U$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.31.3) в виде

$$v(r, z; t) = \sum_{k=...}^{\infty} \sum_{n=...}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t), \quad (1.31.4)$$

то, подставив (1.31.4) в уравнение $v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} + f$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k,n=...}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}'_{kn}(t) = \\ = a^2 \sum_{k,n=...}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r \mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_n(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_n(z) \right) \mathbf{T}_{kn}(t) + \sum_{k,n=...}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) f_{kn}(t). \end{aligned}$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}'_{kn}(t) = \frac{a^2}{r} \cdot (r \mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t) + a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) f_{kn}(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2 \mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot (r \mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r и z , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_{kn} \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2 \mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot (r \mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)} = -\lambda_{kn}.$$

С другой стороны, сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть константой в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – константа. То есть

$$\begin{aligned} \exists \eta_k, \nu_n \in \mathbb{R} : \quad \eta_k + \nu_n = \lambda_{kn}, \quad \text{и} \\ \frac{\frac{1}{r} \cdot (r \mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = \eta_k, \quad \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)} = \nu_n. \end{aligned} \quad (1.31.5)$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$, $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \quad (1.31.6)$$

$$\frac{1}{r} \cdot (r \mathbf{X}'_k(r))' + \eta_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.31.7)$$

$$\mathbf{Z}''_n(z) + \nu_n \mathbf{Z}_n(z) = 0. \quad (1.31.8)$$

Равенство (1.31.7) мы перепишем в виде:

$$- \frac{1}{r} \cdot (r \mathbf{X}'_k(r))' = \eta_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.31.9)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.31.3).

Условие $|v(0, z; t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.31.10)$$

а условие $v(R, z; t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.31.11)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\lambda = \eta_k$, $\nu = 0$, $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} - (r \mathbf{X}'_k(r))' = \eta_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.31.12)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\eta = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $v(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.31.12) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\eta_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.31.12) имеют вид:

$$\begin{cases} \eta_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k \text{ — корни уравнения} & J_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.31.13)$$

Шаг 3. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_n(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_n(z)$ мы получили уравнение (1.31.8) $\mathbf{Z}_n''(z) + \nu_n \mathbf{Z}_n(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий $v_z(r, 0; t) = v_z(r, l; t) = 0$, $0 \leq r < R$, $t > 0$, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_n''(z) + \nu_n \mathbf{Z}_n(z) = 0, \\ \mathbf{Z}_n'(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_n'(l) = 0. \end{cases} \quad (1.31.14)$$

Эту задачу мы неоднократно решали, выпишем результат:

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.31.14) имеют вид:

$$\begin{cases} \nu_0 = 0 & \mathbf{Z}_0(z) = 1, \\ \nu_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, & \mathbf{Z}_n(z) = \cos\left(\frac{\pi n z}{l}\right), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.31.15)$$

Шаг 4. Разложение функций $f(r, z; t)$ и $\varphi(r, z)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, z; t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z; t) J_0(\mu_k r), \quad (1.31.16)$$

$$\begin{aligned} f_k(z; t) &= \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2} \left[J_0'(\mu_k) \right]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) \underbrace{J_0^2(\mu_k)}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \end{aligned}$$

Итак,

$$f_k(z; t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) J_0(\mu_k r) \quad \text{с коэффициентами}$$

$$\varphi_k(z) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

В свою очередь, каждая из функций $f_k(z; t)$ и $\varphi_k(z)$ могут быть разложены в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (1.31.14), в результате получаем следующие представления функций $f(r, z; t)$ и $\varphi(r, z)$:

$$f(r, z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{k0}(t) J_0(\mu_k r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{kn}(t) J_0(\mu_k r) \cos \left(\frac{\pi n z}{l} \right) \right), \quad (1.31.17)$$

$$f_{kn}(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \frac{2}{l} \cdot \int_0^R \left(\int_0^R r f(r, z; t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr \right) \cos \left(\frac{\pi n z}{l} \right) dz.$$

Итак,

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{l R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r f(r, z; t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \cos \left(\frac{\pi n z}{l} \right) dr dz. \quad (1.31.18)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_{k0} J_0(\mu_k r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn} J_0(\mu_k r) \cos \left(\frac{\pi n z}{l} \right) \right) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.31.19)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{l R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \cos \left(\frac{\pi n z}{l} \right) dr dz. \quad (1.31.20)$$

Шаг 5. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_{kn}(t)$

Если искомый вид (1.31.4), стр. 125, решения $v(r, t)$ и разложение (1.31.19) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$v(r, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn} \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$:

$$\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.31.6), стр. 126, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}. \end{cases} \quad (1.31.21)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = c e^{-a^2 \lambda_{kn} t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t) e^{-a^2 \lambda_{kn} t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_{kn}(t)e^{a^2\lambda_{kn}t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{a^2\lambda_{kn}\tau}d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{\text{оНo}}(t) = c_1e^{-a^2\lambda_{kn}t} + \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)}d\tau. \quad (1.31.22)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_{kn}.$$

Таким образом, решение задачи (1.31.21) имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \varphi_{kn}e^{-\lambda_{kn}a^2t} + \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-\lambda_{kn}a^2(t-\tau)}d\tau. \quad (1.31.23)$$

где $f_{kn}(t)$ и φ_k задаются формулами (1.31.18) и (1.31.20).

Ответ в общем виде:

$$v(r, z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\varphi_{k0}e^{-\lambda_{kn}a^2t} + \int_0^t f_{k0}(\tau)e^{-\lambda_{k0}a^2(t-\tau)}d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_{kn}e^{-\lambda_{kn}a^2t} + \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-\lambda_{kn}a^2(t-\tau)}d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi n z}{l}\right) \right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, $\lambda_{kn} = \frac{\mu_k^2}{R^2} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, а $f_{kn}(t)$ и φ_k задаются формулами (1.31.18) и (1.31.20):

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{lR^2J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dr dz, \quad (1.31.18)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{lR^2J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dr dz, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad k = \overline{1, \infty}. \quad (1.31.20)$$

Поскольку в нашем случае $f(r, z; t) \equiv 0$, а $\varphi(r, z) \equiv -U$, то все $f_{kn} = 0$, а для вычисления φ_{kn} нам надо найти интеграл

$$\int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \left[x = \frac{\mu_k r}{R} \right] = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1 \right] = \\ = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} \left[x J_1(x) \right]' dx = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \left(x J_1(x) \right) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} = \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k). \quad (1.43.17)$$

Тогда для φ_{kn} мы получаем

$$\begin{aligned}\varphi_{kn} &= \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \left(\int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \right) \cos\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dz = \\ &= \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \frac{-UR^2}{\mu_k} J_1(\mu_k) \cdot \frac{l}{\pi n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) \Big|_{z=0}^{z=l} = 0, \quad n \neq 0. \\ \varphi_{k0} &= \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \left(\int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \right) dz = \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \frac{-UR^2}{\mu_k} J_1(\mu_k) \cdot l = -\frac{4U}{\mu_k J_1(\mu_k)}\end{aligned}$$

Таким образом, мы уже знаем функцию

$$v(r, z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{k0}}{2} e^{-\lambda_{kn} a^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2U}{\mu_k J_1(\mu_k)} e^{-\frac{\mu_k^2 a^2 t}{R^2}} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

так как $\lambda_{k0} = \frac{\mu_k^2}{R^2}$, где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. Итак,

Ответ:

$$u(r, z; t) = U - 2U \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_1(\mu_k)} e^{-\frac{\mu_k^2 a^2 t}{R^2}} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

1.32. № 782 а)

Начальная температура в однородном конечном цилиндре $0 \leq r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 < z < l$ равна $A(R^2 - r^2)z$. Определить распределение температуры в этом цилиндре при $t > 0$, если боковая поверхность и нижнее основание цилиндра поддерживаются при нулевой температуре, а верхнее основание теплоизолировано.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left(\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} \right) + f(r, z; t), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(r, z; 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0, z; t)| < \infty, \quad u(R, z; t) = 0 & 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(r, 0; t) = u_z(r, l; t) = 0, & 0 \leq r < R, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1.32.1)$$

при $f(r, z; t) \equiv 0$ и $\varphi(r, z) = A(R^2 - r^2)z$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.32.1) в виде

$$u(r, z; t) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \sum_{n=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t), \quad (1.32.2)$$

то, подставив (1.32.2) в уравнение $u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} + f$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k,n=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}'_{kn}(t) = \\ = a^2 \sum_{k,n=\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r \mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_n(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_n(z) \right) \mathbf{T}_{kn}(t) + \sum_{k,n=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) f_{kn}(t). \end{aligned}$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}'_{kn}(t) = \frac{a^2}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t) + a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n''(z)\mathbf{T}_{kn}(t) + \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n f_{kn}(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}_n''(z)}{\mathbf{Z}(z)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r и z , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_{kn} \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}_n''(z)}{\mathbf{Z}(z)} = -\lambda_{kn}.$$

С другой стороны, сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть константой в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – константа. То есть

$$\exists \eta_k, \nu_n \in \mathbb{R} : \quad \eta_k + \nu_n = \lambda_{kn}, \quad \text{и} \quad (1.32.3)$$

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = \eta_k, \quad \frac{\mathbf{Z}_n''(z)}{\mathbf{Z}(z)} = \nu_n.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$, $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \quad (1.32.4)$$

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' + \eta_k\mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.32.5)$$

$$\mathbf{Z}_n''(z) + \nu_k\mathbf{Z}_n(z) = 0. \quad (1.32.6)$$

Равенство (1.32.5) мы перепишем в виде:

$$- \frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' = \eta_k\mathbf{X}_k(r). \quad (1.32.7)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.32.1).

Условие $|u(0, z; t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.32.8)$$

а условие $u(R, z; t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.32.9)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\lambda = \eta_k$, $\nu = 0$, $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} -(r\mathbf{X}'_k(r))' = \eta_k r\mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.32.10)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\eta = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $v(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.32.10) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\eta_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.32.10) имеют вид:

$$\begin{cases} \eta_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k \text{ — корни уравнения} & J_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.32.11)$$

Шаг 3. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_n(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_n(z)$ мы получили уравнение (1.32.6) $\mathbf{Z}_n''(z) + \nu_n \mathbf{Z}_n(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий $u(r, 0; t) = u_z(r, l; t) = 0$, $0 \leq r < R$, $t > 0$, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_n''(z) + \nu_n \mathbf{Z}_n(z) = 0, \\ \mathbf{Z}_n(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_n'(l) = 0. \end{cases} \quad (1.32.12)$$

Эту задачу мы неоднократно решали, выпишем результат:

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.32.12) имеют вид:

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} \right)^2, \quad \mathbf{Z}_n(z) = \sin \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.32.13)$$

Шаг 4. Разложение функций $f(r, z; t)$ и $\varphi(r, z)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, z; t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z; t) J_0(\mu_k r), \quad (1.32.14)$$

$$\begin{aligned} f_k(z; t) &= \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2} \left[J_0'(\mu_k) \right]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) \underbrace{J_0^2(\mu_k)}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \end{aligned}$$

Итак,

$$f_k(z; t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) J_0(\mu_k r) \quad \text{с коэффициентами}$$

$$\varphi_k(z) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

В свою очередь, каждая из функций $f_k(z; t)$ и $\varphi_k(z)$ могут быть разложены в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (1.32.12), в результате получаем следующие представления функций $f(r, z; t)$ и $\varphi(r, z)$:

$$f(r, z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{kn}(t) J_0(\mu_k r) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right), \quad (1.32.15)$$

$$f_{kn}(t) = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \frac{2}{l} \cdot \int_0^R \left(\int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dz.$$

Итак,

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{l R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz. \quad (1.32.16)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn} J_0(\mu_k r) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.32.17)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{l R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz. \quad (1.32.18)$$

Шаг 5. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_{kn}(t)$

Если искомым вид (1.32.2), стр. 130, решения $u(r, t)$ и разложение (1.32.17) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn} \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$:

$$\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.32.4), стр. 131, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}. \end{cases} \quad (1.32.19)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = ce^{-a^2 \lambda_{kn} t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t)e^{-a^2 \lambda_{kn} t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_{kn}(t)e^{a^2 \lambda_{kn} t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int_0^t f_{kn}(\tau) e^{a^2 \lambda_{kn} \tau} d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{OHO}(t) = c_1 e^{-a^2 \lambda_{kn} t} + \int_0^t f_{kn}(\tau) e^{-a^2 \lambda_{kn} (t-\tau)} d\tau. \quad (1.32.20)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_{kn}.$$

Таким образом, решение задачи (1.32.19) имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \varphi_{kn} e^{-\lambda_{kn} a^2 t} + \int_0^t f_{kn}(\tau) e^{-\lambda_{kn} a^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (1.32.21)$$

где $f_{kn}(t)$ и φ_k задаются формулами (1.32.16) и (1.32.18).

Ответ в общем виде:

$$u(r, z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_{kn} e^{-\lambda_{kn} a^2 t} + \int_0^t f_{kn}(\tau) e^{-\lambda_{kn} a^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, $\lambda_{kn} = \frac{\mu_k^2}{R^2} + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} \right)^2$, а $f_{kn}(t)$ и φ_k задаются формулами (1.32.16) и (1.32.18):

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r f(r, z; t) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) dr dz. \quad (1.32.16)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) dr dz. \quad (1.32.18)$$

Поскольку в нашем случае $f(r, z; t) \equiv 0$, а $\varphi(r, z) = A(R^2 - r^2)z$, то все $f_{kn} = 0$, а для вычисления φ_{kn} нам надо найти интегралы

$$\begin{aligned}
 \int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int_0^{\mu_k} x^3 J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1\right] = \\
 &= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int_0^{\mu_k} x^2 \cdot \left[x J_1(x)\right]' dx = \left[\text{по частям}\right] = \\
 &= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(x^3 J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} - 2 \int_0^{\mu_k} x^2 J_1(x) dx \right) = \left[\text{в силу (1.1.9) при } \nu = 2\right] = \\
 &= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 \int_0^{\mu_k} \left[x^2 J_2(x)\right]' dx \right) = \\
 &= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 x^2 J_2(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 \mu_k^2 J_2(\mu_k) \right) = \\
 &= \left[\text{в силу (1.1.10) при } \nu = 1, \quad J_2(\mu_k) - \frac{2}{\mu_k} J_1(\mu_k) + \underbrace{J_0(\mu_k)}_{=0} = 0 \right] = \frac{R^4 (\mu_k^2 - 4)}{\mu_k^3} J_1(\mu_k).
 \end{aligned} \tag{1.32.22}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1\right] = \\
 &= \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} \left[x J_1(x)\right]' dx = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \left(x J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k) \quad (1.43.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^l z \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dz &= \left[\text{по частям}\right] = \\
 &= -\frac{2l}{\pi(2n-1)} \left(\underbrace{z \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right)}_{=0} \Big|_{z=0}^{z=l} - \int_0^l \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dz \right) = \\
 &= \left(\frac{2l}{\pi(2n-1)}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) \Big|_{z=0}^{z=l} = (-1)^{n+1} \left(\frac{2l}{\pi(2n-1)}\right)^2 \quad (1.32.23)
 \end{aligned}$$

Тогда для φ_{kn} мы получаем

$$\begin{aligned}
 \varphi_{kn} &= \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz = \\
 &= \frac{4A}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r(R^2 - r^2) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \cdot \int_0^l z \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dz = \\
 &= \left[\text{в силу (1.43.16), (1.43.17) и (1.33.24)} \right] = \\
 &= \frac{4A}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \left(R^2 \cdot \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k) - \frac{R^4(\mu_k^2 - 4)}{\mu_k^3} J_1(\mu_k) \right) \cdot (-1)^{n+1} \left(\frac{2l}{\pi(2n-1)} \right)^2 = \\
 &= \frac{16AR^2(-1)^{n+1}}{lJ_1(\mu_k)\mu_k^3} \left(\frac{2l}{\pi(2n-1)} \right)^2 = \frac{64AlR^2(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n-1)^2 J_1(\mu_k)\mu_k^3}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы уже знаем

Ответ:

$$\begin{aligned}
 u(r, z; t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_{kn} e^{-\lambda_{kn} a^2 t} + \int_0^t f_{kn}(\tau) e^{-\lambda_{kn} a^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) = \\
 &= \frac{64AlR^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2 J_1(\mu_k)\mu_k^3} \cdot e^{-\lambda_{kn} a^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right),
 \end{aligned}$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, $\lambda_{kn} = \frac{\mu_k^2}{R^2} + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} \right)^2$.

1.33. № 782 б)

Начальная температура в однородном конечном цилиндре $0 \leq r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 < z < l$ равна $A(R^2 - r^2)z$. Определить распределение температуры в этом цилиндре при $t > 0$, если верхнее основание цилиндра поддерживается при нулевой температуре, нижнее основание теплоизолировано а на боковой поверхности происходит теплообмен с внешней средой, имеющей нулевую температуру.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left(\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} \right) + f(r, z; t), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(r, z; 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0, z; t)| < \infty, \quad u_r(R, z; t) + hu(R, z; t) = 0 & 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u_z(r, 0; t) = u(r, l; t) = 0, & 0 \leq r < R, \quad t > 0 \end{cases} \quad (1.33.1)$$

при $f(r, z; t) \equiv 0$ и $\varphi(r, z) = A(R^2 - r^2)z$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.33.1) в виде

$$u(r, z; t) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \sum_{n=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t), \quad (1.33.2)$$

то, подставив (1.33.2) в уравнение $u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} + f$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k,n=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}'_{kn}(t) = \\ = a^2 \sum_{k,n=\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_n(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_n(z) \right) \mathbf{T}_{kn}(t) + \sum_{k,n=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) f_{kn}(t). \end{aligned}$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}'_{kn}(t) = \frac{a^2}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t) + a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) f_{kn}(t), \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2 \mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)}.$$

Левая часть зависит только от t , правая – от r и z , следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_{kn} \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2 \mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)} = -\lambda_{kn}.$$

С другой стороны, сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть константой в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – константа. То есть

$$\exists \eta_k, \nu_n \in \mathbb{R} : \quad \eta_k + \nu_n = \lambda_{kn}, \quad \text{и} \quad (1.33.3)$$

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = \eta_k, \quad \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)} = \nu_n.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$, $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2 \lambda_{kn} \mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \quad (1.33.4)$$

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' + \eta_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.33.5)$$

$$\mathbf{Z}''_n(z) + \nu_k \mathbf{Z}_n(z) = 0. \quad (1.33.6)$$

Равенство (1.33.5) мы перепишем в виде:

$$-\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' = \eta_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.33.7)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.33.1).

Условие $|u(0, z; t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.33.8)$$

а условие $u_r(R, z; t) + hu(R, z; t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}'_k(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.33.9)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\lambda = \eta_k$, $\nu = 0$, $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} -(r\mathbf{X}'_k(r))' = \eta_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}'_k(R) + h\mathbf{X}_k(R). \end{cases} \quad (1.33.10)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\eta = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $v(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.33.10) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\eta_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = h$, $\beta = 1$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.33.10) имеют вид:

$$\begin{cases} \eta_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k > 0 - \text{ корни уравнения } hR J_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0 & \Leftrightarrow & hR J_0(\mu) - \mu J_1(\mu) = 0 \end{cases} \quad (1.33.11)$$

Шаг 3. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_n(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_n(z)$ мы получили уравнение (1.33.6) $\mathbf{Z}''_n(z) + \nu_k \mathbf{Z}_n(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий $u_z(r, 0; t) = u(r, l; t) = 0$, $0 \leq r < R$, $t > 0$, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}''_n(z) + \nu_n \mathbf{Z}_n(z) = 0, \\ \mathbf{Z}'_n(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_n(l) = 0. \end{cases} \quad (1.33.12)$$

Эту задачу мы неоднократно решали, выпишем результат:

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.33.12) имеют вид:

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} \right)^2, \quad \mathbf{Z}_n(z) = \cos \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.33.13)$$

Шаг 4. Разложение функций $f(r, z; t)$ и $\varphi(r, z)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, z; t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z; t) J_0(\mu_k r), \quad (1.33.14)$$

В силу условия на μ_k ,

$$hR J_0(\mu_k) + \mu_k J'_0(\mu_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad J'_0(\mu_k) = -\frac{hR}{\mu_k} J_0(\mu_k).$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} f_k(z; t) &= \frac{1}{\frac{1}{2} \underbrace{\left[J'_0(\mu_k) \right]^2}_{= \left[-\frac{hR}{\mu_k} J_0(\mu_k) \right]^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\ &= \frac{2\mu_k^2}{R^2 (h^2 R^2 + \mu_k^2) J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \end{aligned}$$

Итак,

$$f_k(z; t) = \frac{2\mu_k^2}{R^2 (h^2 R^2 + \mu_k^2) J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\begin{aligned} \varphi(r, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) J_0(\mu_k r) \quad \text{с коэффициентами} \\ \varphi_k(z) &= \frac{2\mu_k^2}{R^2 (h^2 R^2 + \mu_k^2) J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \end{aligned}$$

В свою очередь, каждая из функций $f_k(z; t)$ и $\varphi_k(z)$ могут быть разложены в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (1.33.12), в результате получаем следующие представления функций $f(r, z; t)$ и $\varphi(r, z)$:

$$f(r, z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{kn}(t) J_0(\mu_k r) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right), \quad (1.33.15)$$

$$f_{kn}(t) = \frac{2\mu_k^2}{R^2 (h^2 R^2 + \mu_k^2) J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{2}{l} \cdot \int_0^R \left(\int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \right) \cos\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dz.$$

Итак,

$$f_{kn}(t) = \frac{4\mu_k^2}{l R^2 (h^2 R^2 + \mu_k^2) J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz. \quad (1.33.16)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn} J_0(\mu_k r) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.33.17)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4\mu_k^2}{l R^2 (h^2 R^2 + \mu_k^2) J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz. \quad (1.33.18)$$

Шаг 5. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_{kn}(t)$

Если искомый вид (1.33.2), стр. 136, решения $u(r, t)$ и разложение (1.33.17) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$:

$$\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (1.33.4), стр. 137, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}. \end{cases} \quad (1.33.19)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = ce^{-a^2\lambda_{kn}t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t)e^{-a^2\lambda_{kn}t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_{kn}(t)e^{a^2\lambda_{kn}t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{a^2\lambda_{kn}\tau}d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{oHo}(t) = c_1e^{-a^2\lambda_{kn}t} + \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)}d\tau. \quad (1.33.20)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_{kn}.$$

Таким образом, решение задачи (1.33.19) имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \varphi_{kn}e^{-\lambda_{kn}a^2t} + \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-\lambda_{kn}a^2(t-\tau)}d\tau. \quad (1.33.21)$$

где $f_{kn}(t)$ и φ_k задаются формулами (1.33.16) и (1.33.18).

Ответ в общем виде:

$$u(r, z; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_{kn}e^{-\lambda_{kn}a^2t} + \int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-\lambda_{kn}a^2(t-\tau)}d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hR J_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0$, $\lambda_{kn} = \frac{\mu_k^2}{R^2} + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$, а $f_{kn}(t)$ и φ_k задаются формулами (1.33.16) и (1.33.18):

$$f_{kn}(t) = \frac{4\mu_k^2}{lR^2(h^2R^2 + \mu_k^2)J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r f(r, z; t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz. \quad (1.33.16)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4\mu_k^2}{lR^2(h^2R^2 + \mu_k^2)J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz. \quad (1.33.18)$$

Поскольку в нашем случае $f(r, z; t) \equiv 0$, а $\varphi(r, z) = A(R^2 - r^2)z$, то все $f_{kn} = 0$, а для вычисления φ_{kn} нам надо найти интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int_0^{\mu_k} x^3 J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1\right] = \\ &= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int_0^{\mu_k} x^2 \cdot \left[x J_1(x)\right]' dx = \left[\text{по частям}\right] = \\ &= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(x^3 J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} - 2 \int_0^{\mu_k} x^2 J_1(x) dx \right) = \left[\text{в силу (1.1.9) при } \nu = 2\right] = \\ &= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 \int_0^{\mu_k} \left[x^2 J_2(x)\right]' dx \right) = \\ &= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 x^2 J_2(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 \mu_k^2 J_2(\mu_k) \right) = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{в силу (1.1.10) при } \nu = 1, \\ \text{в силу условия на } \mu_k, \end{array} \quad \begin{array}{l} J_2(\mu_k) - \frac{2}{\mu_k} J_1(\mu_k) + J_0(\mu_k) = 0 \\ \mu_k J_1(\mu_k) = hR J_0(\mu_k) \end{array} \right] = \\ &= \frac{R^4 [\mu_k^2 hR - (2hR - \mu_k^2)]}{\mu_k^4} J_0(\mu_k). \quad (1.33.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1\right] = \\ &= \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} \left[x J_1(x)\right]' dx = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \left(x J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k) = \\ &= \left[\text{в силу условия на } \mu_k, \quad \mu_k J_1(\mu_k) = hR J_0(\mu_k) \right] = \frac{hR^3}{\mu_k^2} J_0(\mu_k) \quad (1.33.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^l z \cos \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) dz &= \left[\text{по частям} \right] = \\
 &= \frac{2l}{\pi(2n-1)} \left(z \sin \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) \Big|_{z=0}^{z=l} - \int_0^l \sin \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) dz \right) = \\
 &= \frac{2l}{\pi(2n-1)} \left(l(-1)^{n+1} + \frac{2l}{\pi(2n-1)} \underbrace{\cos \left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) \Big|_{z=0}^{z=l}}_{=-1} \right) = \\
 &= \frac{2l}{\pi(2n-1)} \left(l(-1)^{n+1} - \frac{2l}{\pi(2n-1)} \right) = \\
 &= \left(\frac{l}{\pi(2n-1)} \right)^2 \cdot (2(-1)^{n+1}\pi(2n-1) - 4) \quad (1.33.24)
 \end{aligned}$$

Тогда для φ_{kn} мы получаем

$$\begin{aligned}
 \varphi_{kn} &= \frac{4\mu_k^2}{lR^2(h^2R^2 + \mu_k^2)J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^l \int_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz = \\
 &= \frac{4A\mu_k^2}{lR^2(h^2R^2 + \mu_k^2)J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r(R^2 - r^2) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \cdot \int_0^l z \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dz = \\
 &= \left[\text{в силу (1.43.16), (1.33.23) и (1.33.24)} \right] = \\
 &= \frac{4A\mu_k^2}{lR^2(h^2R^2 + \mu_k^2)J_0^2(\mu_k)} \cdot \left(R^2 \cdot \frac{hR^3}{\mu_k^2} J_0(\mu_k) - \frac{R^4 [\mu_k^2 hR - (2hR - \mu_k^2)]}{\mu_k^4} J_0(\mu_k) \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\frac{l}{\pi(2n-1)} \right)^2 \cdot (2(-1)^{n+1}\pi(2n-1) - 4) = \\
 &= \frac{4A\mu_k^2}{lR^2(h^2R^2 + \mu_k^2)J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{R^4(2hR - \mu_k^2)J_0(\mu_k)}{\mu_k^4} \cdot \left(\frac{l}{\pi(2n-1)} \right)^2 \cdot (2(-1)^{n+1}\pi(2n-1) - 4) = \\
 &= \frac{8AlR^2(2hR - \mu_k^2)}{\mu_k^2(h^2R^2 + \mu_k^2)J_0(\mu_k)} \cdot \frac{(-1)^{n+1}\pi(2n-1) - 2}{\pi^2(2n-1)^2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы уже знаем

Ответ:

$$\begin{aligned}
 u(r, z; t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_{kn} e^{-\lambda_{kn} a^2 t} + \int_0^t f_{kn}(\tau) e^{-\lambda_{kn} a^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) = \\
 &= \frac{8AlR^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2hR - \mu_k^2)((-1)^{n+1}\pi(2n-1) - 2)}{\mu_k^2(h^2R^2 + \mu_k^2)(2n-1)^2 J_0(\mu_k)} \cdot e^{-\lambda_{kn} a^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right),
 \end{aligned}$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hR J_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0$, $\lambda_{kn} = \frac{\mu_k^2}{R^2} + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} \right)^2$.

1.34. № 783 а)

В полубесконечном круговом цилиндре $0 \leq r < R$, $0 < z < \infty$ имеются источники некоторого газа плотности $Ue^{-\alpha z}$, причём на основании цилиндра концентрация этого газа поддерживается равной Q . Определить стационарное распределение газа в цилиндре, если боковая поверхность цилиндра газонепроницаема.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z; t)$ из условий

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} \right) + Ue^{-\alpha z} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |u(0, z)| < \infty, \quad u_r(R, z) = 0 & 0 < z < \infty; \\ u(r, 0) = Q, & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.34.1)$$

Шаг 0. Избавление от неоднородности в краевом условии

В данной ситуации можно попробовать избавиться сразу от неоднородности и в краевом условии, и в уравнении, поскольку все функции, дающие эту неоднородность, зависят только от z . Поэтому естественно искать решение задачи (1.34.1) в виде:

$$u(r, z) = w(z) + v(r, z), \quad (1.34.2)$$

где функция $w(z)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot \overbrace{(rw_r)_r}^{=0} + w_{zz} + Ue^{-\alpha z} = 0, & 0 < z < \infty; \\ |w(z)| < \infty, & 0 < z < \infty; \\ w(0) = Q. \end{cases}$$

То есть для функции $w(z)$ получаем необычную задачу Коши (нужно два начальных условия, а в ней только одно, плюс условие ограниченности):

$$\begin{cases} w''(z) = -Ue^{-\alpha z}, & 0 < z < \infty; \\ w(0) = Q. & |w(z)| < \infty \end{cases} \quad (1.34.3)$$

Общее решение однородного уравнения $w''(z) = 0$ имеет вид³

$$w_o(z) = c_1 + c_2 z,$$

а частное решение неоднородного уравнения $w''(z) = -Ue^{-\alpha z}$ легко строится в виде квазиполинома

$$w_{\text{чно}}(z) = ae^{-\alpha z}.$$

Подставляя искомый вид $w_{\text{чно}}(z)$ в уравнение, получаем, что

$$a = -\frac{U}{\alpha^2}, \quad \Rightarrow \quad w_{\text{оно}}(z) = c_1 + c_2 z - \frac{U}{\alpha^2} e^{-\alpha z}.$$

Из начального условия получаем:

$$w(0) = Q \quad \Rightarrow \quad c_1 - \frac{U}{\alpha^2} = Q \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{U}{\alpha^2} + Q,$$

а из условия ограниченности

$$c_2 = 0.$$

³В данном простейшем случае его можно получить двукратным интегрированием уравнения по z , но мы приводим общий способ решения.

Таким образом,

$$w(z) = \frac{U}{\alpha^2} + Q - \frac{U}{\alpha^2} e^{-\alpha z} = Q + \frac{U}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha z}).$$

Вычитая из задачи (1.34.1) задачу (1.34.3), получаем, что $v(r, z)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |v(0, z)| < \infty, \quad v_r(R, z) = 0 & 0 < z < \infty; \\ v(r, 0) = 0, & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.34.4)$$

Данная задача, однородна, поэтому наверняка имеет тривиальное решение

$$v(r, z) \equiv 0, \quad 0 \leq r < R, \quad 0 < z < \infty.$$

Более того, это решение единственно⁴, поэтому $u(r, z) = w(z)$ и

Ответ: $u(r, z) = Q + \frac{U}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha z}).$

1.35. № 783 б)

В полубесконечном круговом цилиндре $0 \leq r < R$, $0 < z < \infty$ имеются источники некоторого газа плотности $Ue^{-\alpha z}$, причём на основании цилиндра концентрация этого газа поддерживается равной Q . Определить стационарное распределение газа в цилиндре, если на боковой поверхности цилиндра происходит газообмен с внешней средой, концентрация рассматриваемого газа в которой равна нулю.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z; t)$ из условий

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} \right) + Ue^{-\alpha z} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |u(0, z)| < \infty, \quad u_r(R, z) + hu(R, z) = 0 & 0 < z < \infty; \\ u(r, 0) = Q, & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.35.1)$$

Шаг 0. Вид решения и вспомогательная задача

Во-первых, заметим, что имеет место аналогия между данной задачей и задачей для уравнения колебаний, в которой $z \in (0, \infty)$ играет роль «времени», а условие $u(r, 0) = Q$ – роль начального условия. Поэтому мы не будем избавляться от неоднородности в данном краевом условии, но, подобно решению № 776 (б) (semS8, стр. 27-36), представим решение (1.35.1) в виде суммы

$$u(r, z) = v(r, z) + w(r, z) = v(r, z) + b(r)e^{-\alpha z}, \quad (1.35.2)$$

где функции $w(r, z)$ и $v(r, z)$ являются решениями задач:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r + w_{zz} \right) + Ue^{-\alpha z} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |w(0, z)| < \infty, \quad w_r(R, z) + hw(R, z) = 0 & 0 < z < \infty, \end{cases} \quad (1.35.3)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} \right) = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |v(0, z)| < \infty, \quad v_r(R, z) + hv(R, z) = 0 & 0 < z < \infty; \\ v(r, 0) = Q - w(r, 0), & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.35.4)$$

⁴Достаточно вспомнить, к каким задачам для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ приведёт её честное решение методом Фурье:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_k''(z) = 0, & 0 < z < \infty; \\ \mathbf{Z}_k(0) = 0. & |\mathbf{Z}_k(z)| < \infty. \end{cases}$$

У этих задач, как легко видеть существует только тривиальное решение.

Вспомогательная задача

Если искать $w(r, z)$ в виде $w(r, z) = b(r)e^{-\alpha z}$, то

$$w_{zz} = \alpha^2 b(r)e^{-\alpha z}$$

и для $b(r)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot (rb'(r))' + \alpha^2 b(r) = -U, & 0 \leq r < R; \\ |b(0)| < \infty, \quad b'(R) + hb(R) = 0 & 0 < z < \infty, \end{cases} \quad (1.35.5)$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения $\frac{1}{r} \cdot (rb'(r))' + \alpha^2 b(r) = -U$. Его легко угадать в виде константы:

$$b_{\text{чно}} = -\frac{U}{\alpha^2}.$$

Общее решение однородного уравнения $\frac{1}{r} \cdot (rb'(r))' + \alpha^2 b(r) = 0$, поскольку это – уравнение Бесселя (1.1.17), в свою очередь, представляется в виде:

$$b_{\text{оо}} = c_1 J_0(\alpha r) + c_2 N_0(\alpha r).$$

Таким образом,

$$b_{\text{оно}} = c_1 J_0(\alpha r) + c_2 N_0(\alpha r) - \frac{U}{\alpha^2}$$

Из краевого условия $|b(0)| < \infty$ получаем, что $c_2 = 0$, а из второго $b'(R) + hb(R) = 0$, что

$$c_1 \left(\alpha J_0'(\alpha R) + h J_0(\alpha R) \right) - \frac{hU}{\alpha^2} = 0,$$

и стало быть,

$$c_1 = \frac{hU}{\alpha^2 (\alpha J_0'(\alpha R) + h J_0(\alpha R))}$$

Итак, мы получили решение задачи (1.35.5)

$$b(r) = \left(\frac{h J_0(\alpha r)}{\underbrace{\alpha J_0'(\alpha R)}_{=-J_1(\alpha R)} + h J_0(\alpha R)} - 1 \right) \cdot \frac{U}{\alpha^2} \quad (1.35.6)$$

Поэтому, в силу (1.35.2),

$$u(r, z) = \left(\frac{h J_0(\alpha r)}{h J_0(\alpha R) - \alpha J_1(\alpha R)} - 1 \right) \cdot \frac{U}{\alpha^2} \cdot e^{-\alpha z} + v(r, z). \quad (1.35.7)$$

Наконец, задача (1.35.4) для функции $v(r, z)$ принимает окончательный вид

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |v(0, z)| < \infty, \quad v_r(R, z) + hv(R, z) = 0 & 0 < z < \infty; \\ v(r, 0) = \varphi(r) = Q - \left(\frac{h J_0(\alpha r)}{h J_0(\alpha R) - \alpha J_1(\alpha R)} - 1 \right) \cdot \frac{U}{\alpha^2}, & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.35.8)$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.35.8) в виде

$$v(r, z) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z), \quad (1.35.9)$$

то, подставив (1.35.9) в уравнение $v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} + f$, получим:

$$\sum_{k=\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) \right) = 0.$$

Это равенство заведомо верно, если все члены ряда в левой части равны нулю:

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) = 0, \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z)$, получим:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}(z)} = 0.$$

Сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть нулём в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – константа. То есть $\exists \lambda_k$:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k, \quad \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}(z)} = \lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.35.10)$$

$$\mathbf{Z}''_k(z) - \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \quad (1.35.11)$$

Равенство (1.35.10) мы перепишем в виде:

$$-\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.35.12)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.35.8).

Условие $|v(0, z)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.35.13)$$

а условие $v_r(R, z) + hv(R, z) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}'_k(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.35.14)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\lambda = \lambda_k$, $\nu = 0$, $\alpha = h > 0$ и $\beta = 1$:

$$\begin{cases} -(r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}'_k(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.35.15)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\eta = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $v(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.35.15) не имеет собственного

значение $\lambda_0 = 0$. Все же её строго положительные собственные значения находятся из

теоремы 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = h$, $\beta = 1$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.35.15) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & \mathbf{X}_k = J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k - \text{ корни уравнения} & h R J_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.35.16)$$

Шаг 3. Разложение функции $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, z)$ разлагается в ряд Фурье

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad (1.35.17)$$

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{1}{\frac{1}{2} [J'_0(\mu_k)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \\ &= \left[\text{в силу равенства (1.35.16), } J'_0(\mu_k) = -\frac{h R J_0(\mu_k)}{\mu_k} \right] = \\ &= \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{\mu_k^2}{h^2 R^2 + \mu_k^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \end{aligned}$$

Итак, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.35.18)$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{\mu_k^2}{h^2 R^2 + \mu_k^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \quad (1.35.19)$$

Шаг 4. Решение задачи для $\mathbf{Z}_k(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ мы получили уравнение (1.35.11) $\mathbf{Z}_k''(z) - \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0$. Вспомним, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2$. Добавим к уравнению начальное условие, следующее из условия $v(r, 0) = \varphi(r)$, $0 \leq r < R$ и требование ограниченности:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_k''(z) - \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2 \mathbf{Z}_k(z) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(0) = \varphi_k \\ |\mathbf{Z}_k(z)| < \infty. \end{cases} \quad (1.35.20)$$

Общее решение уравнения $\mathbf{Z}_k''(z) - \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2 \mathbf{Z}_k(z) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{Z}_k(z) = c_1 e^{\frac{\mu_k}{R} z} + c_2 e^{-\frac{\mu_k}{R} z}.$$

Условие ограниченности решения $|\mathbf{Z}_k(z)| < \infty$ даёт нам, что $c_1 = 0$, а из условия $\mathbf{Z}_k(0) = \varphi_k$ получаем $c_2 = \varphi_k$. Таким образом,

$$\mathbf{Z}_k(z) = \varphi_k e^{-\frac{\mu_k}{R} z}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.35.21)$$

Ответ в общем виде:

$$v(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\frac{\mu_k}{R} z} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hR J_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0$, а φ_k задаются формулой:

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{\mu_k^2}{h^2 R^2 + \mu_k^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \quad (1.35.19)$$

Поскольку в нашем случае $\varphi(r) \equiv Q - \left(\frac{h J_0(\alpha r)}{h J_0(\alpha R) - \alpha J_1(\alpha R)} - 1\right) \cdot \frac{U}{\alpha^2}$, для вычисления φ_k нам надо найти интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1\right] = \\ &= \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} \left[x J_1(x)\right]' dx = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \left(x J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k}\right) = \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k) = \\ &= \left[\text{в силу равенства (1.35.16), } J_1(\mu_k) = -J_0'(\mu_k) = \frac{h R J_0(\mu_k)}{\mu_k}\right] = \\ &= \frac{R^2}{\mu_k} \cdot \frac{h R}{\mu_k} \cdot J_0(\mu_k) = \frac{h R^3}{\mu_k^2} \cdot J_0(\mu_k), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.35.22)$$

Вспомним формулу (1.1.13), стр. 3:

$$\int_0^x t J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t) dt = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\alpha J_{\nu+1}(\alpha x) J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x) \right), \quad \alpha \neq \beta \quad (1.1.13)$$

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_0(\alpha r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[\text{в силу (1.1.13) при } \nu = 0, \beta = \frac{\mu_k}{R}\right] = \\ &= \frac{R^3}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} \left(\alpha J_1(\alpha R) J_0(\mu_k) - \frac{\mu_k}{R} \cdot J_0(\alpha R) J_1(\mu_k) \right) = \\ &= \left[\text{в силу равенства (1.35.16), } J_1(\mu_k) = -J_0'(\mu_k) = \frac{h R J_0(\mu_k)}{\mu_k}\right] = \\ &= \frac{R^3}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} \left(\alpha J_1(\alpha R) - \frac{\mu_k}{R} \cdot \frac{h R J_0(\alpha R)}{\mu_k} \right) J_0(\mu_k) = \\ &= \frac{R^3 (\alpha J_1(\alpha R) - h J_0(\alpha R))}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} \cdot J_0(\mu_k), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.35.23)$$

Тогда для φ_k мы получаем

$$\begin{aligned}
 \varphi_k &= \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{\mu_k^2}{h^2 R^2 + \mu_k^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \\
 &= \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{\mu_k^2}{h^2 R^2 + \mu_k^2} \cdot \left(\left(Q + \frac{U}{\alpha^2} \right) \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{Uh}{\alpha^2 (h J_0(\alpha R) - \alpha J_1(\alpha R))} \int_0^R r J_0(\alpha r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \right) = \\
 &= \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{\mu_k^2}{h^2 R^2 + \mu_k^2} \cdot \left(\left(Q + \frac{U}{\alpha^2} \right) \cdot \frac{h R^3}{\mu_k^2} \cdot J_0(\mu_k) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{Uh}{\alpha^2 (h J_0(\alpha R) - \alpha J_1(\alpha R))} \cdot \frac{R^3 (\alpha J_1(\alpha R) - h J_0(\alpha R))}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} \cdot J_0(\mu_k) \right) = \\
 &= \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{\mu_k^2}{h^2 R^2 + \mu_k^2} \cdot \left(\left(Q + \frac{U}{\alpha^2} \right) \cdot \frac{h R^3}{\mu_k^2} + \frac{Uh R^3}{\alpha^2 (\alpha^2 R^2 - \mu_k^2)} \right) \cdot J_0(\mu_k) = \\
 &= \frac{2hR}{J_0(\mu_k)} \cdot \frac{1}{h^2 R^2 + \mu_k^2} \cdot \left(Q + \frac{U}{\alpha^2} + \frac{U \mu_k^2}{\alpha^2 (\alpha^2 R^2 - \mu_k^2)} \right) = \\
 &= \frac{2hR}{J_0(\mu_k)} \cdot \frac{1}{h^2 R^2 + \mu_k^2} \cdot \left(Q + \frac{U \alpha^2 R^2}{\alpha^2 (\alpha^2 R^2 - \mu_k^2)} \right) = \frac{2hR}{J_0(\mu_k)} \cdot \frac{1}{h^2 R^2 + \mu_k^2} \cdot \left(Q + \frac{UR^2}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы уже знаем функцию

$$v(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\frac{\mu_k}{R} z} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) = 2hR \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_0(\mu_k) (h^2 R^2 + \mu_k^2)} \cdot \left(Q + \frac{UR^2}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} \right) e^{-\frac{\mu_k}{R} z} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hR J_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0$. Итак, поскольку

$$u(r, z) = \left(\frac{h J_0(\alpha r)}{h J_0(\alpha R) - \alpha J_1(\alpha R)} - 1 \right) \cdot \frac{U}{\alpha^2} \cdot e^{-\alpha z} + v(r, z), \quad (1.35.7)$$

мы получаем

Ответ:

$$\begin{aligned}
 u(r, z) &= \left(\frac{h J_0(\alpha r)}{h J_0(\alpha R) - \alpha J_1(\alpha R)} - 1 \right) \cdot \frac{U}{\alpha^2} \cdot e^{-\alpha z} + \\
 &\quad + 2hR \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_0(\mu_k) (h^2 R^2 + \mu_k^2)} \cdot \left(Q + \frac{UR^2}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} \right) e^{-\frac{\mu_k}{R} z} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),
 \end{aligned}$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hR J_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0$.

1.36. № 783 в)

В полубесконечном круговом цилиндре $0 \leq r < R$, $0 < z < \infty$ имеются источники некоторого газа плотности $Ue^{-\alpha z}$, причём на основании цилиндра концентрация этого газа поддерживается равной Q . Определить стационарное распределение газа в цилиндре, если на боковой поверхности цилиндра поддерживается концентрация газа, равная $Te^{-\beta z}$, $\beta > 0$.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z; t)$ из условий

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} \right) + Ue^{-\alpha z} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |u(0, z)| < \infty, \quad u(R, z) = Te^{-\beta z} & 0 < z < \infty; \\ u(r, 0) = Q, & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.36.1)$$

Шаг 0. Вид решения и вспомогательная задача

Во-первых, заметим, что имеет место аналогия между данной задачей и задачей для уравнения колебаний, в которой $z \in (0, \infty)$ играет роль «времени», а условие $u(r, 0) = Q$ – роль начального условия. Поэтому мы не будем избавляться от неоднородности в данном краевом условии, но, подобно решению № 783 (б), представим решение (1.36.1) в виде суммы

$$u(r, z) = v(r, z) + w(r, z) + s(r, z) = v(r, z) + \underbrace{b(r)e^{-\alpha z}}_{w(r, z)} + \underbrace{p(r)e^{-\beta z}}_{s(r, z)}, \quad (1.36.2)$$

где функции $w(r, z)$, $s(r, z)$ и $v(r, z)$ являются решениями задач:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r + w_{zz} + Ue^{-\alpha z} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |w(0, z)| < \infty, \quad w(R, z) = 0 & 0 < z < \infty, \end{cases} \quad (1.36.3)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot (rs_r)_r + s_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |s(0, z)| < \infty, \quad s(R, z) = Te^{-\beta z} & 0 < z < \infty, \end{cases} \quad (1.36.4)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |v(0, z)| < \infty, \quad v_r(R, z) + hv(R, z) = 0 & 0 < z < \infty; \\ v(r, 0) = Q - w(r, 0) - s(r, 0), & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.36.5)$$

Первая вспомогательная задача

Если искать $w(r, z)$ в виде $w(r, z) = b(r)e^{-\alpha z}$, то

$$w_{zz} = \alpha^2 b(r)e^{-\alpha z}$$

и для $b(r)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot (rb'(r))' + \alpha^2 b(r) = -U, & 0 \leq r < R; \\ |b(0)| < \infty, \quad b(R) = 0 & 0 < z < \infty, \end{cases} \quad (1.36.6)$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения $\frac{1}{r} \cdot (rb'(r))' + \alpha^2 b(r) = -U$. Его легко угадать в виде константы:

$$b_{\text{чно}} = -\frac{U}{\alpha^2}.$$

Общее решение однородного уравнения $\frac{1}{r} \cdot (rb'(r))' + \alpha^2 b(r) = 0$, поскольку это – уравнение Бесселя (1.1.17) с $\lambda = \alpha^2$, в свою очередь, представляется в виде:

$$b_{\text{оо}} = c_1 J_0(\alpha r) + c_2 N_0(\alpha r).$$

Таким образом,

$$b_{\text{оно}} = c_1 J_0(\alpha r) + c_2 N_0(\alpha r) - \frac{U}{\alpha^2}$$

Из краевого условия $|b(0)| < \infty$ получаем, что $c_2 = 0$, а из второго $b(R) = 0$, что

$$c_1 J_0(\alpha R) - \frac{U}{\alpha^2} = 0,$$

и стало быть,

$$c_1 = \frac{U}{\alpha^2 J_0(\alpha R)}$$

Итак, мы получили решение задачи (1.36.6)

$$b(r) = \frac{U}{\alpha^2} \left(\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} - 1 \right) \quad (1.36.7)$$

Поэтому,

$$w(r, z) = \frac{U}{\alpha^2} \left(\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} - 1 \right) \cdot e^{-\alpha z} \quad (1.36.8)$$

Вторая вспомогательная задача

Если искать $s(r, z)$ в виде $s(r, z) = p(r)e^{-\beta z}$, то

$$s_{zz} = \beta^2 p(r) e^{-\beta z}$$

и для $p(r)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot (rp'(r))' + \beta^2 p(r) = 0, & 0 \leq r < R; \\ |p(0)| < \infty, \quad p(R) = T & 0 < z < \infty, \end{cases} \quad (1.36.9)$$

Общее решение однородного уравнения $\frac{1}{r} \cdot (rp'(r))' + \beta^2 p(r) = 0$, поскольку это – уравнение Бесселя (1.1.17) с $\lambda = \beta^2$, представляется в виде:

$$p_{\text{оо}} = c_1 J_0(\beta r) + c_2 N_0(\beta r).$$

Из краевого условия $|p(0)| < \infty$ получаем, что $c_2 = 0$, а из второго $p(R) = T$, что

$$c_1 J_0(\beta R) = T,$$

и стало быть,

$$c_1 = \frac{T}{J_0(\beta R)}$$

Итак, мы получили решение задачи (1.36.9)

$$b(r) = \frac{T J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \quad (1.36.10)$$

Поэтому,

$$s(r, z) = \frac{T J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \cdot e^{-\beta z} \quad (1.36.11)$$

Таким образом, для функции $u(r, z) = v(r, z) + w(r, z) + s(r, z)$, получаем представление:

$$u(r, z) = v(r, z) + \frac{U}{\alpha^2} \left(\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} - 1 \right) \cdot e^{-\alpha z} + \frac{T J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \cdot e^{-\beta z}. \quad (1.36.12)$$

Наконец, задача (1.36.5) для функции $v(r, z)$ принимает окончательный вид

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |v(0, z)| < \infty, \quad v(R, z) = 0 & 0 < z < \infty; \\ v(r, 0) = \varphi(r) = Q - \frac{U}{\alpha^2} \left(\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} - 1 \right) - \frac{TJ_0(\beta r)}{J_0(\beta R)}, & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.36.13)$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.36.13) в виде

$$v(r, z) = \sum_{k=...}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z), \quad (1.36.14)$$

то, подставив (1.36.14) в уравнение $v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} + f$, получим:

$$\sum_{k=...}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) \right) = 0.$$

Это равенство заведомо верно, если все члены ряда в левой части равны нулю:

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) = 0, \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z)$, получим:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}(z)} = 0.$$

Сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть нулём в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – константа. То есть $\exists \lambda_k$:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k, \quad \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}(z)} = \lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.36.15)$$

$$\mathbf{Z}''_k(z) - \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \quad (1.36.16)$$

Равенство (1.36.15) мы перепишем в виде:

$$- \frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.36.17)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.36.13).

Условие $|v(0, z)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.36.18)$$

а условие $v(R, z) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.36.19)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $X_k(r)$

Для функций $X_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\lambda = \lambda_k$, $\nu = 0$, $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} -(rX'_k(r))' = \lambda_k r X_k(r), \\ |X_k(+0)| < \infty, \\ X_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.36.20)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\eta = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $v(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.36.20) не имеет собственного значения $\lambda_0 = 0$. Все же её строго положительные собственные значения находятся из

теоремы 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.36.20) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & X_k = J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k \text{ – корни уравнения} & J_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.36.21)$$

Шаг 3. Разложение функции $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\sqrt{r} f(r, z)$ разлагается в ряд Фурье

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad (1.36.22)$$

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2} \left[J'_0(\mu_k) \right]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) \underbrace{J_0^2(\mu_k)}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \end{aligned}$$

Итак, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.36.23)$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \quad (1.36.24)$$

Шаг 4. Решение задачи для $\mathbf{Z}_k(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ мы получили уравнение (1.36.16) $\mathbf{Z}_k''(z) - \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0$. Вспомним, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$. Добавим к уравнению начальное условие, следующее из условия $v(r, 0) = \varphi(r)$, $0 \leq r < R$ и требование ограниченности:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_k''(z) - \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2 \mathbf{Z}_k(z) = 0. \\ \mathbf{Z}_k(0) = \varphi_k \\ |\mathbf{Z}_k(z)| < \infty. \end{cases} \quad (1.36.25)$$

Общее решение уравнения $\mathbf{Z}_k''(z) - \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2 \mathbf{Z}_k(z) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{Z}_k(z) = c_1 e^{\frac{\mu_k}{R} z} + c_2 e^{-\frac{\mu_k}{R} z}.$$

Условие ограниченности решения $|\mathbf{Z}_k(z)| < \infty$ даёт нам, что $c_1 = 0$, а из условия $\mathbf{Z}_k(0) = \varphi_k$ получаем $c_2 = \varphi_k$. Таким образом,

$$\mathbf{Z}_k(z) = \varphi_k e^{-\frac{\mu_k}{R} z}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.36.26)$$

Ответ в общем виде:

$$v(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\frac{\mu_k}{R} z} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $hR J_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0$, а φ_k задаются формулой:

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \quad (1.36.24)$$

Поскольку в нашем случае $\varphi(r) \equiv Q - \frac{U}{\alpha^2} \left(\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} - 1 \right) - \frac{T J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)}$, для вычисления φ_k нам надо найти интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R} \right] = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1 \right] = \\ &= \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} \left[x J_1(x) \right]' dx = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \left(x J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.36.27)$$

Вспомним формулу (1.1.13), стр. 3:

$$\int_0^x t J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t) dt = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\alpha J_{\nu+1}(\alpha x) J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x) \right), \quad \alpha \neq \beta \quad (1.1.13)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^R r J_0(\alpha r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \left[\text{в силу (1.1.13) при } \nu = 0, \beta = \frac{\mu_k}{R} \right] = \\
& = \frac{R^3}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} \left(\alpha J_1(\alpha R) J_0(\mu_k) - \frac{\mu_k}{R} \cdot J_0(\alpha R) J_1(\mu_k) \right) = \left[\text{в силу (1.36.21), } J_0(\mu_k) = 0 \right] = \\
& = \frac{\mu_k R^2 J_0(\alpha R)}{\mu_k^2 - \alpha^2 R^2} \cdot J_1(\mu_k). \quad (1.36.28)
\end{aligned}$$

Полностью аналогично

$$\int_0^R r J_0(\beta r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{\mu_k R^2 J_0(\beta R)}{\mu_k^2 - \beta^2 R^2} \cdot J_1(\mu_k). \quad (1.36.29)$$

Тогда для $\varphi(r) = Q - \frac{U}{\alpha^2} \left(\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} - 1 \right) - \frac{T J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)}$ мы получаем следующие коэффициенты разложения φ_k :

$$\begin{aligned}
\varphi_k &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \left(\left(Q + \frac{U}{\alpha^2} \right) \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr - \right. \\
& \quad \left. - \frac{U}{\alpha^2 J_0(\alpha R)} \cdot \int_0^R r J_0(\alpha r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr - \frac{T}{J_0(\beta R)} \cdot \int_0^R r J_0(\beta r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \right) = \\
& = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \left(\left(Q + \frac{U}{\alpha^2} \right) \cdot \frac{R^2}{\mu_k} \cdot J_1^2(\mu_k) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{U}{\alpha^2 J_0(\alpha R)} \cdot \frac{\mu_k R^2 J_0(\alpha R)}{\mu_k^2 - \alpha^2 R^2} \cdot J_1^2(\mu_k) - \frac{T}{J_0(\beta R)} \cdot \frac{\mu_k R^2 J_0(\beta R)}{\mu_k^2 - \beta^2 R^2} \cdot J_1^2(\mu_k) \right) = \\
& = \frac{2}{J_1(\mu_k)} \cdot \left(\left(Q + \frac{U}{\alpha^2} \right) \cdot \frac{1}{\mu_k} - \frac{U}{\alpha^2} \cdot \frac{\mu_k}{\mu_k^2 - \alpha^2 R^2} - T \cdot \frac{\mu_k}{\mu_k^2 - \beta^2 R^2} \right) = \\
& = \frac{2}{J_1(\mu_k)} \cdot \left(\left(Q + \frac{U}{\alpha^2} \right) \frac{1}{\mu_k} + \frac{U}{\alpha^2} \cdot \frac{\mu_k}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} + T \cdot \frac{\mu_k}{\beta^2 R^2 - \mu_k^2} \right) = \\
& = \left[\text{так как } \frac{U}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\mu_k} + \frac{U}{\alpha^2} \cdot \frac{\mu_k}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} = \frac{U}{\alpha^2 \mu_k} \cdot \frac{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2 + \mu_k^2}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} = \frac{U R^2}{\mu_k (\alpha^2 R^2 - \mu_k^2)} \right] = \\
& = \frac{2}{J_1(\mu_k)} \cdot \left(\frac{Q}{\mu_k} + \frac{U R^2}{\mu_k} \cdot \frac{1}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} + T \cdot \frac{\mu_k}{\beta^2 R^2 - \mu_k^2} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы уже знаем функцию

$$\begin{aligned}
v(r, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\frac{\mu_k}{R} z} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) = \\
&= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(\mu_k)} \cdot \left(\frac{Q}{\mu_k} + \frac{U R^2}{\mu_k} \cdot \frac{1}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} + T \cdot \frac{\mu_k}{\beta^2 R^2 - \mu_k^2} \right) e^{-\frac{\mu_k}{R} z} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),
\end{aligned}$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. Итак, поскольку

$$u(r, z) = v(r, z) + \frac{U}{\alpha^2} \left(\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} - 1 \right) \cdot e^{-\alpha z} + \frac{T J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \cdot e^{-\beta z}. \quad (1.36.12)$$

мы получаем

Ответ: (Ответ в задачнике почему-то написан для случая $T = Q$.)

$$u(r, z) = \frac{U}{\alpha^2} \left(\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} - 1 \right) \cdot e^{-\alpha z} + \frac{T J_0(\beta r)}{J_0(\beta R)} \cdot e^{-\beta z} + \\ + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(\mu_k)} \cdot \left(\frac{Q}{\mu_k} + \frac{UR^2}{\mu_k} \cdot \frac{1}{\alpha^2 R^2 - \mu_k^2} + T \cdot \frac{\mu_k}{\beta^2 R^2 - \mu_k^2} \right) e^{-\frac{\mu_k}{R} z} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

1.37. № 784

Два одинаковых цилиндрических стакана $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq z \leq l$, соединённые верхними кромками при помощи пренебрежимо тонкой изоляционной прокладки, образуют цилиндрическую коробку $0 \leq r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq z \leq 2l$. Найти распределение потенциала электростатического поля внутри этой коробки, если вся поверхность нижнего стакана поддерживается при потенциале V_1 , а вся поверхность верхнего стакана – при потенциале V_2 .

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < 2l; \\ |u(0, z)| < \infty, \quad u(R, z) = \psi_1(z) = \begin{cases} V_1, & 0 < z < l, \\ V_2, & l < z < 2l; \end{cases} \\ u(r, 0) = V_1, \quad u(r, 2l) = V_2, & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.37.1)$$

Шаг 0. Избавление от неоднородности в части краевых условий

Здесь естественно искать решение задачи (1.37.1) в виде:

$$u(r, z) = \frac{z}{2l} V_2 + \frac{2l - z}{2l} V_1 + v(r, z), \quad (1.37.2)$$

поскольку функция

$$\eta(z) = \frac{z}{2l} V_2 + \frac{2l - z}{2l} V_1$$

удовлетворяет краевым условиям

$$\eta(0) = V_1, \quad \eta(2l) = V_2.$$

Тогда функция

$$\psi(z) \equiv \psi_1(z) - \eta(z) = \begin{cases} -\frac{z}{2l} (V_2 - V_1), & 0 < z < l, \\ \frac{2l - z}{2l} (V_2 - V_1), & l < z < 2l \end{cases} \quad (1.37.3)$$

есть функция краевого условия $v(R, z) = \psi(z)$, и тогда $v(r, z) = u(r, z) - \eta(z)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < 2l; \\ |v(0, z)| < \infty, \quad v(R, z) = \psi(z) & 0 < z < 2l; \\ v(r, 0) = v(r, 2l) = 0, & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.37.4)$$

при $\psi(r, z)$, определённой в (1.37.3).

В наших руках был выбор: избавиться от неоднородности в краевом условии $u(R, z) = \psi_1(z)$ или от неоднородностей $u(r, 0) = V_1$, $u(r, 2l) = V_2$. В зависимости от того, что мы выбираем, мы получим задачу Штурма–Лиувилля либо для $\mathbf{X}_k(r)$, либо для $\mathbf{Z}_k(z)$, и соответственно вид ряда в ответе.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.37.4) в виде

$$v(r, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z), \quad (1.37.5)$$

то, подставив (1.37.5) в уравнение $\frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} = 0$, получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) \right) = 0.$$

Это равенство заведомо верно, если все члены ряда в левой части равны нулю:

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) = 0, \quad \forall k.$$

Поскольку сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть нулём в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – одна и та же константа, но с разным знаком, то $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$-\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' - \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.37.6)$$

$$\mathbf{Z}''_k(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \quad (1.37.7)$$

Равенство (1.37.6) мы перепишем в виде:

$$-\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.37.8)$$

Это – почти в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$, только знак перед λ_k не тот. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.37.4).

Условие $|v(0, z)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.37.9)$$

а условие $v(R, z) = \psi(z)$ с учётом, что для $\psi(z)$ справедливо разложение

$$\psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \mathbf{Z}_k(z), \quad (1.37.10)$$

прейдёт в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = \psi_k. \quad (1.37.11)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_k(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ мы получили уравнение (1.37.7) $\mathbf{Z}_k''(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий $v(r, 0) = v(r, 2l) = 0$, $0 \leq r < R$, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_k''(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(2l) = 0. \end{cases} \quad (1.37.12)$$

Эту задачу мы неоднократно решали, выпишем результат:

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.37.12) имеют вид:

$$\lambda_k = \varkappa_k^2, \quad \varkappa = \frac{\pi k}{2l}, \quad \mathbf{Z}_k(z) = \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.37.13)$$

Шаг 3. Решение задачи для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\lambda = -\varkappa_k^2$, $\nu = 0$, $\alpha = 1$ и $\beta = 0$, только с неоднородным краевым условием:

$$\begin{cases} -(r\mathbf{X}_k'(r))' = -\varkappa_k^2 r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = \psi_k. \end{cases} \quad (1.37.14)$$

Приведём наше уравнение $-(r\mathbf{X}_k'(r))' = -\varkappa_k^2 r \mathbf{X}_k(r)$ к виду (1.1.1). Сначала перепишем его в виде

$$-(r\mathbf{X}_k'(r))' = \left(i\varkappa_k\right)^2 r \mathbf{X}_k(r)$$

Далее в результате замены

$$x = i\varkappa_k r, \quad \mathbf{Y}(x) = \mathbf{Y}(i\varkappa_k r) = \mathbf{X}_k(r) \quad \mathbf{X}_k'(r) = i\varkappa_k \mathbf{Y}'(x), \quad \mathbf{X}_k''(r) = (i\varkappa_k)^2 \mathbf{Y}''(x)$$

получим, что

$$-r\mathbf{X}_k''(r) - \mathbf{X}_k'(r) = \left(i\varkappa_k\right)^2 r \mathbf{X}_k(r)$$

превратится в

$$-\frac{x}{i\varkappa_k} \cdot (i\varkappa_k)^2 \mathbf{Y}''(x) - i\varkappa_k \mathbf{Y}'(x) = \left(i\varkappa_k\right)^2 \frac{x}{i\varkappa_k} \cdot \mathbf{Y}(x),$$

сократив на $-i\varkappa_k$, получаем уравнение:

$$x\mathbf{Y}''(x) + \mathbf{Y}'(x) + x\mathbf{Y}(x) = 0,$$

которое есть в точности уравнение Бесселя (1.1.1) с $\nu = 0$.

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.1, стр. 2.

Общее решение уравнения Бесселя (1.1.1) задаётся из формулой

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x), \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

В нашем случае $\nu = 0$, а $x = i\varkappa_k r$, поэтому

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 J_0(i\varkappa_k r) + c_2 N_0(i\varkappa_k r).$$

В силу краевого условия $|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty$, поскольку $N_0(+0i) = \infty$, получаем, что $c_2 = 0$, поэтому

$$\mathbf{X}_k(x) = c_1 J_0(i\kappa r) \equiv \left[\text{в силу (1.1.7), стр. 1 при } \nu = 0 \right] \equiv c_1 I_0(\kappa r).$$

Краевое условие $\mathbf{X}_k(R) = \psi_k$ даёт нам константу c_1 :

$$c_1 I_0(\kappa R) = \psi_k, \quad \implies \quad c_1 = \frac{\psi_k}{I_0(\kappa R)}.$$

Наконец, получаем, что решениями задачи (1.37.14) с неоднородным краевым условием являются функции:

$$\mathbf{X}_k(r) = \frac{I_0(\kappa_k r)}{I_0(\kappa_k R)}, \quad \text{где } \kappa_k = \frac{\pi k}{2l}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.37.15)$$

Шаг 4. Разложение функции $\psi(z)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (1.37.12)

Функция $\psi(z)$ может быть разложена в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (1.37.12) следующим образом⁵:

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) \quad \text{с коэффициентами} \quad (1.37.16)$$

$$\psi_k = \frac{1}{l} \cdot \int_0^{2l} \psi(z) \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz. \quad (1.37.17)$$

Ответ в общем виде:

$$v(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cdot \frac{I_0(\kappa_k r)}{I_0(\kappa_k R)} \cdot \sin(\kappa_k z),$$

где $\kappa_k = \frac{\pi k}{2l}$ а ψ_k задаются формулами (1.37.17):

$$\psi_k = \frac{1}{l} \cdot \int_0^{2l} \psi(z) \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz. \quad (1.37.17)$$

Поскольку в нашем случае

$$\psi(z) \equiv \psi_1(z) - \eta(z) = \begin{cases} -\frac{z}{2l} (V_2 - V_1), & 0 < z < l, \\ \frac{2l-z}{2l} (V_2 - V_1), & l < z < 2l \end{cases} \quad (1.37.3)$$

то для вычисления ψ_k нам надо найти интегралы

$$\begin{aligned} \int_l^{2l} \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz &= -\frac{2l}{\pi k} \cos\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) \Big|_{z=l}^{z=2l} = \frac{2l}{\pi k} \left((-1)^{k+1} + \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) \right) = \\ &= \begin{cases} \frac{2l(-1+(-1)^m)}{\pi k}, & k = 2m, \\ \frac{2l}{\pi k}, & k = 2m - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

⁵Подобные задачи мы решали многократно и подробно, см., например, в № 705, semS1

$$\begin{aligned} \int_0^{2l} z \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz &= \frac{2l}{\pi k} \left(-z \cos\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) \Big|_{z=0}^{z=2l} + \int_0^{2l} \cos\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz \right) = \\ &= \frac{2l}{\pi k} \left(2l(-1)^{k+1} + \frac{2l}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) \Big|_{z=0}^{z=2l} \right) = \frac{4l^2(-1)^{k+1}}{\pi k} \end{aligned}$$

Тогда для ψ_k мы получаем

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{1}{l} \cdot \int_0^{2l} \psi(z) \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz = \\ &= \frac{1}{l} \cdot \frac{V_2 - V_1}{2l} \cdot \left(- \int_0^l z \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz + 2l \int_l^{2l} \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz - \int_l^{2l} z \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz \right) = \\ &= \frac{V_2 - V_1}{2l^2} \cdot \left(2l \int_l^{2l} \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz - \int_0^{2l} z \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz \right) = \\ &= \begin{cases} \frac{V_2 - V_1}{2l^2} \cdot \left(\frac{4l^2(-1+(-1)^m)}{\pi k} - \frac{4l^2(-1)^{k+1}}{\pi k} \right), & k = 2m, \\ \frac{V_2 - V_1}{2l^2} \cdot \left(2l \cdot \frac{2l}{\pi k} - \frac{4l^2(-1)^{k+1}}{\pi k} \right), & k = 2m - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\psi_k = \begin{cases} \frac{V_2 - V_1}{\pi} \cdot (-1)^m, & k = 2m, \\ 0, & k = 2m - 1. \end{cases} \quad (1.37.18)$$

Итак, мы уже знаем функцию

$$v(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cdot \frac{I_0(\varkappa_k r)}{I_0(\varkappa_k R)} \cdot \sin(\varkappa_k z),$$

где $\varkappa_k = \frac{\pi k}{2l}$, а ψ_k задаются формулами (1.37.18).

Если перейти в этом ряде к суммированию по m , получим

$$v(r, z) = \frac{V_2 - V_1}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cdot \frac{I_0(\varkappa_{2m} r)}{I_0(\varkappa_{2m} R)} \cdot \sin(\varkappa_{2m} z).$$

Ответ:

$$u(r, z) = \frac{z}{2l} V_2 + \frac{V_2 - V_1}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cdot \frac{I_0\left(\frac{\pi m r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{\pi m R}{l}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi m z}{l}\right).$$

1.38. № 785

В конечной трубе $b \leq r < d$, $0 < z < l$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ найти функцию $u(r, z)$ из условий:

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ u(b, z) = 0, \quad u(d, z) = U & 0 < z < l; \\ u(r, 0) = u(r, l) = 0, & b < r < d. \end{cases} \quad (1.38.1)$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.38.1) в виде

$$u(r, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z), \quad (1.38.2)$$

то, подставив (1.38.2) в уравнение $\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + v_{zz} = 0$, получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) \right) = 0.$$

Это равенство заведомо верно, если все члены ряда в левой части равны нулю:

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) = 0, \quad \forall k.$$

Поскольку сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть нулём в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – одна и та же константа, но с разным знаком, то $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$:

$$-\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' - \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.38.3)$$

$$\mathbf{Z}''_k(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \quad (1.38.4)$$

Равенство (1.38.3) мы перепишем в виде:

$$-\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.38.5)$$

Это – почти в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$, только знак перед λ_k не тот. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.38.1).

Условие $u(b, z) = 0$ превратится в

$$\mathbf{X}_k(b) = 0, \quad (1.38.6)$$

а условие $u(d, z) = \psi(z) \equiv U$ с учётом, что для $\psi(z)$ справедливо разложение

$$\psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \mathbf{Z}_k(z), \quad (1.38.7)$$

прейдёт в условие

$$\mathbf{X}_k(d) = \psi_k. \quad (1.38.8)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_k(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ мы получили уравнение (1.38.4) $\mathbf{Z}''_k(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий $u(r, 0) = u(r, l) = 0$, $b < r < d$, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}''_k(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(l) = 0. \end{cases} \quad (1.38.9)$$

Эту задачу мы неоднократно решали, выпишем результат:

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.38.9) имеют вид:

$$\lambda_k = \mu_k^2, \quad \mu = \frac{\pi k}{l}, \quad \mathbf{Z}_k(z) = \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.38.10)$$

Шаг 3. Решение задачи для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя с $\nu = 0$

$$\begin{cases} -(r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), & b < r < d; \\ \mathbf{X}_k(b) = 0, \\ \mathbf{X}_k(d) = \psi_k. \end{cases} \quad (1.38.11)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.1, стр. 2.

Общее решение уравнения Бесселя (1.1.1)

$$x^2 \mathbf{Y}''(x) + x \mathbf{Y}'(x) + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Y}(x) = 0 \quad (1.1.1)$$

задаётся формулой

$$\mathbf{Y}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x), \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Наше уравнение $(r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k r \mathbf{X}_k(r)$ обычной уже заменой

$$x = \sqrt{-\lambda_k} r \equiv i\mu_k r, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}$$

сводится к уравнению

$$x^2 \mathbf{Y}''(x) + x \mathbf{Y}'(x) + x^2 \mathbf{Y}(x) = 0,$$

которое совпадает с (1.1.1) при $\nu = 0$. Поэтому его общее решение задаётся формулой

$$\mathbf{X}_k(r) = \tilde{c}_1 J_0\left(\sqrt{-\lambda_k} r\right) + \tilde{c}_2 N_0\left(\sqrt{-\lambda_k} r\right) = \tilde{c}_1 J_0(i\mu_k r) + \tilde{c}_2 N_0(i\mu_k r). \quad (1.38.12)$$

По определению 1.1.2, а точнее из формул (1.1.5), (1.1.7), стр. 1,

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \quad (1.1.5)$$

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi i}{2}\nu} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = e^{\frac{\pi i}{2}\nu} H_\nu^{(1)}(ix). \quad (1.1.7)$$

получаем, что при $\nu = 0$

$$K_0(x) = e^0 H_0^{(1)}(ix) \equiv J_0(ix) + iN_0(ix) \implies N_0(ix) = i(I_0(x) - K_0(x)).$$

Тогда

$$\tilde{c}_1 J_0(i\mu_k r) + \tilde{c}_2 N_0(i\mu_k r) = \tilde{c}_1 I_0(\mu_k r) + i\tilde{c}_2 I_0(\mu_k r) - i\tilde{c}_2 K_0(\mu_k r)$$

Поэтому, переобозначив константы

$$c_1 = \tilde{c}_1 + i\tilde{c}_2, \quad c_2 = -i\tilde{c}_2,$$

из (1.38.12) получим:

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 I_0(\mu_k r) + c_2 K_0(\mu_k r). \quad (1.38.13)$$

В силу краевых условий $\mathbf{X}_k(b) = 0$, $\mathbf{X}_k(d) = \psi_k$ имеем

$$\begin{cases} c_1 I_0(\mu_k b) + c_2 K_0(\mu_k b) = 0, \\ c_1 I_0(\mu_k d) + c_2 K_0(\mu_k d) = \psi_k. \end{cases} \quad (1.38.14)$$

Если рассматривать (1.38.14) как систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно переменных c_1 и c_2 , то в случае, когда её определитель не равен нулю⁶

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} I_0(\mu_k b) & K_0(\mu_k b) \\ I_0(\mu_k d) & K_0(\mu_k d) \end{vmatrix} = I_0(\mu_k b) K_0(\mu_k d) - I_0(\mu_k d) K_0(\mu_k b) \neq 0 \quad (1.38.15)$$

эта система имеет единственное решение (его можно найти, например, по правилу Крамера)

$$c_1 = -\frac{\psi_k K_0(\mu_k b)}{\Delta}, \quad c_2 = \frac{\psi_k I_0(\mu_k b)}{\Delta}. \quad (1.38.16)$$

Поэтому

$$\mathbf{X}_k(r) = \psi_k \cdot \frac{I_0(\mu_k b) K_0(\mu_k r) - I_0(\mu_k r) K_0(\mu_k b)}{I_0(\mu_k b) K_0(\mu_k d) - I_0(\mu_k d) K_0(\mu_k b)}, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}. \quad (1.38.17)$$

Ответ в общем виде:

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cdot \frac{I_0(\mu_k b) K_0(\mu_k r) - I_0(\mu_k r) K_0(\mu_k b)}{I_0(\mu_k b) K_0(\mu_k d) - I_0(\mu_k d) K_0(\mu_k b)} \cdot \sin(\mu_k z),$$

где $\mu_k = \frac{\pi k}{l}$ а ψ_k задаются формулами:

$$\psi_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l \psi(z) \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz. \quad (1.38.18)$$

Поскольку в нашем случае $\psi(z) \equiv U$, то для вычисления ψ_k мы получаем

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{2}{l} \cdot \int_0^l \psi(z) \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz = \frac{2U}{l} \cdot \int_0^l \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz = \\ &= -\frac{2U}{l} \cdot \frac{l}{\pi k} \cos\left(\frac{\pi k z}{l}\right) \Big|_{z=0}^{z=l} = -\frac{2U}{\pi k} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & k = 2m, \\ \frac{4U}{\pi(2m-1)}, & k = 2m-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Так как все коэффициенты с чётными номерами у ряда

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cdot \frac{I_0(\mu_k b) K_0(\mu_k r) - I_0(\mu_k r) K_0(\mu_k b)}{I_0(\mu_k b) K_0(\mu_k d) - I_0(\mu_k d) K_0(\mu_k b)} \cdot \sin(\mu_k z)$$

оказались равными нулю, уместно перейти к суммированию по m , где $k = 2m - 1$:

Ответ:

$$u(r, z) = \frac{4U}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{I_0(\mu_{2m-1} b) K_0(\mu_{2m-1} r) - I_0(\mu_{2m-1} r) K_0(\mu_{2m-1} b)}{I_0(\mu_{2m-1} b) K_0(\mu_{2m-1} d) - I_0(\mu_{2m-1} d) K_0(\mu_{2m-1} b)} \cdot \sin(\mu_{2m-1} z),$$

где $\mu_{2m-1} = \frac{\pi(2m-1)}{l}$.

⁶ Случай $\Delta = 0$ мы рассматривать не будем.

1.39. № 786 а)

Найти стационарное распределение температуры в однородном цилиндре $0 \leq r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq z \leq l$ для случая, когда нижнее основание цилиндра имеет температуру T , а остальная поверхность – температуру, равную нулю.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0, z)| < \infty, \quad u(R, z) = 0 & 0 < z < l; \\ u(r, 0) = T, \quad u(r, l) = 0, & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.39.1)$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.39.1) в виде

$$u(r, z) = \sum_{k=...}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z), \quad (1.39.2)$$

то, подставив (1.39.2) в уравнение $\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0$, получим:

$$\sum_{k=...}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) \right) = 0.$$

Это равенство заведомо верно, если все члены ряда в левой части равны нулю:

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) = 0, \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $\mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z)$, получим:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = 0.$$

Сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть нулём в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – одинаковые константы с разным знаком. То есть $\exists \lambda_k$:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = -\frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{X}_k(r)$ и $\mathbf{Z}_k(z)$ получаем уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.39.3)$$

$$\mathbf{Z}''_k(z) - \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \quad (1.39.4)$$

Равенство (1.39.3) мы перепишем в виде:

$$-\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.39.5)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.39.1).

Условие $|u(0, z)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.39.6)$$

а условие $u(R, z) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.39.7)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\lambda = \lambda_k$, $\nu = 0$, $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} -(r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.39.8)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.39.8) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.39.8) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & \mathbf{X}_k(r) = J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k \text{ – корни уравнения} & J_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.39.9)$$

Шаг 3. Решение задачи для $\mathbf{Z}_k(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ мы получили уравнение (1.39.4) $\mathbf{Z}_k''(z) - \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0$. Вспомним, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2$, и добавим к нему краевые условия, следующие из условий $u(r, 0) = T \equiv \psi(r)$, $u(r, l) = 0$, $0 \leq r < R$, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_k''(z) - \frac{\mu_k^2}{R^2} \mathbf{Z}_k(z) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(0) = \psi_k, \\ \mathbf{Z}_k(l) = 0. \end{cases} \quad (1.39.10)$$

Общее решение уравнения $\mathbf{Z}_k''(z) - \frac{\mu_k^2}{R^2} \mathbf{Z}_k(z) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{Z}_k(z) = c_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right) + c_2 \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right).$$

Из краевого условия $\mathbf{Z}_k(0) = \psi_k$ следует, что $c_2 = \psi_k$, откуда

$$\mathbf{Z}_k(z) = c_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right) + \psi_k \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right).$$

Тогда из краевого условия $\mathbf{Z}_k(l) = 0$ получаем

$$\mathbf{Z}_k(l) = c_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right) + \psi_k \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad c_1 = - \frac{\psi_k \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right)}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{Z}_k(z) = \psi_k \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right) - \operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right) \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.39.11)$$

Шаг 4. Разложение функции $\psi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\psi(r) \equiv T$ разлагается в ряд Фурье

$$\psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad (1.39.12)$$

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2} \left[J_0'(\mu_k) \right]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) \underbrace{J_0^2(\mu_k)}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \end{aligned}$$

Ответ в общем виде:

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right) - \operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right) \right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а ψ_k задаются формулами:

$$\psi_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \quad (1.39.13)$$

Поскольку в нашем случае $\psi(r, z) \equiv T$, то для ψ_k мы получаем

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \frac{2T}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \\ &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R} \right] = \frac{2T}{\mu_k^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^{\mu_k} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9) при } \nu = 0 \right] = \\ &= \frac{2T}{\mu_k^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^{\mu_k} [x J_1(x)]' dx = \frac{2T}{\mu_k^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot x J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} = \frac{2T}{\mu_k J_1(\mu_k)} \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(r, z) = 2T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_1(\mu_k)} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cdot \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right) - \operatorname{cth}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right) \right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

1.40. № 786 Б)

Найти стационарное распределение температуры в однородном цилиндре $0 \leq r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq z \leq l$ для случая, когда нижнее основание цилиндра имеет нулевую температуру, верхнее основание теплоизолировано, температура боковой поверхности равна $f(z)$.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0, z)| < \infty, \quad u(R, z) = f(z) & 0 < z < l; \\ u(r, 0) = u_z(r, l) = 0, & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.40.1)$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.40.1) в виде

$$u(r, z) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z), \quad (1.40.2)$$

то, подставив (1.40.2) в уравнение $\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0$, получим:

$$\sum_{k=\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) \right) = 0.$$

Это равенство заведомо верно, если все члены ряда в левой части равны нулю:

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) = 0, \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $\mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z)$, получим:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = 0.$$

Сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть нулём в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – одинаковые константы с разным знаком. То есть $\exists \lambda_k$:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = - \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = \lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{X}_k(r)$ и $\mathbf{Z}_k(z)$ получаем уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' - \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.40.3)$$

$$\mathbf{Z}''_k(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \quad (1.40.4)$$

Равенство (1.40.3) мы перепишем в виде:

$$-\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.40.5)$$

Это – почти в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.40.1).

Условие $|u(0, z)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.40.6)$$

а условие $u(R, z) = f(z)$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = f_k. \quad (1.40.7)$$

Поскольку неоднородность здесь задаётся функцией, зависящей от z , надо сначала решить задачу Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_k(z)$, чтобы затем разложить $f(z)$ в ряд по собственным функциям этой задачи. Поэтому

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_k(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ мы получили уравнение (1.40.4) $\mathbf{Z}_k''(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий $u(r, 0) = 0$, $u_z(r, l) = 0$, $0 \leq r < R$, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_k''(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_k'(l) = 0. \end{cases} \quad (1.40.8)$$

Эту задачу мы уже много раз решали. Воспользуемся результатом: собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.40.8) имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l} \right)^2, \quad \mathbf{Z}_n(z) = \sin \left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l} \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.40.9)$$

Шаг 3. Разложение функции $f(z)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

Функция $f(z)$ разлагается в ряд Фурье по синусам следующим стандартным образом:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l} \right), \quad (1.40.10)$$

$$f_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(z) \sin \left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l} \right) dz. \quad (1.40.11)$$

Шаг 4. Решение задачи для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили уравнение $-(r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r)$. Воспользуемся краевыми условиями (1.40.6) – (1.40.7) и получим задачу

$$\begin{cases} -(r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = f_k. \end{cases} \quad (1.40.12)$$

По теореме 1.1.1, стр. 2

Общее решение уравнения Бесселя (1.1.1)

$$x^2 \mathbf{Y}''(x) + x \mathbf{Y}'(x) + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Y}(x) = 0 \quad (1.1.1)$$

задаётся формулой

$$\mathbf{Y}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x), \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Наше уравнение $(r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k r \mathbf{X}_k(r)$ обычной уже заменой

$$x = \sqrt{-\lambda_k} r \equiv i\mu_k r, \quad \mu_k = \frac{\pi(2k-1)}{2l}$$

сводится к уравнению

$$x^2 \mathbf{Y}''(x) + x \mathbf{Y}'(x) + x^2 \mathbf{Y}(x) = 0,$$

которое совпадает с (1.1.1) при $\nu = 0$. Поэтому его общее решение задаётся формулой

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda_k} r) + c_2 N_0(\sqrt{\lambda_k} r) = J_0(i\mu_k r) + c_2 N_0(i\mu_k r). \quad (1.40.13)$$

Из краевого условия $|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty$ получаем, что $c_2 = 0$ и

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 J_0(i\mu_k r) = \left[\text{по определению 1.1.2} \right] = c_1 I_0(\mu_k r).$$

Наконец, из краевого условия $\mathbf{X}_k(R) = f_k$ получаем, что $c_1 = \frac{f_k}{I_0(\mu_k R)}$ и

Поэтому

$$\mathbf{X}_k(r) = \frac{f_k}{I_0(\mu_k R)} I_0(\mu_k r), \quad \mu_k = \frac{\pi(2k-1)}{2l}. \quad (1.40.14)$$

Поскольку в нашем случае $f(z)$ в явном виде не задана, мы можем записать ответ только в общем виде:

Ответ:

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{I_0(\mu_k R)} I_0(\mu_k r) \sin(\mu_k z),$$

где $\mu_k = \frac{\pi(2k-1)}{2l}$, $k \in \mathbb{N}$, а f_k задаются формулой (1.40.11).

1.41. № 786 В)

Найти стационарное распределение температуры в однородном цилиндре $0 \leq r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq z \leq l$ для случая, когда температура оснований цилиндра нулевая, а температура боковой поверхности равна $f(z) = Uz(l-z)$.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0, z)| < \infty, \quad u(R, z) = f(z) = Uz(l-z) & 0 < z < l; \\ u(r, 0) = u(r, l) = 0, & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.41.1)$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.41.1) в виде

$$u(r, z) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z), \quad (1.41.2)$$

то, подставив (1.41.2) в уравнение $\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0$, получим:

$$\sum_{k=\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) \right) = 0.$$

Это равенство заведомо верно, если все члены ряда в левой части равны нулю:

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) = 0, \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $\mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z)$, получим:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = 0.$$

Сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть нулём в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – одинаковые константы с разным знаком. То есть $\exists \lambda_k$:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = - \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = \lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{X}_k(r)$ и $\mathbf{Z}_k(z)$ получаем уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' - \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.41.3)$$

$$\mathbf{Z}''_k(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \quad (1.41.4)$$

Равенство (1.41.3) мы перепишем в виде:

$$- \frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.41.5)$$

Это – почти в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.41.1).

Условие $|u(0, z)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.41.6)$$

а условие $u(R, z) = f(z)$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = f_k. \quad (1.41.7)$$

Поскольку неоднородность здесь задаётся функцией, зависящей от z , надо сначала решить задачу Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_k(z)$, чтобы затем разложить $f(z)$ в ряд по собственным функциям этой задачи. Поэтому

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_k(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ мы получили уравнение (1.41.4) $\mathbf{Z}''_k(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий $u(r, 0) = 0$, $u(r, l) = 0$, $0 \leq r < R$, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}''_k(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(l) = 0. \end{cases} \quad (1.41.8)$$

Эту задачу мы уже много раз решали. Воспользуемся результатом: собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.41.8) имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2, \quad \mathbf{Z}_n(z) = \sin \left(\frac{\pi k z}{l} \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.41.9)$$

Шаг 3. Разложение функции $f(z)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

Функция $f(z)$ разлагается в ряд Фурье по синусам следующим стандартным образом:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \left(\frac{\pi k z}{l} \right), \quad (1.41.10)$$

$$f_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(z) \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz. \quad (1.41.11)$$

Шаг 4. Решение задачи для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили уравнение $-(r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r)$. Воспользуемся краевыми условиями (1.41.6) – (1.41.7) и получим задачу

$$\begin{cases} -(r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = f_k. \end{cases} \quad (1.41.12)$$

По теореме 1.1.1, стр. 2

Общее решение уравнения Бесселя (1.1.1)

$$x^2 \mathbf{Y}''(x) + x \mathbf{Y}'(x) + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Y}(x) = 0 \quad (1.1.1)$$

задаётся формулой

$$\mathbf{Y}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x), \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Наше уравнение $(r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k r \mathbf{X}_k(r)$ обычной уже заменой

$$x = \sqrt{-\lambda_k} r \equiv i\mu_k r, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}$$

сводится к уравнению

$$x^2 \mathbf{Y}''(x) + x \mathbf{Y}'(x) + x^2 \mathbf{Y}(x) = 0,$$

которое совпадает с (1.1.1) при $\nu = 0$. Поэтому его общее решение задаётся формулой

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 J_0\left(\sqrt{\lambda_k} r\right) + c_2 N_0\left(\sqrt{\lambda_k} r\right) = J_0(i\mu_k r) + c_2 N_0(i\mu_k r). \quad (1.41.13)$$

Из краевого условия $|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty$ получаем, что $c_2 = 0$ и

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 J_0(i\mu_k r) = \left[\text{по определению 1.1.2} \right] = c_1 I_0(\mu_k r).$$

Наконец, из краевого условия $\mathbf{X}_k(R) = f_k$ получаем, что $c_1 = \frac{f_k}{I_0(\mu_k R)}$ и

Поэтому

$$\mathbf{X}_k(r) = \frac{f_k}{I_0(\mu_k R)} I_0(\mu_k r), \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}. \quad (1.41.14)$$

Ответ в общем виде:

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{I_0(\mu_k R)} I_0(\mu_k r) \sin(\mu_k z),$$

где $\mu_k = \frac{\pi k}{l}$, $k \in \mathbb{N}$, а f_k задаются формулой (1.41.11).

Посчитаем коэффициенты Фурье для функции $f(z) = Uz(l-z)$. Для этого нам понадобятся интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^l z \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz &= -\frac{l}{\pi k} \left(z \cos\left(\frac{\pi k z}{l}\right) \Big|_{z=0}^{z=l} - \int_0^l \cos\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz \right) = \\ &= -\frac{l}{\pi k} \left(l(-1)^k - \frac{l}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) \Big|_{z=0}^{z=l} \right) = \frac{l^2(-1)^{k+1}}{\pi k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^l z^2 \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz &= -\frac{l}{\pi k} \left(z^2 \cos\left(\frac{\pi k z}{l}\right) \Big|_{z=0}^{z=l} - 2 \int_0^l z \cos\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz \right) = \\
 &= -\frac{l}{\pi k} \left(l^2 (-1)^k - \frac{l}{\pi k} \left(z \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) \Big|_{z=0}^{z=l} - \int_0^l \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz \right) \right) = \\
 &= -\frac{l}{\pi k} \left(l^2 (-1)^k - \left(\frac{l}{\pi k} \right)^2 \cos\left(\frac{\pi k z}{l}\right) \Big|_{z=0}^{z=l} \right) = \\
 &= -\frac{l}{\pi k} \left(l^2 (-1)^k + \left(\frac{l}{\pi k} \right)^2 (1 - (-1)^k) \right) = -\frac{l^3 (1 + (-1)^k (\pi^2 k^2 - 1))}{\pi^3 k^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_k &= \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(z) \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l U z(l-z) \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz = \\
 &= \frac{2U}{l} \cdot \left(l \int_0^l z \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz - \int_0^l z^2 \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz \right) = \\
 &= \frac{2U}{l} \cdot \left(\frac{l^3 (-1)^{k+1}}{\pi k} + \frac{l^3 (1 + (-1)^k (\pi^2 k^2 - 1))}{\pi^3 k^3} \right) = \\
 &= \frac{2U}{l} \cdot \frac{l^3 (\pi^2 k^2 (-1)^{k+1} + 1 + (-1)^k (\pi^2 k^2 - 1))}{\pi^3 k^3} = \\
 &= \frac{2Ul^2 (1 - (-1)^k)}{\pi^3 k^3} = \begin{cases} 0, & k = 2m; \\ \frac{4Ul^2}{\pi^3 (2m-1)^3}, & k = 2m-1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Поскольку все коэффициенты с чётными номерами равны нулю, целесообразно в ряде

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{I_0(\mu_k R)} I_0(\mu_k r) \sin(\mu_k z),$$

перейти к суммированию по m :

Ответ:

$$u(r, z) = \frac{4Ul^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3 I_0\left(\frac{\pi(2m-1)R}{l}\right)} I_0\left(\frac{\pi(2m-1)r}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi(2m-1)z}{l}\right).$$

1.42. № 786 Г)

Найти стационарное распределение температуры в однородном цилиндре $0 \leq r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq z \leq l$ для случая, когда через нижнее основание в цилиндр подаётся нормальный⁷ тепловой поток плотности q , а верхнее основание и боковая поверхность имеет температуру T .

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0, z)| < \infty, \quad u(R, z) = T & 0 < z < l; \\ u_z(r, 0) = -\frac{q}{\kappa}, \quad u(r, l) = T, & 0 \leq r < R, \end{cases} \quad (1.42.1)$$

где κ – коэффициент теплопроводности.

Шаг 0. Избавление от неоднородности краевых условий и вид решения

В данном примере неоднородны все краевые условия, поэтому нам придётся насильно сделать однородными либо условия

$$u_z(r, 0) = -\frac{q}{\kappa}, \quad u(r, l) = T,$$

либо условие

$$u(R, z) = T.$$

В зависимости от того, какой из этих вариантов мы выберем, ряд, представляющий решение, будет либо рядом Фурье по косинусам от z , либо рядом Фурье по функциям Бесселя от r . Мы разберём первый случай.

Чтобы избавиться от неоднородности в условиях $u_z(r, 0) = -\frac{q}{\kappa}$, $u(r, l) = T$, мы должны найти (подобрать) функцию $w(z)$, для которой выполнялись бы условия

$$\begin{cases} \Delta w \equiv \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r + w_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ w_z(r, 0) = -\frac{q}{\kappa}, \quad w(r, l) = T, & 0 \leq r < R, \end{cases} \quad (1.42.2)$$

Очевидно, легко найти линейную функцию, удовлетворяющую (1.42.2):

$$w(z) = Az + B, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta w \equiv w'' = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ w'(0) = A, \quad w(l) = Al + B, & 0 \leq r < R, \end{cases}$$

откуда получаем

$$A = -\frac{q}{\kappa}, \quad B = T + \frac{q}{\kappa} \cdot l.$$

Наконец,

$$w(z) = T + \frac{q}{\kappa} \cdot (l - z).$$

Тогда для функции

$$v(r, z) = u(r, z) - w(z) = u(r, z) - T - \frac{q}{\kappa} \cdot (l - z)$$

получаем задачу:

$$\begin{cases} \Delta v \equiv \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |v(0, z)| < \infty, & 0 < z < l; \\ v(R, z) = T - w(z) = -\frac{q}{\kappa} \cdot (l - z) \equiv f(z) & 0 < z < l; \\ v_z(r, 0) = v(r, l) = 0, & 0 \leq r < R, \end{cases} \quad (1.42.3)$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.42.3) в виде

$$v(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z), \quad (1.42.4)$$

то, подставив (1.42.4) в уравнение $\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0$, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) \right) = 0.$$

Это равенство заведомо верно, если все члены ряда в левой части равны нулю:

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) = 0, \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_k(z)$, получим:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = 0.$$

Сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть нулём в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – одинаковые константы с разным знаком. То есть $\exists \lambda_k$:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = -\frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = \lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{X}_k(r)$ и $\mathbf{Z}_k(z)$ получаем уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' - \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.42.5)$$

$$\mathbf{Z}''_k(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \quad (1.42.6)$$

Равенство (1.42.5) мы перепишем в виде:

$$-\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.42.7)$$

Это – почти в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.42.3).

Условие $|v(0, z)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.42.8)$$

а условие $v(R, z) = f(z)$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = f_k. \quad (1.42.9)$$

Поскольку неоднородность здесь задаётся функцией, зависящей от z , надо сначала решить задачу Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_k(z)$, чтобы затем разложить $f(z)$ в ряд по собственным функциям этой задачи. Поэтому

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_k(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ мы получили уравнение (1.42.6) $\mathbf{Z}''_k(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий $v_z(r, 0) = 0$, $v(r, l) = 0$, $0 \leq r < R$, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}''_k(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0, \\ \mathbf{Z}'_k(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(l) = 0. \end{cases} \quad (1.42.10)$$

Эту задачу мы уже много раз решали. Воспользуемся результатом: собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.42.10) имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l} \right)^2, \quad \mathbf{Z}_n(z) = \cos \left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l} \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.42.11)$$

Шаг 3. Разложение функции $f(z)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

Функция $f(z)$ разлагается в ряд Фурье по косинусам следующим стандартным образом:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos \left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l} \right), \quad (1.42.12)$$

$$f_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(z) \cos \left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l} \right) dz, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.42.13)$$

Шаг 4. Решение задачи для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили уравнение $-(r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r)$. Воспользуемся крайними условиями (1.42.8) – (1.42.9) и получим задачу

$$\begin{cases} -(r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = f_k. \end{cases} \quad (1.42.14)$$

По теореме 1.1.1, стр. 2

Общее решение уравнения Бесселя (1.1.1)

$$x^2 \mathbf{Y}''(x) + x \mathbf{Y}'(x) + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Y}(x) = 0 \quad (1.1.1)$$

задаётся формулой

$$\mathbf{Y}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x), \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Наше уравнение $(r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k r \mathbf{X}_k(r)$ обычной уже заменой

$$x = \sqrt{-\lambda_k} r \equiv i\mu_k r, \quad \mu_k = \frac{\pi(2k-1)}{2l}$$

сводится к уравнению

$$x^2 \mathbf{Y}''(x) + x \mathbf{Y}'(x) + x^2 \mathbf{Y}(x) = 0,$$

которое совпадает с (1.1.1) при $\nu = 0$. Поэтому его общее решение задаётся формулой

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda_k} r) + c_2 N_0(\sqrt{\lambda_k} r) = J_0(i\mu_k r) + c_2 N_0(i\mu_k r). \quad (1.42.15)$$

Из краевого условия $|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty$ получаем, что $c_2 = 0$ и

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 J_0(i\mu_k r) = \left[\text{по определению 1.1.2} \right] = c_1 I_0(\mu_k r).$$

Наконец, из краевого условия $\mathbf{X}_k(R) = f_k$ получаем, что $c_1 = \frac{f_k}{I_0(\mu_k R)}$ и

Поэтому

$$\mathbf{X}_k(r) = \frac{f_k}{I_0(\mu_k R)} I_0(\mu_k r), \quad \mu_k = \frac{\pi(2k-1)}{2l}. \quad (1.42.16)$$

Ответ в общем виде:

$$v(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{I_0(\mu_k R)} I_0(\mu_k r) \cos(\mu_k z),$$

где $\mu_k = \frac{\pi(2k-1)}{2l}$, $k \in \mathbb{N}$, а f_k задаются формулой (1.42.13).

Посчитаем коэффициенты Фурье для функции $f(z) = -\frac{q}{\pi} \cdot (l-z)$. Для этого нам понадобятся интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^l z \cos \left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l} \right) dz &= \frac{2l}{\pi(2k-1)} \left(z \sin \left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l} \right) \Big|_{z=0}^{z=l} - \int_0^l \sin \left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l} \right) dz \right) = \\ &= \frac{2l}{\pi(2k-1)} \left(l(-1)^{k+1} + \frac{2l}{\pi(2k-1)} \cos \left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l} \right) \Big|_{z=0}^{z=l} \right) = \\ &= \frac{2l}{\pi(2k-1)} \left(l(-1)^{k+1} - \frac{2l}{\pi(2k-1)} \right) = \frac{2l^2(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} - \left(\frac{2l}{\pi(2k-1)} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\int_0^l \cos\left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l}\right) dz = \frac{2l}{\pi(2k-1)} \sin\left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l}\right) \Big|_{z=0}^{z=l} = \frac{2l(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(z) \cos\left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l}\right) dz = -\frac{2q}{l\kappa} \cdot \int_0^l (l-z) \cos\left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l}\right) dz = \\ &= -\frac{2q}{l\kappa} \cdot \left(l \int_0^l \cos\left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l}\right) dz - \int_0^l z \cos\left(\frac{\pi(2k-1)z}{2l}\right) dz \right) = \\ &= -\frac{2q}{l\kappa} \cdot \left(\frac{2l^2(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} - \frac{2l^2(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} + \left(\frac{2l}{\pi(2k-1)}\right)^2 \right) = -\frac{8ql}{\kappa\pi^2(2k-1)^2} \end{aligned}$$

Теперь мы уже всё знаем про функцию

$$v(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{I_0(\mu_k R)} I_0(\mu_k r) \cos(\mu_k z),$$

поэтому, с учётом равенства $v(r, z) = u(r, z) - w(z) = u(r, z) - T - \frac{q}{\kappa} \cdot (l - z)$ можем записать

Ответ:

$$u(r, z) = T + \frac{q}{\kappa} \cdot (l - z) - \frac{8ql}{\kappa\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 I_0\left(\frac{\pi(2m-1)R}{2l}\right)} I_0\left(\frac{\pi(2m-1)r}{2l}\right) \cos\left(\frac{\pi(2m-1)z}{2l}\right).$$

1.43. № 786 д)

Найти стационарное распределение температуры в однородном цилиндре $0 \leq r < R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq z \leq l$ для случая, когда в цилиндре имеются источники тепла объёмной плотностью Q , а температура поверхности равна нулю.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} = f(r, z) \equiv -\frac{Q}{\kappa}, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0, z)| < \infty, \quad u(R, z) = 0 & 0 < z < l; \\ u(r, 0) = u(r, l) = 0, & 0 \leq r < R. \end{cases} \quad (1.43.1)$$

где κ – коэффициент теплопроводности.

Шаг 0. Избавление от неоднородности уравнения и вид решения

В данном примере неоднородно уравнение. Его можно свести к однородному, подобрав подходящим образом функцию $w(r)$ так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \Delta w(r) \equiv \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r + \overset{=0}{w_{zz}} = -\frac{Q}{\kappa}, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |w(0)| < \infty, \quad w(R) = 0 & 0 < z < l. \end{cases} \quad (1.43.2)$$

Очевидно, легко найти квадратичную функцию, удовлетворяющую (1.43.2):

$$w(r) = Ar^2 + B, \quad \implies \begin{cases} \Delta w \equiv w'' + \frac{1}{r}w'(r) \equiv 2A + 2A = 4A, & 0 \leq r < R; \\ |w(0)| = |B| < \infty, \quad w(R) = AR^2 + B. \end{cases}$$

откуда получаем

$$A = -\frac{Q}{4\kappa}, \quad B = \frac{QR^2}{4\kappa}.$$

Наконец,

$$w(r) = \frac{Q}{4\kappa} (R^2 - r^2).$$

Тогда для функции

$$v(r, z) = u(r, z) - w(z) = u(r, z) - \frac{Q}{4\kappa} (R^2 - r^2)$$

получаем задачу:

$$\begin{cases} \Delta v \equiv \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < z < l; \\ |v(0, z)| < \infty, & 0 < z < l; \\ v(R, z) = 0 & 0 < z < l; \\ v(r, 0) = v(r, l) = -w(r) = -\frac{Q}{4\kappa} (R^2 - r^2) \equiv \psi(r), & 0 \leq r < R, \end{cases} \quad (1.43.3)$$

Как легко заметить, при этом испортились краевые условия, но не все. Условие $u(R, z) = 0$ превратилось в $v(R, z) = 0$, и это позволит нам ниже поставить корректную задачу Штурма–Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$.

Шаг 1. Предварительные рассуждения

Если искать решение задачи (1.43.3) в виде

$$u(r, z) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z), \quad (1.43.4)$$

то, подставив (1.43.4) в уравнение $\frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + v_{zz} = 0$, получим:

$$\sum_{k=\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) \right) = 0.$$

Это равенство заведомо верно, если все члены ряда в левой части равны нулю:

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}''_k(z) = 0, \quad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $\mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z)$, получим:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = 0.$$

Сумма дробей, одна из которых зависит только от r , а другая – только от z , может быть константой в том и только в том случае, если каждая из этих дробей константы. То есть $\exists \lambda_k$:

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = -\frac{\mathbf{Z}''_k(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{X}_k(r)$ и $\mathbf{Z}_k(z)$ получаем уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \quad (1.43.5)$$

$$\mathbf{Z}''_k(z) - \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \quad (1.43.6)$$

Равенство (1.43.5) мы перепишем в виде:

$$-\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k \mathbf{X}_k(r). \quad (1.43.7)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (1.1.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (1.43.3).

Условие $|u(0, z)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \quad (1.43.8)$$

а условие $u(R, z) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \quad (1.43.9)$$

Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (1.1.17) с $\lambda = \lambda_k$, $\nu = 0$, $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} -(r\mathbf{X}'_k(r))' = \lambda_k r \mathbf{X}_k(r), \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \quad (1.43.10)$$

Воспользуемся результатом теоремы 1.1.3, стр. 4.

Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const}$.

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (1.43.10) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 1.1.4, стр. 4:

Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1.43.10) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2, & \mathbf{X}_k(r) = J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), & k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k \text{ – корни уравнения} & J_0(\mu) = 0. \end{cases} \quad (1.43.11)$$

Шаг 3. Решение задачи для $\mathbf{Z}_k(z)$

Для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ мы получили уравнение (1.43.6) $\mathbf{Z}''_k(z) - \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0$. Вспомним, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R} \right]^2$, и добавим к нему краевые условия, следующие из условий

$$v(r, 0) = v(r, l) = -\frac{Q}{4\pi} (R^2 - r^2) \equiv \psi(r),$$

чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_k''(z) - \frac{\mu_k^2}{R^2} \mathbf{Z}_k(z) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(0) = \psi_k, \\ \mathbf{Z}_k(l) = \psi_k. \end{cases} \quad (1.43.12)$$

Общее решение уравнения $\mathbf{Z}_k''(z) - \frac{\mu_k^2}{R^2} \mathbf{Z}_k(z) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{Z}_k(z) = c_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right) + c_2 \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right).$$

Из краевого условия $\mathbf{Z}_k(0) = \psi_k$ следует, что $c_2 = \psi_k$, откуда

$$\mathbf{Z}_k(z) = c_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right) + \psi_k \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right).$$

Тогда из краевого условия $\mathbf{Z}_k(l) = \psi_k$ получаем

$$\mathbf{Z}_k(l) = c_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right) + \psi_k \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right) = \psi_k, \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{\psi_k (1 - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right))}{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right)}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{Z}_k(z) = \frac{\psi_k}{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right)} \left(1 - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right) \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.43.13)$$

Шаг 4. Разложение функции $\psi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

В соответствии с теоремой 1.1.5, стр. 4, функция $\psi(r) \equiv T$ разлагается в ряд Фурье

$$\psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad (1.43.14)$$

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2} \left[J_0'(\mu_k) \right]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2} \right) \underbrace{J_0^2(\mu_k)}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \end{aligned}$$

Ответ в общем виде:

$$v(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right)} \left(1 - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k l}{R} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z}{R} \right) \right) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right),$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а ψ_k задаются формулами:

$$\psi_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr. \quad (1.43.15)$$

Поскольку в нашем случае $\psi(r, z) \equiv -\frac{Q}{4\pi}(R^2 - r^2)$, то для вычисления ψ_k нам понадобятся интегралы $\int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$ и $\int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$:

$$\begin{aligned} \int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int_0^{\mu_k} x^3 J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1\right] = \\ &= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int_0^{\mu_k} x^2 \cdot [x J_1(x)]' dx = \left[\text{по частям}\right] = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(x^3 J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} - 2 \int_0^{\mu_k} x^2 J_1(x) dx \right) = \\ &= \left[\text{в силу (1.1.9) при } \nu = 2\right] = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 \int_0^{\mu_k} [x^2 J_2(x)]' dx \right) = \\ &= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left(\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 x^2 J_2(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot (\mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 \mu_k^2 J_2(\mu_k)) = \\ &= \left[\text{в силу (1.1.10) при } \nu = 1, \quad J_2(\mu_k) - \frac{2}{\mu_k} J_1(\mu_k) + \underbrace{J_0(\mu_k)}_{=0} = 0\right] = \frac{R^4 (\mu_k^2 - 4)}{\mu_k^3} J_1(\mu_k). \end{aligned} \quad (1.43.16)$$

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr &= \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} x J_0(x) dx = \left[\text{в силу (1.1.9), стр. 2, при } \nu = 1\right] = \\ &= \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int_0^{\mu_k} [x J_1(x)]' dx = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \left(x J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k). \end{aligned} \quad (1.43.17)$$

Таким образом, для ψ_k мы получаем

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r \psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2Q}{4\pi R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \left(\int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr - R^2 \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \right) = \\ &= \left[\text{в силу (1.43.16) и (1.43.17)}\right] = \frac{2Q}{4\pi R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \left(\frac{R^4 (\mu_k^2 - 4)}{\mu_k^3} J_1(\mu_k) - R^2 \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k) \right) = \\ &= \frac{2Q}{4\pi R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \frac{-4R^4 J_1(\mu_k)}{\mu_k^3} = -\frac{2QR^2}{\pi \mu_k^3 J_1(\mu_k)} \end{aligned}$$

Итак, мы готовы выписать функцию

$$\begin{aligned} v(r, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{\text{sh}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right)} \left(1 - \text{ch}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right) + \text{sh}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right) \text{ch}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right) \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) = \\ &= -\frac{2QR^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k) \text{sh}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right)} \left(1 - \text{ch}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right) + \text{sh}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right) \text{ch}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right) \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \end{aligned}$$

Поэтому, в силу $u(r, z) = v(r, z) + w(z) = u(r, z) + \frac{Q}{4\pi}(R^2 - r^2)$, получаем

Ответ:

$$u(r, z) = \frac{Q}{4\pi}(R^2 - r^2) - \frac{2QR^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{\mu_k^3 J_1(\mu_k) \text{sh}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right)} \left(1 - \text{ch}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right) + \text{sh}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right) \text{ch}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right) \right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Глава 2.

Сферические функции

2.1. Краткое введение

2.1.1. Полиномы Лежандра

Опр. 2.1.1. Уравнение Лежандра:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy(x)}{dx} \right] + \lambda y(x) = 0, \quad x \in (-1, 1). \quad (2.1.1)$$

Теорема 2.1.1.

Усл. Ограниченная функция $y(x) \not\equiv 0$ есть решение уравнения (2.1.1).

Утв. 1) $\lambda = n(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$;
2) функция $y(x)$ является полиномом степени n , называемым **полиномом Лежандра**, и может быть найдена по **формуле Родрига**:

$$y(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (2.1.2)$$

Теорема 2.1.2 (Рекуррентные формулы).

Утв. Имеют место следующие соотношения

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1; \quad (2.1.3)$$

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x), \quad n \geq 1; \quad (2.1.4)$$

$$P'_n(x) = xP'_{n-1}(x) + nP'_{n-1}(x), \quad n \geq 1; \quad (2.1.5)$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), \quad n \geq 1; \quad (2.1.6)$$

$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - xnP_n(x), \quad n \geq 1. \quad (2.1.7)$$

Кроме приведённых формул, также весьма полезны следующие соотношения:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad n \geq 1; \quad (2.1.8)$$

$$P_{2m+1}(0) = 0, \quad P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m \geq 0. \quad (2.1.9)$$

Выпишем первые несколько полиномов Лежандра:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}; \quad (2.1.10)$$

$$P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}, \quad P_5(x) = \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}; \quad (2.1.11)$$

$$P_6(x) = \frac{231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5}{16}, \dots \quad (2.1.12)$$

Теорема 2.1.3 (Ортогональность и норма полиномов Лежандра).

Утв. $(P_k(x), P_n(x)) \equiv \int_{-1}^1 P_k(t)P_n(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq n; \\ \frac{2}{2k+1}, & \text{при } k = n. \end{cases} \quad (2.1.13)$

Теорема 2.1.4 (Разложение в ряд по полиномам Лежандра от косинусов).

Усл. $f(\theta) \in C^2[0, \pi]$.

Утв. $f(\theta)$ разлагается в следующий ряд Фурье

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(\cos \theta), \quad f_k = \frac{2k+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (2.1.14)$$

При этом ряд (2.1.14) сходится к $f(\theta)$ **равномерно** на всём сегменте $[0, \pi]$.

2.1.2. Присоединённые функции Лежандра

Здесь мы будем рассматривать следующее уравнение:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy(x)}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y(x) = 0, \quad x \in (-1, 1). \quad (2.1.15)$$

Теорема 2.1.5.

Усл. Ограниченная функция $y(x) \not\equiv 0$ есть решение уравнения (2.1.15).

Утв. 1) $\lambda = n(n+1)$, где $n = \overline{0, \infty}$;
2) функция $y(x)$, называемая **присоединённой функцией Лежандра порядка k** , может быть найдена по формуле:

$$y(x) = P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad m = \overline{0, n}; \quad (2.1.16)$$

3) при этом $P_n^{(0)}(x) \equiv P_n(x)$ – полиномы Лежандра, а $P_n^m(x) \equiv 0$ при всех $m > n$.

Опр. 2.1.2. Функции

$$P_n^m(\cos \theta) \cos k\varphi, \quad P_n^m(\cos \theta) \sin k\varphi, \quad m = \overline{0, n}, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (2.1.17)$$

называются **сферическими гармониками**.

Теорема 2.1.6 (Ортогональность и норма присоединённых функций Лежандра).

Утв. $(P_k^m(x), P_n^m(x)) \equiv \int_{-1}^1 P_k^m(t) P_n^m(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq n; \\ \frac{2}{2k+1} \cdot \frac{(k+m)!}{(k-m)!}, & \text{при } k = n. \end{cases} \quad (2.1.18)$

Теорема 2.1.7 (Разложение в ряд по сферическим гармоникам).

Усл. $g(\theta, \varphi) \in C^2$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $g(\theta, \varphi + 2\pi) = g(\theta, \varphi)$.

Утв. $g(\theta, \varphi)$ разлагается в следующий ряд Фурье

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k P_k^m(\cos \theta) (\alpha_{km} \cos(m\varphi) + \beta_{km} \sin(m\varphi)) \right], \quad (2.1.19)$$

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \int_0^\pi g(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.1.20)$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \int_0^\pi g(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.1.21)$$

При этом ряд (2.6.16) сходится к $g(\theta, \varphi)$ абсолютно и равномерно на $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

2.2. Уравнение Лапласа в шаре. Простейший случай

Рассмотрим в сферических координатах

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ x = r \cos \theta. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Поскольку в сферических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi},$$

то уравнение Лапласа принимает вид:

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0. \quad (2.2.2)$$

Будем искать решение (2.2.2) методом разделения переменных.

Шаг 1. Поиск сферических гармоник

Пусть функция

$$U(r, \theta, \varphi) = \mathbf{X}(r) \mathbf{Y}(\theta, \varphi)$$

есть решение уравнения (2.2.2). Тогда

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \mathbf{X}'(r))' \mathbf{Y}(\theta, \varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}_\theta(\theta, \varphi))_\theta \mathbf{X}(r) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \mathbf{Y}_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi) \mathbf{X}(r) = 0.$$

Поделим это равенство на $\mathbf{X}(r) \mathbf{Y}(\theta, \varphi)$ и умножим на r^2 :

$$\frac{(r^2 \mathbf{X}'(r))'}{\mathbf{X}(r)} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}_\theta(\theta, \varphi))_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathbf{Y}_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi)}{\mathbf{Y}(\theta, \varphi)}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от r , а справа – функция, зависящая только от θ и φ , то равны они друг другу могут быть только в случае, когда они – константы. Точнее, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(r^2 \mathbf{X}'(r))'}{\mathbf{X}(r)} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}_\theta(\theta, \varphi))_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathbf{Y}_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi)}{\mathbf{Y}(\theta, \varphi)} = \lambda.$$

Отсюда для $\mathbf{X}(r)$ получаем уравнение

$$r^2 \mathbf{X}''(r) + 2r \mathbf{X}'(r) - \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \quad (2.2.3)$$

а для функций $\mathbf{Y}$ – уравнение

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}_\theta(\theta, \varphi))_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathbf{Y}_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi) + \lambda \mathbf{Y}(\theta, \varphi) = 0. \quad (2.2.4)$$

Если решение уравнения (2.2.4) искать в виде

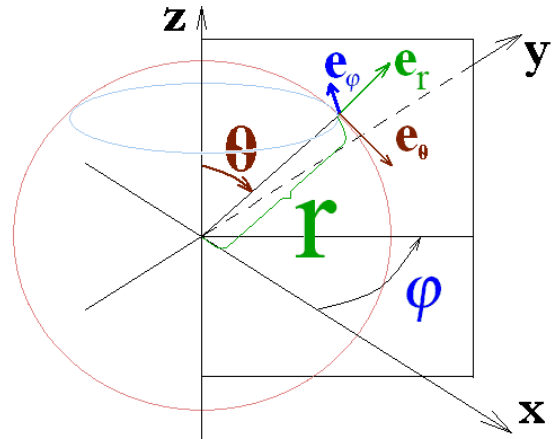
$$\mathbf{Y}(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi), \quad (2.2.5)$$

то получим

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \Theta'(\theta))' \Phi(\varphi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \Theta(\theta) \Phi''(\varphi) + \lambda \Theta(\theta) \Phi(\varphi) = 0.$$

Поделим это равенство на $\frac{\Theta(\theta) \Phi(\varphi)}{\sin^2 \theta}$.

$$\frac{\sin \theta (\sin \theta \Theta'(\theta))'}{\Theta(\theta)} + \lambda \sin^2 \theta = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$



2.2. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В ШАРЕ. ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ

Слева стоит функция, зависящая только от θ , а справа – только от φ , поэтому $\exists \mu \in \mathbb{R}$:

$$\sin \theta (\sin \theta \Theta'(\theta))' + (\lambda \sin^2 \theta - \mu) \Theta(\theta) = 0, \quad (2.2.6)$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) = 0 \quad (2.2.7)$$

Уравнение (2.2.7) необходимо дополнить условием периодичности, поскольку функция $U(r, \theta, \varphi)$, а следовательно и функция Φ должна быть непрерывной. Тогда для $\Phi(\varphi)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Решим эту задачу. Общим решением уравнения $\Phi''(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) = 0$ является функция

$$\begin{cases} \Phi(\varphi) = c_1 \operatorname{sh}(\beta\varphi) + c_2 \operatorname{ch}(\beta\varphi) & \text{при } \mu = -\beta^2 < 0; \\ \Phi(\varphi) = c_1 + c_2\varphi & \text{при } \mu = 0; \\ \Phi(\varphi) = c_1 \sin(\beta\varphi) + c_2 \cos(\beta\varphi) & \text{при } \mu = \beta^2 > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функции $c_1 \operatorname{sh}(\beta\varphi) + c_2 \operatorname{ch}(\beta\varphi)$ и $c_1 + c_2\varphi$ ни при каких $c_{1,2}$ (кроме $c_1 = c_2 = 0$) не удовлетворяют условию периодичности $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$.

В то же время функция $c_1 \sin(\beta\varphi) + c_2 \cos(\beta\varphi)$ удовлетворяет этому условию тогда и только тогда, когда

$$\mu = \beta^2 = m^2, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Итак, функция (2.2.5) есть решение (2.2.4), то есть является сферической функцией тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\varphi) = c_1 \sin(m\varphi) + c_2 \cos(m\varphi), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2.9)$$

а функция $\Theta(\theta)$ есть решение уравнения

$$\sin \theta (\sin \theta \Theta'(\theta))' + (\lambda \sin^2 \theta - m^2) \Theta(\theta) = 0. \quad (2.2.10)$$

В уравнении (2.2.10) сделаем замену переменной $x = \cos \theta$. Тогда для функции

$$P(x) = P(\cos \theta) \equiv \Theta(\theta)$$

получаем

$$\Theta'(\theta) = -\sin \theta P'(\cos \theta), \quad \Theta''(\theta) = \sin^2 \theta P''(\cos \theta) - \cos \theta P'(\cos \theta),$$

и уравнение (2.2.10) примет вид:

$$\sin^4 \theta P''(x) - \sin^2 \theta \cos \theta P'(x) - \sin^2 \theta \cos \theta P'(x) + (\lambda \sin^2 \theta - m^2) P(x) = 0.$$

Перепишем его, поделив сначала на $\sin^2 \theta$, и учтём, что

$$\cos \theta = x, \quad \sin^2 \theta = 1 - x^2 :$$

$$(1 - x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P(x) = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с (2.1.15), стр. 184. Поэтому по теореме 2.1.5, стр. 185, все ограниченные решения этой задачи описываются формулами

$$\lambda = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.2.11)$$

$$P(x) = P_n^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad m = \overline{0, n}. \quad (2.2.12)$$

Поэтому все нетривиальные решения уравнения (2.2.10) имеют вид

$$\Theta_{mn}(\theta) = P_n^m(\cos \theta), \quad n = \overline{0, \infty}, \quad m = \overline{0, n}. \quad (2.2.13)$$

Наконец, с учётом (2.2.9), получаем, что

функция

$$U(r, \theta, \varphi) = \mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta, \varphi)$$

есть решение уравнения Лапласа тогда и только тогда, когда функция $\mathbf{X}(r)$ есть решение уравнения

$$r^2 \mathbf{X}''(r) + 2r \mathbf{X}'(r) - \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \quad (2.2.3)$$

при $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0, \infty}$, а функция $\mathbf{Y}(\theta, \varphi)$ имеет вид

$$\mathbf{Y}(\theta, \varphi) = \mathbf{Y}_{mn}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) (c_1 \sin(m\varphi) + c_2 \cos(m\varphi)), \quad n = \overline{0, \infty}, \quad m = \overline{0, n}. \quad (2.2.14)$$

Шаг 2. Решение уравнения (2.2.3)

Данное уравнение есть уравнение Эйлера, поскольку степень множителей r при всех производных функции $\mathbf{X}(r)$ равна порядку этих производных. Эти уравнения решаются при помощи замены

$$r = e^t, \quad \mathbf{X}(r) = \mathbf{X}(e^t) = y(t), \quad r \mathbf{X}'(r) = y'(t), \quad r^2 \mathbf{X}''(r) = y''(t) - y'(t).$$

Нам не надо рассматривать случай $r = -e^t < 0$, поскольку в нашей задаче $r \in (0, R)$. Для новой функции $y(t)$ при $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0, \infty}$ получаем уравнение

$$y''(t) + y'(t) - n(n+1)y(t) = 0, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Характеристическое уравнение для него имеет вид

$$\kappa^2 + \kappa - n(n+1) = 0.$$

Его корни:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 + (2n+1)}{2} = n, \\ \kappa_2 &= \frac{-1 - \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 - (2n+1)}{2} = -n-1 \end{aligned}$$

и общее решение

$$y(t) = Ae^{nt} + Be^{-(n+1)t}.$$

Отсюда, так как $e^t = r$, общее решение уравнения (2.2.3) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}.$$

Ну а поскольку нас интересуют только ограниченные решения, то когда уравнение решается

- в шаре, содержащем начало координат, $B = 0$ и

$$\mathbf{X}_n(r) = r^n, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (2.2.15)$$

- во внешности шара, содержащего начало координат, $A = 0$ и

$$\mathbf{X}_n(r) = \frac{1}{r^{n+1}}, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (2.2.16)$$

Шаг 3. Общее решение уравнения Лапласа в шаре

Нам осталось составить из полученных функций X_n (из равенства (2.2.15)), а также $Y_{mn}(\theta, \varphi)$, $n = \overline{0, \infty}$, $m = \overline{0, n}$ ряд. Поскольку m меняется в пределах от 0 до n при каждом n , и только n меняется от 0 до ∞ , то ряд можно составить только по n . Зато внутри ряда по n придётся ставить конечную сумму по m , формируя линейную комбинацию всех сферических гармоник степени n :

Ответ:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} X_n(r) \sum_{m=0}^n Y_{mn}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Шаг 4. Общее решение уравнения Лапласа вне шара

Составим из полученных функций X_n (из равенства (2.2.16)), а также $Y_{mn}(\theta, \varphi)$, $n = \overline{0, \infty}$, $m = \overline{0, n}$ ряд. Здесь вся разница от задачи внутри шара состоит в том, что функции $X_n(r)$ имеют вид (2.2.16), а не (2.2.15):

Ответ:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} X_n(r) \sum_{m=0}^n Y_{mn}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)). \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

2.3. № 788 а)

Определить стационарное распределение температуры $u(r, \theta)$ в однородном шаре радиуса R для случая, когда поверхность шара имеет температуру:

$$u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T_1, & 0 \leq \theta < \alpha; \\ T_2, & \alpha < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T_1, & 0 \leq \theta < \alpha; \\ T_2, & \alpha < \theta \leq \pi. \end{cases} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Повторим с необходимыми упрощениями, вызванными тем, что в нашем случае искомое решение не зависит от φ , шаги 1 – 3 раздела 2.2.

Шаг 1. Поиск сферических гармоник, не зависящих от φ

Пусть функция

$$U(r, \theta) = X(r)Y(\theta)$$

есть решение уравнения

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta = 0. \quad (2.3.2)$$

Тогда

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \mathbf{X}'(r))' \mathbf{Y}(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}'(\theta))' \mathbf{X}(r) = 0.$$

Поделим это равенство на $\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$ и умножим на r^2 :

$$\frac{(r^2 \mathbf{X}'(r))'}{\mathbf{X}(r)} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}'(\theta))'}{\mathbf{Y}(\theta)}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от r , а справа – функция, зависящая только от θ , то равны они друг другу могут быть только в случае, когда они – константы. Точнее, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(r^2 \mathbf{X}'(r))'}{\mathbf{X}(r)} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}'(\theta))'}{\mathbf{Y}(\theta)} = \lambda.$$

Отсюда для $\mathbf{X}(r)$ получаем уравнение

$$r^2 \mathbf{X}''(r) + 2r \mathbf{X}'(r) - \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \quad (2.3.3)$$

а для функций $\mathbf{Y}$ – уравнение

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}'(\theta))' + \lambda \mathbf{Y}(\theta) = 0.$$

Домножим на $\sin^2 \theta$:

$$\sin^2 \theta \mathbf{Y}''(\theta) + \sin \theta \cos \theta \mathbf{Y}'(\theta) + \lambda \sin^2 \theta \mathbf{Y}(\theta) = 0. \quad (2.3.4)$$

В уравнении (2.3.4) сделаем замену переменной $x = \cos \theta$. Тогда для функции

$$P(x) = P(\cos \theta) \equiv \mathbf{Y}(\theta)$$

получаем

$$\mathbf{Y}'(\theta) = -\sin \theta P'(\cos \theta), \quad \mathbf{Y}''(\theta) = \sin^2 \theta P''(\cos \theta) - \cos \theta P'(\cos \theta),$$

и уравнение (2.3.4) примет вид:

$$\sin^4 \theta P''(x) - \sin^2 \theta \cos \theta P'(x) - \sin^2 \theta \cos \theta P'(x) + \lambda \sin^2 \theta P(x) = 0.$$

Перепишем его, поделив сначала на $\sin^2 \theta$, и учтём, что

$$\cos \theta = x, \quad \sin^2 \theta = 1 - x^2 :$$

$$(1 - x^2) P''(x) - 2x P'(x) + \lambda P(x) = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с (2.1.1), стр. 183. Поэтому по теореме 2.1.1, стр. 183, все ограниченные решения этой задачи описываются формулами

$$\lambda = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.3.5)$$

$$P(x) = P_n(x) \text{ — полиномы Лежандра.} \quad (2.3.6)$$

Поэтому все нетривиальные ограниченные решения уравнения (2.3.4) имеют вид

$$\mathbf{Y}_n(\theta) = P_n(\cos \theta), \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.3.7)$$

Итак, с учётом (2.3.3), получаем, что

функция

$$U(r, \theta) = \mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$$

есть независящее от φ ограниченное нетривиальное решение уравнения Лапласа (2.3.2) тогда и только тогда, когда функция $\mathbf{X}(r)$ есть решение уравнения

$$r^2 \mathbf{X}''(r) + 2r \mathbf{X}'(r) - \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \quad (2.3.3)$$

при $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0, \infty}$, а функция $\mathbf{Y}(\theta)$ имеет вид

$$\mathbf{Y}(\theta) = \mathbf{Y}_n(\theta) = P_n(\cos \theta), \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.3.8)$$

Шаг 2. Решение уравнения (2.3.3)

Данное уравнение есть уравнение Эйлера, поскольку степень множителей r при всех производных функции $\mathbf{X}(r)$ равна порядку этих производных. Эти уравнения решаются при помощи замены

$$r = e^t, \quad \mathbf{X}(r) = \mathbf{X}(e^t) = y(t), \quad r \mathbf{X}'(r) = y'(t), \quad r^2 \mathbf{X}''(r) = y''(t) - y'(t).$$

Нам не надо рассматривать случай $r = -e^t < 0$, поскольку в нашей задаче $r \in (0, R)$. Для новой функции $y(t)$ при $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0, \infty}$ получаем уравнение

$$y''(t) + y'(t) - n(n+1)y(t) = 0, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Характеристическое уравнение для него имеет вид

$$\varkappa^2 + \varkappa - n(n+1) = 0.$$

Его корни:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 + (2n+1)}{2} = n, \\ \varkappa_2 &= \frac{-1 - \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 - (2n+1)}{2} = -n-1 \end{aligned}$$

и общее решение

$$y(t) = Ae^{nt} + Be^{-(n+1)t}.$$

Отсюда, так как $e^t = r$, общее решение уравнения (2.3.3) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}.$$

Ну а поскольку нас интересуют только ограниченные решения, то $B = 0$ и

$$\mathbf{X}_n(r) = r^n, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.3.9)$$

Составив из полученных функций ряд, получим что независящее от φ ограниченное нетривиальное решение уравнения Лапласа (2.3.2) имеет вид:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r) \mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), \quad A_n \in \mathbb{R}. \quad (2.3.10)$$

Шаг 3. Использование краевого условия

Для нахождения коэффициентов A_n используем краевое условие

$$u(R, \theta) = f(\theta).$$

По теореме 2.1.7, стр. 185,

$f(\theta, \varphi)$ разлагается в следующий ряд Фурье

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k P_k^m(\cos \theta) (\alpha_{km} \cos(m\varphi) + \beta_{km} \sin(m\varphi)) \right], \quad (2.3.11)$$

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.3.12)$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.3.13)$$

При этом ряд (2.6.16) сходится к $f(\theta, \varphi)$ абсолютно и равномерно на $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Поскольку в нашем случае функция $f(\theta)$ не зависит от φ , то

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \cdot \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi}^{=0} = 0, \quad m \neq 0,$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) d\varphi}_{=0} = 0.$$

Найдём α_{k0} :

$$\alpha_{k0} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{k!}{k!} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta \cdot \overbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}^{=2\pi} = (2k+1) \int_0^{\pi} f(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Приравнивая ряды

$$u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos \theta) = f(\theta),$$

видим, что они равны, если

$$A_n = \frac{\alpha_{n0}}{2R^n} = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Ответ в общем виде:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r) \mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (2.3.14)$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (2.3.15)$$

Нам осталось вычислить A_n в данном конкретном случае, когда

$$f(\theta) = \begin{cases} T_1, & 0 \leq \theta < \alpha; \\ T_2, & \alpha < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha T_1 P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \left[x = \cos \theta \right] = -T_1 \int_1^{\cos \alpha} P_n(x) dx = \\ &= \left[\text{по рекуррентной формуле (2.1.6)} \quad (2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \quad n \geq 1 \right] = \\ &= \frac{T_1}{2n+1} \int_{\cos \alpha}^1 (P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)) dx = \frac{T_1}{2n+1} (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) \Big|_{x=\cos \alpha}^{x=1} = \\ &= \left[\text{по формуле (2.1.8)} \quad P_n(1) = 1 \right] = \frac{T_1}{2n+1} (P_{n-1}(\cos \alpha) - P_{n+1}(\cos \alpha)), \quad n \geq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\pi T_2 P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \left[\text{аналогично} \right] = \frac{T_2}{2n+1} (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) \Big|_{x=-1}^{x=\cos \alpha} = \\ &= \left[\text{по формуле (2.1.8)} \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad n \geq 1 \right] = \frac{T_2}{2n+1} (P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)), \quad n \geq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha T_1 P_0(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \left[P_0(x) \equiv 1 \right] = T_1 \int_0^\alpha \sin \theta d\theta = -T_1 \cos \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\alpha} = T_1 (1 - \cos \alpha), \quad n = 0; \\ \int_\alpha^\pi T_2 P_0(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \left[P_0(x) \equiv 1 \right] = T_2 \int_\alpha^\pi \sin \theta d\theta = -T_2 \cos \theta \Big|_{\theta=\alpha}^{\theta=\pi} = T_2 (1 + \cos \alpha), \quad n = 0, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \begin{cases} \frac{2n+1}{2R^n} \cdot \frac{T_2-T_1}{2n+1} (P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)), & \text{при } n \geq 1; \\ \frac{1}{2} \cdot (T_1 + T_2 + (T_2 - T_1) \cos(\alpha)), & \text{при } n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(r, \theta) = \frac{T_1 + T_2 + (T_2 - T_1) \cos(\alpha)}{2} + \frac{T_2 - T_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)) \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \theta),$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.4. № 788 б)

Определить стационарное распределение температуры $u(r, \theta)$ в однородном шаре радиуса R для случая, когда шар нагревается плоскопараллельным потоком тепла плотности q , падающим на его поверхность сверху, и отдаёт тепло со всей своей поверхности в окружающую среду в результате конвективного теплообмена. Температура среды равна T .

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u_r(R, \theta) + hu(R, \theta) = f_1(\theta) = \begin{cases} \frac{q}{k} \cos \theta + hT, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \\ hT, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Шаг 0. Вид решения и упрощение краевого условия

Легко убрать в краевом условии выражение hT , если искать решение задачи (2.4.1) в виде

$$u(r, \theta) = T + v(r, \theta). \quad (2.4.2)$$

Тогда $v(r, \theta)$ есть, очевидно, решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 v_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta v_\theta)_\theta = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |v(0, \theta)| < \infty, \\ v_r(R, \theta) + hv(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} \frac{q}{k} \cos \theta, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases} \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Повторим дословно шаги 1 – 2 номера № 788 а).

Шаг 1. Поиск сферических гармоник, не зависящих от φ

Пусть функция

$$U(r, \theta) = \mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$$

есть решение уравнения

$$\Delta v \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 v_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta v_\theta)_\theta = 0. \quad (2.4.4)$$

Тогда

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \mathbf{X}'(r))' \mathbf{Y}(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}'(\theta))' \mathbf{X}(r) = 0.$$

Поделим это равенство на $\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$ и умножим на r^2 :

$$\frac{(r^2 \mathbf{X}'(r))'}{\mathbf{X}(r)} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}'(\theta))_\theta}{\mathbf{Y}(\theta)}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от r , а справа – функция, зависящая только от θ , то равны они друг другу могут быть только в случае, когда они – константы. Точнее, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(r^2 \mathbf{X}'(r))'}{\mathbf{X}(r)} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}'(\theta))'}{\mathbf{Y}(\theta)} = \lambda.$$

Отсюда для $\mathbf{X}(r)$ получаем уравнение

$$r^2 \mathbf{X}''(r) + 2r \mathbf{X}'(r) - \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \quad (2.4.5)$$

а для функций $\mathbf{Y}$ – уравнение

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}'(\theta))' + \lambda \mathbf{Y}(\theta) = 0.$$

Домножим на $\sin^2 \theta$:

$$\sin^2 \theta \mathbf{Y}''(\theta) + \sin \theta \cos \theta \mathbf{Y}'(\theta) + \lambda \sin^2 \theta \mathbf{Y}(\theta) = 0. \quad (2.4.6)$$

В уравнении (2.4.6) сделаем замену переменной $x = \cos \theta$. Тогда для функции

$$P(x) = P(\cos \theta) \equiv \mathbf{Y}(\theta)$$

получаем

$$\mathbf{Y}'(\theta) = -\sin \theta P'(\cos \theta), \quad \mathbf{Y}''(\theta) = \sin^2 \theta P''(\cos \theta) - \cos \theta P'(\cos \theta),$$

и уравнение (2.4.6) примет вид:

$$\sin^4 \theta P''(x) - \sin^2 \theta \cos \theta P'(x) - \sin^2 \theta \cos \theta P'(x) + \lambda \sin^2 \theta P(x) = 0.$$

Перепишем его, поделив сначала на $\sin^2 \theta$, и учтём, что

$$\cos \theta = x, \quad \sin^2 \theta = 1 - x^2 :$$

$$(1 - x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x) = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с (2.1.1), стр. 183. Поэтому по теореме 2.1.1, стр. 183, все ограниченные решения этой задачи описываются формулами

$$\lambda = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots ; \quad (2.4.7)$$

$$P(x) = P_n(x) \text{ — полиномы Лежандра.} \quad (2.4.8)$$

Поэтому все нетривиальные ограниченные решения уравнения (2.4.6) имеют вид

$$\mathbf{Y}_n(\theta) = P_n(\cos \theta), \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.4.9)$$

Итак, с учётом (2.4.5), получаем, что

функция

$$U(r, \theta) = \mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$$

есть независящее от φ ограниченное нетривиальное решение уравнения Лапласа (2.4.4) тогда и только тогда, когда функция $\mathbf{X}(r)$ есть решение уравнения

$$r^2 \mathbf{X}''(r) + 2r \mathbf{X}'(r) - \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \quad (2.4.5)$$

при $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0, \infty}$, а функция $\mathbf{Y}(\theta)$ имеет вид

$$\mathbf{Y}(\theta) = \mathbf{Y}_n(\theta) = P_n(\cos \theta), \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.4.10)$$

Шаг 2. Решение уравнения (2.4.5)

Данное уравнение есть уравнение Эйлера, поскольку степень множителей r при всех производных функции $\mathbf{X}(r)$ равна порядку этих производных. Эти уравнения решаются при помощи замены

$$r = e^t, \quad \mathbf{X}(r) = \mathbf{X}(e^t) = y(t), \quad r \mathbf{X}'(r) = y'(t), \quad r^2 \mathbf{X}''(r) = y''(t) - y'(t).$$

Нам не надо рассматривать случай $r = -e^t < 0$, поскольку в нашей задаче $r \in (0, R)$. Для новой функции $y(t)$ при $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0, \infty}$ получаем уравнение

$$y''(t) + y'(t) - n(n+1)y(t) = 0, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Характеристическое уравнение для него имеет вид

$$\varkappa^2 + \varkappa - n(n+1) = 0.$$

Его корни:

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 + (2n + 1)}{2} = n, \\ \kappa_2 &= \frac{-1 - \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 - (2n + 1)}{2} = -n - 1\end{aligned}$$

и общее решение

$$y(t) = Ae^{nt} + Be^{-(n+1)t}.$$

Отсюда, так как $e^t = r$, общее решение уравнения (2.4.5) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}.$$

Ну а поскольку нас интересуют только ограниченные решения, то $B = 0$ и

$$\mathbf{X}_n(r) = r^n, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.4.11)$$

Составив из полученных функций ряд, получим что независящее от φ ограниченное нетривиальное решение уравнения Лапласа (2.4.4) имеет вид:

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r) \mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), \quad A_n \in \mathbb{R}. \quad (2.4.12)$$

Шаг 3. Использование краевого условия

Для нахождения коэффициентов A_n используем краевое условие

$$v_r(R, \theta) + hv(R, \theta) = f(\theta).$$

По теореме 2.1.7, стр. 185,

$f(\theta, \varphi)$ разлагается в следующий ряд Фурье

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k P_k^m(\cos \theta) (\alpha_{km} \cos(m\varphi) + \beta_{km} \sin(m\varphi)) \right], \quad (2.4.13)$$

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.4.14)$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.4.15)$$

При этом ряд (2.6.16) сходится к $f(\theta, \varphi)$ абсолютно и равномерно на $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Поскольку в нашем случае функция $f(\theta)$ не зависит от φ , то

$$\begin{aligned}\alpha_{km} &= \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \cdot \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi}^{=0} = 0, \quad m \neq 0, \\ \beta_{km} &= \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) d\varphi}_{=0} = 0.\end{aligned}$$

Найдём α_{k0} :

$$\alpha_{k0} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{k!}{k!} \int_0^\pi f(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta \cdot \overbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}^{=2\pi} = (2k+1) \int_0^\pi f(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Приравнявая ряды

$$v_r(R, \theta) + hv(R, \theta) = hA_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{R} + h \right) A_n R^n P_n(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos \theta) = f(\theta),$$

видим, что они равны, если

$$A_n = \frac{\alpha_{n0}}{2(n+hR)R^{n-1}} = \frac{2n+1}{2(n+hR)R^{n-1}} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Ответ в общем виде:

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r) \mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (2.4.16)$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2(n+hR)R^{n-1}} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (2.4.17)$$

Нам осталось вычислить A_n в данном конкретном случае, когда

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{q}{k} \cos \theta, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= [x = \cos \theta] = - \int P_n(x) dx = \\ &= \left[\text{по рекуррентной формуле (2.1.6)} \quad (2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \quad n \geq 1 \right] = \\ &= - \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1} + c, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

то при $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= [x = \cos \theta] = \int_0^1 x P_n(x) dx = [\text{по частям}] = \\ &= - \frac{x(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))}{2n+1} \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^1 (P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)) dx = \\ &= \left[\text{в силу равенства } P_n(1) = 1 \text{ и формулы (2.4.18) при } (n+1) \text{ и } (n-1) \right] = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{P_{n+2}(x) - P_n(x)}{2n+3} - \frac{P_n(x) - P_{n-2}(x)}{2n-1} \right) \Big|_{x=0}^{x=1}. \end{aligned}$$

В силу равенства $P_n(1) = 1$ и формул (2.1.9):

$$P_{2m+1}(0) = 0, \quad P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m \geq 0 \quad (2.1.9)$$

получаем при $n = 2m + 1$, $m \geq 0$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta P_{2m+1}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{4m+3} \left(\frac{P_{2m+3}(x) - P_{2m+1}(x)}{4m+5} - \frac{P_{2m+1}(x) - P_{2m-1}(x)}{4m+1} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0,$$

а при $n = 2m$, так как

$$P_{2m+2}(0) = -\frac{(2m+1)(2m+2)}{4(m+1)^2} \cdot P_{2m}(0) = -\frac{2m+1}{2(m+1)} \cdot P_{2m}(0), \quad (2.4.19)$$

$$P_{2m-2}(0) = -\frac{2m^2}{m(2m-1)} \cdot P_{2m}(0) = -\frac{2m}{2m-1} \cdot P_{2m}(0), \quad (2.4.20)$$

имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos \theta P_{2m}(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \frac{1}{4m+1} \left(\frac{P_{2m+2}(x) - P_{2m}(x)}{4m+3} - \frac{P_{2m}(x) - P_{2m-2}(x)}{4m-1} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \\ &= -\frac{1}{4m+1} \left(\frac{P_{2m+2}(0) - P_{2m}(0)}{4m+3} - \frac{P_{2m}(0) - P_{2m-2}(0)}{4m-1} \right) = \left[\text{в силу (2.4.19) и (2.4.20)} \right] = \\ &= -\frac{P_{2m}(0)}{4m+1} \left[\frac{1}{4m+3} \cdot \left(-\frac{2m+1}{2(m+1)} - 1 \right) - \frac{1}{4m-1} \cdot \left(1 + \frac{2m}{2m-1} \right) \right] = \\ &= \frac{P_{2m}(0)}{4m+1} \left[\frac{1}{4m+3} \cdot \frac{4m+3}{2(m+1)} + \frac{1}{4m-1} \cdot \frac{4m-1}{2m-1} \right] = \\ &= \frac{P_{2m}(0)}{4m+1} \left[\frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2m-1} \right] = \frac{P_{2m}(0)}{4m+1} \cdot \frac{4m+1}{2(m+1)(2m-1)} = \frac{P_{2m}(0)}{2(m+1)(2m-1)} \end{aligned}$$

Таким образом, при $n \geq 2$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2n+1}{2(n+hR)R^{n-1}} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{q}{k} \cdot \frac{2n+1}{2(n+hR)R^{n-1}} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2m+1, \quad m \geq 1; \\ \frac{q}{k} \cdot \frac{4m+1}{2(2m+hR)R^{2m-1}} \cdot \frac{P_{2m}(0)}{2(m+1)(2m-1)}, & n = 2m, \quad m \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Найдём теперь A_0 и A_1 .

$$A_0 = \frac{1}{2h} \int_0^{\pi} f(\theta) P_0(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2h} \int_0^{\pi/2} \frac{q}{k} \cos \theta \sin \theta d\theta = -\frac{q}{2hk} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{q}{4hk}.$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{3}{2(1+hR)} \int_0^{\pi} f(\theta) P_1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{3}{2(1+hR)} \int_0^{\pi/2} \frac{q}{k} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \\ &= -\frac{3q}{2(1+hR)k} \cdot \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{q}{2(1+hR)k}. \end{aligned}$$

Итак,

$$A_n = \frac{2n+1}{2(n+hR)R^{n-1}} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta =$$

$$= \begin{cases} \frac{q}{4hk}, & n=0; \\ \frac{q}{2(1+hR)k}, & n=1; \\ 0, & n=2m+1, \quad m \geq 1; \\ \frac{q}{k} \cdot \frac{4m+1}{2(2m+hR)R^{2m-1}} \cdot \frac{P_{2m}(0)}{2(m+1)(2m-1)}, & n=2m, \quad m \geq 1. \end{cases}$$

Подставляя найденные A_n в (2.4.16)

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r) \mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (2.4.16)$$

и вспоминая, что $u(r, \theta) = T + v(r, \theta)$, получаем

Ответ:

$$u(r, \theta) = T + \frac{q}{4hk} + \frac{q}{2(1+hR)k} \cdot r \cos \theta + \frac{qR}{2k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m+1)P_{2m}(0)}{(2m+hR)(2m-1)(2m+2)} \left(\frac{r}{R}\right)^{2m} P_{2m}(\cos \theta)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.5. № 788 В)

Определить стационарное распределение температуры $u(r, \theta)$ в однородном шаре радиуса R для случая, когда поверхность шара имеет температуру:

$$u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases} \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Заметим, что эта задача – частный случай уже решённой нами в № 788 а) задачи (2.3.1) при $T_1 = T$, $T_2 = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Воспользуемся результатом:

Ответ к № 788 а):

$$u(r, \theta) = \frac{T_1 + T_2 + (T_2 - T_1) \cos(\alpha)}{2} + \frac{T_2 - T_1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)) \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \theta). \quad (2.5.2)$$

Подставив $T_1 = T$, $T_2 = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$, получим:

$$u(r, \theta) = \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0)) \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \theta). \quad (2.5.3)$$

Далее, в силу (2.1.9),

$$P_{2m+1}(0) = 0, \quad P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m \geq 0. \quad (2.1.9)$$

Поэтому, при $n = 2m$, $m \geq 1$

$$P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0) = P_{2m+1}(0) - P_{2m-1}(0) = 0, \quad (2.5.4)$$

а при $n = 2m + 1$, $m \geq 0$

$$\begin{aligned} P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0) &= P_{2m+2}(0) - P_{2m}(0) = - \left(\frac{(2m+1)(2m+2)}{4(m+1)^2} + 1 \right) P_{2m}(0) = \\ &= - \left(\frac{2m+1}{2(m+1)} + 1 \right) P_{2m}(0) = - \frac{4m+3}{2(m+1)} P_{2m}(0), \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

И, наконец, (2.5.3) переписывается в виде:

Ответ:

$$u(r, \theta) = \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4m+3}{2(m+1)} P_{2m}(0) \left(\frac{r}{R} \right)^{2m+1} P_{2m+1}(\cos \theta),$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.6. № 788 г)

Определить стационарное распределение температуры $u(r, \theta)$ в однородном шаре радиуса R для случая, когда в шаре происходит объёмное тепловыделение с плотностью Q , а отвод тепла совершается через часть поверхности шара ($0 \leq \theta \leq \alpha$) нормальным потоком постоянной плотности q , а остальная поверхность теплоизолирована.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{Q}{k} \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{Q}{k} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u_r(R, \theta) = f_1(\theta) = \begin{cases} -\frac{q}{k}, & 0 \leq \theta < \alpha; \\ 0, & \alpha < \theta \leq \pi. \end{cases} \end{cases} \quad (2.6.1)$$

Шаг 0. Вид решения и избавление от неоднородности в уравнении

Попробуем убрать неоднородность в уравнении, представив решение задачи (2.6.1) в виде

$$u(r, \theta) = w(r) + v(r, \theta) = Ar^2 + B + v(r, \theta), \quad (2.6.2)$$

где $w(r) = Ar^2 + B$ есть решение уравнения

$$\Delta w + \frac{Q}{k} \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 w')' + \frac{Q}{k} = 0. \quad (2.6.3)$$

Для $w(r) = Ar^2 + B$ это уравнение означает:

$$2A + \frac{2}{r} \cdot 2Ar = -\frac{Q}{k}, \quad \implies \quad A = -\frac{Q}{6k}.$$

При этом константа B совершенно произвольна. Тогда

$$u(r, \theta) = -\frac{Q}{6k} r^2 + B + v(r, \theta), \quad B \in \mathbb{R}, \quad (2.6.4)$$

где $v(r, \theta)$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 v_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta v_\theta)_\theta = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |v(0, \theta)| < \infty, \\ v_r(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} -\frac{q}{k} + \frac{Q}{6k}, & 0 \leq \theta < \alpha; \\ \frac{Q}{6k}, & \alpha < \theta \leq \pi. \end{cases} \end{cases} \quad (2.6.5)$$

Прежде чем решать эту задачу, являющуюся аналогом задачи (2.3.1) номера № 788 а), учтём, что в шаре установился стационарный тепловой баланс, то есть что количество тепла, поступающего в шар, равно количеству тепла, выводимого из шара:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi f(\theta) \sin \theta d\theta = 0. \quad (2.6.6)$$

Возьмём интегралы для данной функции $f(\theta)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi f(\theta) \sin \theta d\theta &= 2\pi \left(-\frac{q}{k} \int_0^\alpha \sin \theta d\theta + \frac{Q}{6k} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) = \\ &= 2\pi \left(-\frac{q}{k} \cdot (1 - \cos \alpha) + \frac{Q}{6k} \cdot 2 \right) = 0 \quad \implies \quad q = \frac{Q}{3(1 - \cos \alpha)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$f(\theta) = \begin{cases} T_1 = \frac{Q}{6k} \left(1 - \frac{2}{1 - \cos \alpha} \right), & 0 \leq \theta < \alpha; \\ T_2 = \frac{Q}{6k}, & \alpha < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Повторим дословно шаги 1 – 2 решения № 788 а):

Шаг 1. Поиск сферических гармоник, не зависящих от φ

Пусть функция

$$U(r, \theta) = \mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$$

есть решение уравнения

$$\Delta v \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 v_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta v_\theta)_\theta = 0. \quad (2.6.7)$$

Тогда

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \mathbf{X}'(r))' \mathbf{Y}(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}'(\theta))' \mathbf{X}(r) = 0.$$

Поделим это равенство на $\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$ и умножим на r^2 :

$$\frac{(r^2 \mathbf{X}'(r))'}{\mathbf{X}(r)} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}'(\theta))_\theta}{\mathbf{Y}(\theta)}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от r , а справа – функция, зависящая только от θ , то равны они друг другу могут быть только в случае, когда они – константы. Точнее, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(r^2 \mathbf{X}'(r))'}{\mathbf{X}(r)} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}'(\theta))'}{\mathbf{Y}(\theta)} = \lambda.$$

Отсюда для $\mathbf{X}(r)$ получаем уравнение

$$r^2 \mathbf{X}''(r) + 2r \mathbf{X}'(r) - \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \quad (2.6.8)$$

а для функций $\mathbf{Y}$ – уравнение

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}'(\theta))' + \lambda \mathbf{Y}(\theta) = 0.$$

Домножим на $\sin^2 \theta$:

$$\sin^2 \theta \mathbf{Y}''(\theta) + \sin \theta \cos \theta \mathbf{Y}'(\theta) + \lambda \sin^2 \theta \mathbf{Y}(\theta) = 0. \quad (2.6.9)$$

В уравнении (2.6.9) сделаем замену переменной $x = \cos \theta$. Тогда для функции

$$P(x) = P(\cos \theta) \equiv \mathbf{Y}(\theta)$$

получаем

$$\mathbf{Y}'(\theta) = -\sin \theta P'(\cos \theta), \quad \mathbf{Y}''(\theta) = \sin^2 \theta P''(\cos \theta) - \cos \theta P'(\cos \theta),$$

и уравнение (2.6.9) примет вид:

$$\sin^4 \theta P''(x) - \sin^2 \theta \cos \theta P'(x) - \sin^2 \theta \cos \theta P'(x) + \lambda \sin^2 \theta P(x) = 0.$$

Перепишем его, поделив сначала на $\sin^2 \theta$, и учтём, что

$$\cos \theta = x, \quad \sin^2 \theta = 1 - x^2 :$$

$$(1 - x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x) = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с (2.1.1), стр. 183. Поэтому по теореме 2.1.1, стр. 183, все ограниченные решения этой задачи описываются формулами

$$\lambda = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.6.10)$$

$$P(x) = P_n(x) \text{ — полиномы Лежандра.} \quad (2.6.11)$$

Поэтому все нетривиальные ограниченные решения уравнения (2.6.9) имеют вид

$$\mathbf{Y}_n(\theta) = P_n(\cos \theta), \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.6.12)$$

Итак, с учётом (2.6.8), получаем, что

функция

$$U(r, \theta) = \mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$$

есть независящее от φ ограниченное нетривиальное решение уравнения Лапласа (2.6.7) тогда и только тогда, когда функция $\mathbf{X}(r)$ есть решение уравнения

$$r^2 \mathbf{X}''(r) + 2r \mathbf{X}'(r) - \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \quad (2.6.8)$$

при $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0, \infty}$, а функция $\mathbf{Y}(\theta)$ имеет вид

$$\mathbf{Y}(\theta) = \mathbf{Y}_n(\theta) = P_n(\cos \theta), \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.6.13)$$

Шаг 2. Решение уравнения (2.6.8)

Данное уравнение есть уравнение Эйлера, поскольку степень множителей r при всех производных функции $\mathbf{X}(r)$ равна порядку этих производных. Эти уравнения решаются при помощи замены

$$r = e^t, \quad \mathbf{X}(r) = \mathbf{X}(e^t) = y(t), \quad r \mathbf{X}'(r) = y'(t), \quad r^2 \mathbf{X}''(r) = y''(t) - y'(t).$$

Нам не надо рассматривать случай $r = -e^t < 0$, поскольку в нашей задаче $r \in (0, R)$. Для новой функции $y(t)$ при $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0, \infty}$ получаем уравнение

$$y''(t) + y'(t) - n(n+1)y(t) = 0, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Характеристическое уравнение для него имеет вид

$$\varkappa^2 + \varkappa - n(n+1) = 0.$$

Его корни:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 + (2n+1)}{2} = n, \\ \varkappa_2 &= \frac{-1 - \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 - (2n+1)}{2} = -n-1 \end{aligned}$$

и общее решение

$$y(t) = Ae^{nt} + Be^{-(n+1)t}.$$

Отсюда, так как $e^t = r$, общее решение уравнения (2.6.8) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}.$$

Ну а поскольку нас интересуют только ограниченные решения, то $B = 0$ и

$$\mathbf{X}_n(r) = r^n, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.6.14)$$

Составив из полученных функций ряд, получим что независимое от φ ограниченное нетривиальное решение уравнения Лапласа (2.6.7) имеет вид:

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r) \mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), \quad A_n \in \mathbb{R}. \quad (2.6.15)$$

Шаг 3. Использование краевого условия

Для нахождения коэффициентов A_n используем краевое условие

$$v_r(R, \theta) = f(\theta).$$

По теореме 2.1.7, стр. 185,

$f(\theta, \varphi)$ разлагается в следующий ряд Фурье

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k P_k^m(\cos \theta) (\alpha_{km} \cos(m\varphi) + \beta_{km} \sin(m\varphi)) \right], \quad (2.6.16)$$

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.6.17)$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.6.18)$$

При этом ряд (2.6.16) сходится к $f(\theta, \varphi)$ абсолютно и равномерно на $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Поскольку в нашем случае функция $f(\theta)$ не зависит от φ , то

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^\pi f(\theta) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \cdot \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi}^{=0} = 0, \quad m \neq 0,$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^\pi f(\theta) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) d\varphi}_{=0} = 0.$$

Найдём α_{k0} :

$$\alpha_{k0} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{k!}{k!} \int_0^\pi f(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta \cdot \overbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}^{=2\pi} = (2k+1) \int_0^\pi f(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Приравнявая ряды

$$v_r(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n R^{n-1} P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) = f(\theta), \quad (2.6.19)$$

видим, что они равны¹, если

$$A_n = \frac{\alpha_{n0}}{2nR^{n-1}} = \frac{2n+1}{2nR^{n-1}} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ответ в общем виде:

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r) \mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (2.6.20)$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2nR^{n-1}} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (2.6.21)$$

Нам осталось вычислить A_n в данном конкретном случае, когда

$$f(\theta) = \begin{cases} T_1 = \frac{Q}{6k} \left(1 - \frac{2}{1-\cos \alpha}\right), & 0 \leq \theta < \alpha; \\ T_2 = \frac{Q}{6k}, & \alpha < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \left[x = \cos \theta \right] = - \int P_n(x) dx = \\ &= \left[\text{по рекуррентной формуле (2.1.6)} \quad (2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \quad n \geq 1 \right] = \\ &= - \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1} + c, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

¹В силу (2.6.6), коэффициент $\alpha_{00} = 0$. Заметим, что невыполнение условия (2.6.6), означающего равенство поступающего внутрь и выходящего наружу тепла, влечёт невозможность найти решение, ибо при $\alpha_{00} \neq 0$ равенство (2.6.19) выполнено быть не может.

то при $n \geq 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \left[x = \cos \theta \right] = T_2 \int_{-1}^{\cos \alpha} P_n(x) dx + T_1 \int_{\cos \alpha}^1 P_n(x) dx = \left[\text{в силу (2.6.22)} \right] = \\ &= T_2 \left(\frac{P_{n+1}(-1) - P_{n-1}(-1)}{2n+1} - \frac{P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)}{2n+1} \right) - \\ &\quad - T_1 \left(\frac{P_{n+1}(1) - P_{n-1}(1)}{2n+1} - \frac{P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

В силу равенств $P_n(1) = 1$ и $P_n(-1) = (-1)^n$ получаем

$$\int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = (T_1 - T_2) \frac{P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)}{2n+1},$$

откуда

$$A_n = \frac{2n+1}{2nR^{n-1}} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = (T_1 - T_2) \frac{P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)}{2nR^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.6.23)$$

При $n = 0$ коэффициент A_0 может быть любым. Таким образом, для функции

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta)$$

имеем:

$$v(r, \theta) = A_0 + \frac{(T_1 - T_2) R}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)}{n} \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \theta), \quad (2.6.20)$$

и вспоминая, что $u(r, \theta) = -\frac{Q}{6k} r^2 + B + v(r, \theta)$, и что $T_1 - T_2 = -\frac{Q}{3k(1-\cos \alpha)}$, получаем

Ответ:

$$u(r, \theta) = -\frac{Q}{6k} r^2 - \frac{Q}{3k(1-\cos \alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)}{n} \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \theta) + const,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.7. № 788 Д)

Определить стационарное распределение температуры $u(r, \theta)$ в однородном шаре радиуса R для случая, когда в шаре происходит объёмное тепловыделение с плотностью Q , а на поверхности – конвективный теплообмен по закону

$$u_r(R, \theta) + hu(R, \theta) = f_1(\theta) = T + \cos \theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{Q}{k} \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{Q}{k} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u_r(R, \theta) + hu(R, \theta) = f_1(\theta) = T + \cos \theta. \end{cases} \quad (2.7.1)$$

Шаг 0. Вид решения и избавление от неоднородности в уравнении

Попробуем убрать неоднородность в уравнении, представив решение задачи (2.7.1) в виде

$$u(r, \theta) = w(r) + v(r, \theta) = Ar^2 + B + v(r, \theta), \quad (2.7.2)$$

где $w(r) = Ar^2 + B$ есть решение задачи

$$\Delta w + \frac{Q}{k} \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 w')' + \frac{Q}{k} = 0w'(R) + hw(R) = T. \quad (2.7.3)$$

Для $w(r) = Ar^2 + B$ уравнение (2.7.3) означает:

$$2A + \frac{2}{r} \cdot 2Ar = -\frac{Q}{k}, \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{Q}{6k}.$$

Тогда

$$w(r) = -\frac{Q}{6k} r^2 + B.$$

Найдём константу B из краевого условия $w'(R) + hw(R) = T$:

$$-\frac{Q}{3k} R - \frac{Qh}{6k} R^2 + Bh = T \quad \Rightarrow \quad B = \frac{Q}{6k} R^2 + \frac{Q}{3kh} R + \frac{T}{h}$$

Таким образом,

$$w(r) = \frac{Q}{6k} (R^2 - r^2) + \frac{Q}{3kh} R + \frac{T}{h},$$

откуда

$$u(r, \theta) = \frac{Q}{6k} (R^2 - r^2) + \frac{Q}{3kh} R + \frac{T}{h} + v(r, \theta), \quad (2.7.4)$$

где $v(r, \theta)$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 v_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta v_\theta)_\theta = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |v(0, \theta)| < \infty, \\ v_r(R, \theta) + hv(R, \theta) = f(\theta) = \cos \theta. \end{cases} \quad (2.7.5)$$

Шаг 1. Решение задачи (2.7.5)

Эту задачу мы уже решили в № 788 б). Воспользуемся результатом:

Ответ в общем виде:

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r) \mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (2.7.6)$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2(n+hR) R^{n-1}} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.7.7)$$

Нам осталось вычислить A_n в данном конкретном случае, когда

$$f(\theta) = \cos \theta.$$

И здесь **важно заметить**, что функция $f(\theta) \equiv P_1(\cos \theta)$, а полиномы $P_n(x)$ друг другу ортогональны (теорема 2.1.3), поэтому

$$A_n = 0 \quad n \neq 1. \quad (2.7.8)$$

Осталось найти

$$A_1 = \frac{3}{2(1+hR)} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{3}{2(1+hR)} \cdot \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{3}{2(1+hR)} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{1+hR}.$$

Таким образом, для $v(r, \theta)$ от всего ряда (2.7.6) осталось только одно слагаемое:

$$v(r, \theta) = A_1 r P_1(\cos \theta) \equiv \frac{r \cos \theta}{1+hR}.$$

Вспоминая, что

$$u(r, \theta) = \frac{Q}{6k} (R^2 - r^2) + \frac{Q}{3kh} R + \frac{T}{h} + v(r, \theta), \quad (2.7.4)$$

получаем

Ответ:

$$u(r, \theta) = \frac{Q}{6k} (R^2 - r^2) + \frac{Q}{3kh} R + \frac{T}{h} + \frac{r \cos \theta}{1+hR}.$$

2.8. № 789

Определить стационарное распределение температуры $u(r, \theta)$ в теле, имеющем форму половины шара радиуса R , если сферическая часть его границы имеет температуру T , а плоское сонование – нулевую.

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, z)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f_1(\theta) = \begin{cases} T, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \theta = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{cases} \quad (2.8.1)$$

Шаг 0. Сведение к задаче в шаре

Поскольку существенная для нашего решения теорема 2.1.7, стр. 185, о разложениях функций в ряд по сферическим гармоникам работает в шаре, а у нас в данной задаче – полушарие, надо попытаться свести задачу к аналогичной задаче в шаре.

Это несложно сделать, если вспомнить, как в подобной ситуации мы поступали с уравнениями теплопроводности и колебаний на полупрямой, когда **методом продолжений** доопределяли функции начальных условий на левую полупрямую

– нечётным образом, если краевое условие было I-го рода $u(0, t) = 0$, и

– чётным образом, если краевое условие было II-го рода $u_x(0, t) = 0$.

В нашей задаче температура основания равна нулю, поэтому, по аналогии с первым случаем из метода продолжений, **будем искать функцию $u(r, \theta)$ как решение следующей задачи в шаре:**²

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}; \\ -T, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases} \end{cases} \quad (2.8.2)$$

²Этот подход является весьма естественным и с физической точки зрения: поскольку нас интересует стационарное распределение температуры, то есть состояние, в котором шар окажется, когда все тепловые процессы перестанут менять его температуру, то из соображений симметрии на сечении $\theta = \frac{\pi}{2}$ установится температура, равная среднему значению температур верхней и нижней полусфер.

Шаг 1. Решение задачи (2.8.2)

Эту задачу мы уже решили в № 788 а), см. (2.3.1), стр. 189. Вспользуемся результатом Решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T_1, & 0 \leq \theta < \alpha; \\ T_2, & \alpha < \theta \leq \pi \end{cases} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

является функция

$$u(r, \theta) = \frac{T_1 + T_2 + (T_2 - T_1) \cos(\alpha)}{2} + \frac{T_2 - T_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)) \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad (2.8.3)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

В нашем случае

$$T_1 = T, \quad T_2 = -T, \quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$u(r, \theta) = -T \sum_{n=1}^{\infty} (P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0)) \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \theta). \quad (2.8.4)$$

Применив формулу (2.1.9):

$$P_{2m+1}(0) = 0, \quad P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m \geq 0, \quad (2.1.9)$$

получаем, что

$$P_{2m+2}(0) = -\frac{(2m+1)(2m+2)}{4(m+1)^2} \cdot P_{2m}(0) = -\frac{2m+1}{2(m+1)} \cdot P_{2m}(0), \quad (2.4.19)$$

и тогда

$$P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0) = \begin{cases} 0 & n = 2m, \quad m \geq 1; \\ \left(-\frac{2m+1}{2(m+1)} - 1\right) \cdot P_{2m}(0) = -\frac{4m+3}{2m+2} \cdot P_{2m}(0) & n = 2m+1, \quad m \geq 0. \end{cases}$$

и равенство (2.8.4) преобразуется в

Ответ:

$$u(r, \theta) = T \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4m+3}{2m+2} \cdot P_{2m}(0) \left(\frac{r}{R}\right)^{2m+1} P_{2m+1}(\cos \theta),$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.8.1. Уравнение теплопроводности в сферических координатах

Найти решение $u(r, \theta, \varphi; t)$ уравнения теплопроводности в сферических координатах с краевым условием на сфере

$$\begin{cases} u_t - a^2 \left(\frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} \right) = 0; \\ \alpha u(R, \theta, \varphi; t) + \beta u_r(R, \theta, \varphi; t) = 0. \end{cases} \quad (2.8.5)$$

Шаг 1. Вид частных решений и предварительные рассуждения

Найдём все решения задачи (2.8.5), имеющие вид

$$U(r, \theta, \varphi; t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta, \varphi). \quad (2.8.6)$$

Подставив (2.8.6) в уравнение $U_t - a^2 \Delta U = 0$, получим:

$$\mathbf{T}'(t)\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta, \varphi) - \mathbf{T}(t) \cdot \frac{1}{r^2} \left((r^2 \mathbf{X}'(r))' \mathbf{Y}(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}_\theta)_\theta \mathbf{X}(r) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathbf{Y}_{\varphi\varphi} \mathbf{X}(r) \right) = 0$$

Поделим это равенство на выражение $a^2 \mathbf{T}(t)\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta, \varphi)$. Получим

$$\frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2 \mathbf{T}(t)} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{(r^2 \mathbf{X}'(r))'}{\mathbf{X}(r)} + \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathbf{Y}_{\varphi\varphi}}{\mathbf{Y}(\theta, \varphi)} \right) = 0.$$

Первая дробь зависит только от t , а всё остальное выражение – только от r , θ и φ . Поэтому их разность может быть нулём в том и только в том случае, когда $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ такая, что:

$$\frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2 \mathbf{T}(t)} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{(r^2 \mathbf{X}'(r))'}{\mathbf{X}(r)} + \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathbf{Y}_{\varphi\varphi}}{\mathbf{Y}(\theta, \varphi)} \right) = -\lambda.$$

Отсюда мы получаем уравнение для $\mathbf{T}_{kn}(t)$:

$$\mathbf{T}'(t) + \lambda \mathbf{T}(t) = 0 \quad (2.8.7)$$

и равенство, связывающее $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Y}(\theta, \varphi)$:

$$\left(\frac{(r^2 \mathbf{X}'(r))'}{\mathbf{X}(r)} + \lambda r^2 \right) + \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathbf{Y}_{\varphi\varphi}}{\mathbf{Y}(\theta, \varphi)} = 0$$

Выражение в скобках зависит только от r , а последняя дробь – только от θ и φ . Это возможно только в случае, когда $\exists \varkappa \in \mathbb{R}$ такая, что:

$$\frac{(r^2 \mathbf{X}'(r))'}{\mathbf{X}(r)} + \lambda r^2 = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathbf{Y}_{\varphi\varphi}}{\mathbf{Y}(\theta, \varphi)} = \varkappa.$$

Отсюда мы получаем уравнения для $\mathbf{X}_{kn}(r)$:

$$(r^2 \mathbf{X}'(r))' + (\lambda r^2 - \varkappa) \mathbf{X} = 0 \quad (2.8.8)$$

и для $\mathbf{Y}(\theta, \varphi)$:

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{Y}_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathbf{Y}_{\varphi\varphi} + \varkappa \mathbf{Y}(\theta, \varphi) = 0. \quad (2.8.9)$$

Шаг 2. Сферические гармоники

Если решение уравнения (2.8.9) искать в виде

$$\mathbf{Y}(\theta, \varphi) = \mathbf{\Theta}(\theta)\mathbf{\Phi}(\varphi), \quad (2.8.10)$$

то получим

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \mathbf{\Theta}'(\theta))' \mathbf{\Phi}(\varphi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \mathbf{\Theta}(\theta) \mathbf{\Phi}''(\varphi) + \varkappa \mathbf{\Theta}(\theta) \mathbf{\Phi}(\varphi) = 0.$$

Поделим это равенство на $\frac{\mathbf{\Theta}(\theta)\mathbf{\Phi}(\varphi)}{\sin^2 \theta}$.

$$\frac{\sin \theta (\sin \theta \mathbf{\Theta}'(\theta))'}{\mathbf{\Theta}(\theta)} + \varkappa \sin^2 \theta = - \frac{\mathbf{\Phi}''(\varphi)}{\mathbf{\Phi}(\varphi)}.$$

Слева стоит функция, зависящая только от θ , а справа – только от φ , поэтому $\exists \mu \in \mathbb{R}$:

$$\sin \theta (\sin \theta \Theta'(\theta))' + (\varkappa \sin^2 \theta - \mu) \Theta(\theta) = 0, \quad (2.8.11)$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) = 0 \quad (2.8.12)$$

Уравнение (2.8.12) необходимо дополнить условием периодичности, поскольку функция $U(r, \theta, \varphi)$, а следовательно и функция Φ должна быть непрерывной. Тогда для $\Phi(\varphi)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases} \quad (2.8.13)$$

Решим эту задачу. Общим решением уравнения $\Phi''(\varphi) + \mu \Phi(\varphi) = 0$ является функция

$$\begin{cases} \Phi(\varphi) = c_1 \operatorname{sh}(\beta\varphi) + c_2 \operatorname{ch}(\beta\varphi) & \text{при } \mu = -\beta^2 < 0; \\ \Phi(\varphi) = c_1 + c_2\varphi & \text{при } \mu = 0; \\ \Phi(\varphi) = c_1 \sin(\beta\varphi) + c_2 \cos(\beta\varphi) & \text{при } \mu = \beta^2 > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функции $c_1 \operatorname{sh}(\beta\varphi) + c_2 \operatorname{ch}(\beta\varphi)$ и $c_1 + c_2\varphi$ ни при каких $c_{1,2}$ (кроме $c_1 = c_2 = 0$) не удовлетворяют условию периодичности $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$.

В то же время функция $c_1 \sin(\beta\varphi) + c_2 \cos(\beta\varphi)$ удовлетворяет этому условию тогда и только тогда, когда

$$\mu = \beta^2 = m^2, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Итак, функция (2.8.10) есть решение (2.8.9), то есть является сферической функцией, тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\varphi) = c_1 \sin(m\varphi) + c_2 \cos(m\varphi), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.8.14)$$

а функция $\Theta(\theta)$ есть решение уравнения

$$\sin \theta (\sin \theta \Theta'(\theta))' + (\varkappa \sin^2 \theta - m^2) \Theta(\theta) = 0. \quad (2.8.15)$$

В уравнении (2.8.15) сделаем замену переменной $x = \cos \theta$. Тогда для функции

$$P(x) = P(\cos \theta) \equiv \Theta(\theta)$$

получаем

$$\Theta'(\theta) = -\sin \theta P'(\cos \theta), \quad \Theta''(\theta) = \sin^2 \theta P''(\cos \theta) - \cos \theta P'(\cos \theta),$$

и уравнение (2.8.15) примет вид:

$$\sin^4 \theta P''(x) - \sin^2 \theta \cos \theta P'(x) - \sin^2 \theta \cos \theta P'(x) + (\varkappa \sin^2 \theta - m^2) P(x) = 0.$$

Перепишем его, поделив сначала на $\sin^2 \theta$, и учтём, что

$$\cos \theta = x, \quad \sin^2 \theta = 1 - x^2 :$$

$$(1 - x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left(\varkappa - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P(x) = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с (2.1.15), стр. 184. Поэтому по теореме 2.1.5, стр. 185, все ограниченные решения этой задачи описываются формулами

$$\varkappa = \varkappa_k = k(k+1), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.8.16)$$

$$P(x) = P_k^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_k(x)}{dx^m}, \quad m = \overline{0, k}. \quad (2.8.17)$$

Поэтому все нетривиальные решения уравнения (2.8.15) имеют вид

$$\Theta_{km}(\theta) = P_k^m(\cos \theta), \quad k = \overline{0, \infty}, \quad m = \overline{0, n}. \quad (2.8.18)$$

Наконец, с учётом (2.8.14), составляя линейную комбинацию всех решений, зависящих от k , получаем, что

функция (2.8.10) есть решение (2.8.9) тогда и только тогда, когда

$$\varkappa_k = k(k+1), \quad k = \overline{0, \infty}, \quad (2.8.16)$$

$$\mathbf{Y}(\theta, \varphi) = \mathbf{Y}_k(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^k (A_{km} \sin(m\varphi) + B_{km} \cos(m\varphi)) P_k^m(\cos \theta), \quad k = \overline{0, \infty}. \quad (2.8.19)$$

Шаг 3. Решение задачи для $\mathbf{X}(r)$

Для функций $\mathbf{X}(r)$ мы получили уравнение

$$r^2 \mathbf{X}''(r) + 2r \mathbf{X}'(r) + (\lambda r^2 - \varkappa_k) \mathbf{X} = 0. \quad (2.8.8)$$

Приведём его к виду уравнения Бесселя

$$ry''(r) + y'(r) + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{r^2} \right) y(r) = 0$$

при помощи замены переменных:

$$\mathbf{X}(r) \equiv \frac{y(r)}{\sqrt{r}}, \quad \implies \quad \mathbf{X}'(r) = \frac{y'(r)}{\sqrt{r}} - \frac{y(r)}{2r^{\frac{3}{2}}}, \quad \mathbf{X}''(r) = \frac{y''(r)}{\sqrt{r}} - \frac{y'(r)}{r^{\frac{3}{2}}} + \frac{3y(r)}{4r^{\frac{5}{2}}}.$$

Тогда уравнение (2.8.8) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \left(r^2 \left(y''(r) - \frac{y'(r)}{r} + \frac{3y(r)}{4r^2} \right) + 2r \left(y'(r) - \frac{y(r)}{2r} \right) + (\lambda r^2 - \varkappa_k) y(r) \right) = 0.$$

Упростим его:

$$r^2 y''(r) - ry'(r) + \frac{3}{4}y(r) + 2ry'(r) - y(r) + (\lambda r^2 - \varkappa_k) y(r) = 0.$$

Наконец, приведём подобные и получим:

$$r^2 y''(r) + ry'(r) + \left(\lambda r^2 - \left(\varkappa_k + \frac{1}{4} \right) \right) y(r) = 0.$$

Поделим уравнение на r и учтём, что $\varkappa_k = k(k+1)$, и следовательно

$$\left(\varkappa_k + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} [4k(k+1) + 1] = \frac{1}{4} (2k+1)^2 = \left(k + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Добавив краевое условие, следующее из $\alpha U(R, \theta, \varphi; t) + \beta U_r(R, \theta, \varphi; t) = 0$, получим:

$$\begin{cases} ry''(r) + y'(r) + \left(\lambda r - \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{r} \right) y(r) = 0; \\ \alpha y(R) + \beta y'(R) = 0 \end{cases} \quad (2.8.20)$$

Воспользуемся результатом следствия 1.1.1, стр. 2.

Общее решение уравнения Бесселя (1.1.1) задаётся каждой из формул

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x) = c_3 H_\nu^{(1)}(x) + c_4 H_\nu^{(2)}(x), \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_5 J_\nu(x) + c_6 J_{-\nu}(x) \quad \nu \notin \mathbb{Z}.$$

Поскольку в нашем случае $\nu = k + \frac{1}{2}$, удобнее воспользоваться последней формулой:

$$y(r) = c_5 J_{k+\frac{1}{2}}(r) + c_6 J_{-k-\frac{1}{2}}(r).$$

И, поскольку мы всё равно позже представим общее решение задачи (2.8.5) в виде ряда по линейно независимым решениям задач для $\mathbf{X}(r)$, $\mathbf{Y}(\theta, \varphi)$, выпишем систему линейно независимых решений (2.8.20):

$$y(r) \in \left\{ J_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{kn} r}{R} \right) \right\}_{k=-\infty}^{\infty}, \quad (2.8.21)$$

где μ_{kn} – положительные корни рассматриваемого при каждом $k = \overline{0, \infty}$ уравнения

$$\alpha R J_{k+\frac{1}{2}}(\mu) + \beta \mu J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu) = 0. \quad (2.8.22)$$

Таким образом,

решениями задачи для $\mathbf{X}(r)$ являются

$$\lambda_{kn} = \left[\frac{\mu_{kn}}{R} \right]^2, \quad \mathbf{X}_{kn}(r) = \frac{J_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{kn} r}{R} \right)}{\sqrt{r}}, \quad k = \overline{-\infty, \infty}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.8.23)$$

где μ_{kn} – положительные корни уравнения

$$\alpha R J_{k+\frac{1}{2}}(\mu) + \beta \mu J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu) = 0. \quad (2.8.22)$$

Шаг 4. Составление общего решения задачи (2.8.5)

Осталось вспомнить уравнение для функций $\mathbf{T}(t)$:

$$\mathbf{T}'(t) + \lambda \mathbf{T}(t) = 0, \quad \lambda = \lambda_{kn} = \frac{\mu_{kn}^2}{R^2}. \quad (2.8.7)$$

Общим решением этого уравнения является

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = c_{kn} e^{-\frac{\mu_{kn}^2}{R^2} t}.$$

Мы уже можем, наконец, выписать все решения (2.8.5), имеющие вид (2.8.6)

$$U(r, \theta, \varphi; t) = \mathbf{T}(t) \mathbf{X}(r) \mathbf{Y}(\theta, \varphi) :$$

$$U(r, \theta, \varphi; t) = c_{kn} e^{-\frac{\mu_{kn}^2}{R^2} t} \cdot \frac{J_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{kn} r}{R} \right)}{\sqrt{r}} \cdot \begin{cases} \sum_{m=0}^k (A_{km} \sin(m\varphi) + B_{km} \cos(m\varphi)) P_k^m(\cos \theta) & k \geq 0; \\ \sum_{m=0}^l (A_{km} \sin(m\varphi) + B_{km} \cos(m\varphi)) P_{l-1}^m(\cos \theta) & k = -l < 0. \end{cases} \quad (2.8.24)$$

Составим линейную комбинацию всех линейно независимых решений (2.8.5), учитывая, что индексы k , m и n меняются в пределах:

$$k = \overline{-\infty, +\infty}, \quad n = \overline{1, +\infty}, \quad m = \overline{0, n}.$$

Получим

Ответ:

$$u(r, \theta, \varphi; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} e^{-\frac{\mu_{kn}^2}{R^2} t} \cdot \frac{J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn} r}{R}\right)}{\sqrt{r}} \cdot \begin{cases} \sum_{m=0}^k (A_{km} \sin(m\varphi) + B_{km} \cos(m\varphi)) P_k^m(\cos \theta) & k \geq 0; \\ \sum_{m=0}^{l-1} (A_{km} \sin(m\varphi) + B_{km} \cos(m\varphi)) P_{l-1}^m(\cos \theta) & k = -l < 0, \end{cases} \quad (2.8.25)$$

где μ_{kn} – положительные корни уравнения

$$\alpha R J_{k+\frac{1}{2}}(\mu) + \beta \mu J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu) = 0. \quad (2.8.22)$$

2.9. № 793 а). Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри шара радиуса R .

Математически это означает задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, \theta, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(0, \theta, \varphi)| < \infty, \\ u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi). \end{cases} \quad (2.9.1)$$

Шаг 1. Решение уравнения Лапласа в шаре

Уравнения Лапласа в шаре мы уже решили в разделе 2.2 и получили формулу

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r) \sum_{m=0}^n \mathbf{Y}_{mn}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Шаг 2. Использование краевого условия

В нашей задаче добавилось краевое условие

$$u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

Оно позволит нам найти коэффициенты A_{mn} и B_{mn} в формуле (2.2.17). По теореме 2.1.7, стр. 185, $f(\theta, \varphi)$ разлагается в следующий ряд Фурье

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k P_k^m(\cos \theta) (\alpha_{km} \cos(m\varphi) + \beta_{km} \sin(m\varphi)) \right], \quad (2.6.16)$$

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.6.18)$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.6.18)$$

При этом ряд (2.6.16) сходится к $f(\theta, \varphi)$ абсолютно и равномерно на $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Приравняем ряд (2.2.17), взятый при $r = R$, к ряду (2.6.16):

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi)) \right] = f(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

Получаем при $m = 0$

$$R^n P_n(\cos \theta) \left(\overbrace{A_{0n} \cos(0)}^{=1} + \overbrace{B_{0n} \sin(0)}^{=0} \right) = \frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta),$$

откуда

$$A_{0n} = \frac{\alpha_{n0}}{2R^n}, \quad B_{0n} - \text{произвольно}, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.9.2)$$

Аналогично, при $m \in \mathbb{N}$

$$R^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) = P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi)),$$

откуда, в силу линейной независимости функций $\sin(m\varphi)$ и $\cos(m\varphi)$,

$$A_{mn} = \frac{\alpha_{nm}}{R^n}, \quad B_{mn} = \frac{\beta_{nm}}{R^n}, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.9.3)$$

Ответ:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \left[\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi)) \right], \quad (2.9.4)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2), а коэффициенты α_{nm} и β_{nm} определяются из формул

$$\alpha_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.6.18)$$

$$\beta_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.1.21)$$

2.10. № 793 б). Внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне шара радиуса R .

Математически это означает задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, \theta, \varphi)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0, & R < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi \quad 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(\infty, \theta, \varphi)| < \infty, \\ u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi). \end{cases} \quad (2.10.1)$$

Шаг 1. Решение уравнения Лапласа в шаре

Уравнения Лапласа в шаре мы уже решили в разделе 2.2 и получили формулу

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r) \sum_{m=0}^n \mathbf{Y}_{mn}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)). \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Шаг 2. Использование краевого условия

В нашей задаче добавилось краевое условие

$$u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

Оно позволит нам найти коэффициенты A_{mn} и B_{mn} в формуле (2.2.17). По теореме 2.1.7, стр. 185, $f(\theta, \varphi)$ разлагается в следующий ряд Фурье

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k P_k^m(\cos \theta) (\alpha_{km} \cos(m\varphi) + \beta_{km} \sin(m\varphi)) \right], \quad (2.6.16)$$

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.6.18)$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.1.21)$$

При этом ряд (2.6.16) сходится к $f(\theta, \varphi)$ абсолютно и равномерно на $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Приравняем ряд (2.2.17), взятый при $r = R$, к ряду (2.6.16):

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi)) \right] = f(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

Получаем при $m = 0$

$$\frac{1}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) \left(A_{0n} \overbrace{\cos(0)}^{=1} + B_{0n} \overbrace{\sin(0)}^{=0} \right) = \frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta),$$

откуда

$$A_{0n} = \frac{\alpha_{n0}}{2} R^{n+1}, \quad B_{0n} - \text{произвольно}, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (2.10.2)$$

Аналогично, при $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{R^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) (A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)) = P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi)),$$

откуда, в силу линейной независимости функций $\sin(m\varphi)$ и $\cos(m\varphi)$,

$$A_{mn} = \alpha_{nm} R^{n+1}, \quad B_{mn} = \beta_{nm} R^{n+1}, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.10.3)$$

Ответ:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \left[\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi)) \right], \quad (2.10.4)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2), а коэффициенты α_{nm} и β_{nm} определяются из формул

$$\alpha_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.6.18)$$

$$\beta_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.1.21)$$

2.11. № 792 а).

Концентрация некоторого газа на границе сферического сосуда радиуса R с центром в начале координат равна $f(\theta)$. Определить стационарное распределение концентрации данного газа внутри этого сосуда.

Математически это означает частный случай внутренней задачи Дирихле (2.9.1):

Найти ограниченную функцию $u(r, \theta)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta). \end{cases} \quad (2.11.1)$$

Поскольку в номере № 793 а) мы решили более общую задачу (2.9.1), стр. 213, воспользуемся её результатом:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \left[\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi)) \right], \quad (2.9.4)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2), а коэффициенты α_{nm} и β_{nm} определяются из формул

$$\alpha_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.6.18)$$

$$\beta_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.1.21)$$

По теореме 2.1.4, стр. 184, функцию $f(\theta)$ можно представить следующим рядом Фурье по полиномам Лежандра:

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(\cos \theta), \quad f_k = \frac{2k+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (2.1.14)$$

Поэтому из граничного условия $u(R, \theta) = f(\theta)$ получаем равенство рядов

$$\begin{aligned} u(R, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{R}\right)^n \left[\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi)) \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos \theta) = f(\theta), \end{aligned}$$

которое заведомо верно, если ряды по индексу n равны почленно:

$$\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi)) = f_n P_n(\cos \theta).$$

Эти же равенства, в свою очередь, выполняются, если

$$\frac{\alpha_{n0}}{2} = f_n, \quad \text{а при } m > 0 \text{ все } \alpha_{nm} = \beta_{nm} = 0.$$

Ответ:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n f_n P_n(\cos \theta), \quad f_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.11.2)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.12. № 792 Б).

Концентрация некоторого газа на границе сферического сосуда радиуса R с центром в начале координат равна $f(\theta)$. Определить стационарное распределение концентрации данного газа вне этого сосуда.

Математически это означает частный случай внешней задачи Дирихле (2.9.1):

Найти ограниченную функцию $u(r, \theta)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta = 0, & R < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta). \end{cases} \quad (2.12.1)$$

Поскольку в номере № 793 Б) мы решили более общую задачу (2.10.1), стр. 214, воспользуемся её результатом:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left[\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi)) \right], \quad (2.10.4)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2), а коэффициенты α_{nm} и β_{nm} определяются из формул

$$\alpha_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.6.18)$$

$$\beta_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.1.21)$$

По теореме 2.1.4, стр. 184, функцию $f(\theta)$ можно представить следующим рядом Фурье по полиномам Лежандра:

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(\cos \theta), \quad f_k = \frac{2k+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (2.1.14)$$

Поэтому из граничного условия $u(R, \theta) = f(\theta)$ получаем равенство рядов

$$u(R, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{R} \right)^{n+1} \left[\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi)) \right] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos \theta) = f(\theta),$$

которое заведомо верно, если ряды по индексу n равны почленно:

$$\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (\alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi)) = f_n P_n(\cos \theta).$$

Эти же равенства, в свою очередь, выполняются, если

$$\frac{\alpha_{n0}}{2} = f_n, \quad \text{а при } m > 0 \text{ все } \alpha_{nm} = \beta_{nm} = 0.$$

Ответ:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^{n+1} f_n P_n(\cos \theta), \quad f_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.12.2)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.13. № 790 а)

Построить функцию $u(r, \theta)$, гармоническую в шаре радиуса R , и удовлетворяющую краевому условию:

$$u(R, \theta) = f(\theta) = 3 + 5 \cos^2 \theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, \theta)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta) = 3 + 5 \cos^2 \theta. \end{cases} \quad (2.13.1)$$

Шаг 1. Решение в общем виде

Данная задача есть частный случай задачи, решённой нами в № 792 а). Воспользуемся результатом:

Общее решение внутренней задачи Дирихле, не зависящее от φ :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n f_n P_n(\cos \theta), \quad f_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.11.2)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

Поскольку данная нам функцию $f(\theta) = 3 + 5 \cos^2 \theta$, как легко видеть, есть линейная комбинация полиномов $P_0(\cos \theta)$ и $P_2(\cos \theta)$:

$$P_0(\cos \theta) = 1 \quad \text{и} \quad P_2(\cos \theta) = \left[\text{в силу формулы (2.1.10)} \right] = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2},$$

$$\Rightarrow f(\theta) = 3 + 5 \cos^2 \theta = 3 + 5 \frac{1 + 2P_2(\cos \theta)}{3} = \frac{14}{3} P_0(\cos \theta) + \frac{10}{3} P_2(\cos \theta),$$

то коэффициенты f_n можно найти сразу, не вычисляя интегралов:

$$f(\theta) = \frac{14}{3} P_0(\cos \theta) + \frac{10}{3} P_2(\cos \theta) \quad \Rightarrow \quad f_n = \begin{cases} \frac{14}{3} & n = 0; \\ \frac{10}{3} & n = 2; \\ 0 & n = 1, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Таким образом,

$$u(r, \theta) = \frac{14}{3} P_0(\cos \theta) + \frac{10r^2}{3R^2} P_2(\cos \theta) = \frac{14}{3} + \frac{10r^2}{3R^2} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = \frac{14}{3} - \frac{5r^2}{3R^2} + 5 \cdot \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \theta.$$

Ответ:

$$u(r, \theta) = \frac{14}{3} P_0(\cos \theta) + \frac{10r^2}{3R^2} P_2(\cos \theta) = \frac{14}{3} - \frac{5r^2}{3R^2} + 5 \cdot \frac{r^2}{R^2} \cos^2 \theta,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.14. № 790 Б)

Построить функцию $u(r, \theta)$, гармоническую в шаре радиуса R , и удовлетворяющую краевому условию:

$$u(R, \theta) = f(\theta) = 2 \cos \theta - 3 \sin^2 \theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, \theta)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta) = 2 \cos \theta - 3 \sin^2 \theta. \end{cases} \quad (2.14.1)$$

Шаг 1. Решение в общем виде

Данная задача есть частный случай задачи, решённой нами в № 792 а). Воспользуемся результатом:

Общее решение внутренней задачи Дирихле, не зависящее от φ :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n f_n P_n(\cos \theta), \quad f_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.11.2)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

Поскольку данная нам функцию $f(\theta) = 2 \cos \theta - 3 \sin^2 \theta$, как легко видеть, есть линейная комбинация полиномов $P_0(\cos \theta)$, $P_1(\cos \theta)$ и $P_2(\cos \theta)$:

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta \quad \text{и} \quad P_2(\cos \theta) = \left[\text{в силу формулы (2.1.10)} \right] = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2},$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\theta) &= 2 \cos \theta - 3 \sin^2 \theta = 2 \cos \theta - 3(1 - \cos^2 \theta) = -3 + 2 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta = \\ &= -3 + 2 \cos \theta + 2 \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + 1 = -2P_0(\cos \theta) + 2P_1(\cos \theta) + 2P_2(\cos \theta), \end{aligned}$$

то коэффициенты f_n можно найти сразу, не вычисляя интегралов:

$$f(\theta) = -2P_0(\cos \theta) + 2P_1(\cos \theta) + 2P_2(\cos \theta) \quad \Rightarrow \quad f_n = \begin{cases} -2 & n = 0; \\ 2 & n = 1, \quad n = 2; \\ 0 & n \geq 3, \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= -2P_0(\cos \theta) + 2 \cdot \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) + 2 \cdot \frac{r^2}{R^2} P_2(\cos \theta) = -2 + \frac{2r}{R} \cos \theta + 2 \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = \\ &= -2 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{2r}{R} \cos \theta + 3 \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(r, \theta) = -2P_0(\cos \theta) + 2 \cdot \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) + 2 \cdot \frac{r^2}{R^2} P_2(\cos \theta) = -2 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{2r}{R} \cos \theta + 3 \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot \cos^2 \theta,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.15. № 790 в)

Построить функцию $u(r, \theta)$, гармоническую в шаре радиуса R , и удовлетворяющую краевому условию:

$$u(R, \theta) = f(\theta) = 3 \cos^3 \theta - \cos \theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, \theta)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta) = 3 \cos^3 \theta - \cos \theta. \end{cases} \quad (2.15.1)$$

Шаг 1. Решение в общем виде

Данная задача есть частный случай задачи, решённой нами в № 792 а). Воспользуемся результатом:

Общее решение внутренней задачи Дирихле, не зависящее от φ :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n f_n P_n(\cos \theta), \quad f_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.11.2)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

Поскольку данная нам функцию $f(\theta) = 3 \cos^3 \theta - \cos \theta$, как легко видеть, есть линейная комбинация полиномов $P_1(\cos \theta)$ и $P_3(\cos \theta)$:

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta \quad \text{и} \quad P_3(\cos \theta) = \left[\text{в силу формулы (2.1.10)} \right] = \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2},$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\theta) &= 3 \cos^3 \theta - \cos \theta = -\cos \theta + \frac{6}{5} \cdot \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2} + \frac{9}{5} \cos \theta = \\ &= \frac{4}{5} P_1(\cos \theta) + \frac{6}{5} P_3(\cos \theta), \end{aligned}$$

то коэффициенты f_n можно найти сразу, не вычисляя интегралов:

$$f(\theta) = \frac{4}{5} P_1(\cos \theta) + \frac{6}{5} P_3(\cos \theta) \quad \Rightarrow \quad f_n = \begin{cases} \frac{4}{5} & n = 1; \\ \frac{6}{5} & n = 3; \\ 0 & n = 0, \quad n = 2, \quad n \geq 4. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) + \frac{6}{5} \cdot \frac{r^3}{R^3} P_3(\cos \theta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{r}{R} \cos \theta + \frac{6}{5} \cdot \frac{r^3}{R^3} \cdot \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2} = \\ &= \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{r}{R} - \frac{9}{5} \cdot \frac{r^3}{R^3} \right) \cos \theta + 3 \cdot \frac{r^3}{R^3} \cdot \cos^3 \theta. \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(r, \theta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) + \frac{6}{5} \cdot \frac{r^3}{R^3} P_3(\cos \theta) = \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{r}{R} - \frac{9}{5} \cdot \frac{r^3}{R^3} \right) \cos \theta + 3 \cdot \frac{r^3}{R^3} \cdot \cos^3 \theta,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.16. № 790 Г)

Построить функцию $u(r, \theta)$, гармоническую в шаре радиуса R , и удовлетворяющую краевому условию:

$$u(R, \theta) = f(\theta) = 3 \sin^2(2\theta) - 2 \sin^2 \theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, \theta)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, & 0 \leq r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta) = 3 \sin^2(2\theta) - 2 \sin^2 \theta. \end{cases} \quad (2.16.1)$$

Шаг 1. Решение в общем виде

Данная задача есть частный случай задачи, решённой нами в № 792 а). Воспользуемся результатом:

Общее решение внутренней задачи Дирихле, не зависящее от φ :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n f_n P_n(\cos \theta), \quad f_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.11.2)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

Поскольку данная нам функцию $f(\theta) = 3 \sin^2(2\theta) - 2 \sin^2 \theta$, как легко видеть, есть линейная комбинация полиномов $P_0(\cos \theta)$, $P_2(\cos \theta)$ и $P_4(\cos \theta)$:

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad P_2(\cos \theta) = \left[\text{см. (2.1.10)} \right] = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \quad \text{и}$$

$$P_4(\cos \theta) = \left[\text{см. (2.1.10)} \right] = \frac{35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3}{8},$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\theta) &= 3 \sin^2(2\theta) - 2 \sin^2 \theta = 3(2 \sin \theta \cos \theta)^2 - 2(1 - \cos^2 \theta) = \\ &= 12(1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) = -2 + 14 \cos^2 \theta - 12 \cos^4 \theta = \\ &= -12 \cdot \frac{8}{35} \cdot \underbrace{\frac{35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3}{8}}_{=-12 \cos^4 \theta} - \frac{72}{7} \cos^2 \theta + \frac{36}{35} + 14 \cos^2 \theta - 2 = -\frac{96}{35} P_4(\cos \theta) + \frac{26}{7} \cos^2 \theta - \frac{34}{35} = \\ &= -\frac{96}{35} P_4(\cos \theta) + \frac{26}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + \underbrace{\frac{26}{21} - \frac{34}{35}}_{=\frac{4}{15}} = -\frac{96}{35} P_4(\cos \theta) + \frac{52}{21} P_2(\cos \theta) + \frac{4}{15} P_0(\cos \theta), \end{aligned}$$

то коэффициенты f_n можно найти сразу, не вычисляя интегралов:

$$f(\theta) = -\frac{96}{35} P_4(\cos \theta) + \frac{52}{21} P_2(\cos \theta) + \frac{4}{15} P_0(\cos \theta) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n = \begin{cases} \frac{4}{15} & n = 0; \\ \frac{52}{21} & n = 2; \\ -\frac{96}{35} & n = 4; \\ 0 & n = 1, \quad n = 3, \quad n \geq 5, \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{4}{15} P_0(\cos \theta) + \frac{52}{21} \cdot \frac{r^2}{R^2} P_2(\cos \theta) - \frac{96}{35} \cdot \frac{r^4}{R^4} P_4(\cos \theta) = \\ &= \frac{4}{15} + \frac{52}{21} \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} - \frac{96}{35} \cdot \frac{r^4}{R^4} \cdot \frac{35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3}{8} = \\ &= \frac{4}{15} - \frac{26}{21} \cdot \frac{r^2}{R^2} - \frac{36}{35} \cdot \frac{r^4}{R^4} + \left(\frac{78}{21} \cdot \frac{r^2}{R^2} + \frac{72}{7} \cdot \frac{r^4}{R^4} \right) \cos^2 \theta - 12 \cdot \frac{r^4}{R^4} \cos^4 \theta. \end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{4}{15} P_0(\cos \theta) + \frac{52}{21} \cdot \frac{r^2}{R^2} P_2(\cos \theta) - \frac{96}{35} \cdot \frac{r^4}{R^4} P_4(\cos \theta) = \\ &= \frac{4}{15} - \frac{26}{21} \cdot \frac{r^2}{R^2} - \frac{36}{35} \cdot \frac{r^4}{R^4} + \left(\frac{78}{21} \cdot \frac{r^2}{R^2} + \frac{72}{7} \cdot \frac{r^4}{R^4} \right) \cos^2 \theta - 12 \cdot \frac{r^4}{R^4} \cos^4 \theta, \end{aligned}$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

Проверка: при $r = R$ получаем:

$$u(R, \theta) = \frac{4}{15} - \frac{26}{21} - \frac{36}{35} + \left(\frac{78}{21} + \frac{72}{7} \right) \cos^2 \theta - 12 \cos^4 \theta = -2 + 14 \cos^2 \theta - 12 \cos^4 \theta \equiv f(\theta).$$

2.17. № 791 а)

Построить функцию $u(r, \theta)$, гармоническую вне шара радиуса R , и удовлетворяющую краевому условию:

$$u(R, \theta) = f(\theta) = 2 \cos \theta - \cos^2 \theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, \theta)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, & R < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta) = 2 \cos \theta - \cos^2 \theta. \end{cases} \quad (2.17.1)$$

Шаг 1. Решение в общем виде

Данная задача есть частный случай задачи, решённой нами в № 792 б). Воспользуемся результатом:

Общее решение внутренней задачи Дирихле, не зависящее от φ :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} f_n P_n(\cos \theta), \quad f_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.12.2)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

Поскольку данная нам функцию $f(\theta) = 2 \cos \theta - \cos^2 \theta$, как легко видеть, есть линейная комбинация полиномов $P_0(\cos \theta)$, $P_1(\cos \theta)$ и $P_2(\cos \theta)$:

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta \quad \text{и} \quad P_2(\cos \theta) = \left[\text{в силу формулы (2.1.10)} \right] = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2},$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\theta) = 2 \cos \theta - \cos^2 \theta &= 2 \cos \theta - \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} - \frac{1}{3} = \\ &= -\frac{1}{3} P_0(\cos \theta) + 2 P_1(\cos \theta) - \frac{2}{3} P_2(\cos \theta), \end{aligned}$$

то коэффициенты f_n можно найти сразу, не вычисляя интегралов:

$$f(\theta) = -\frac{1}{3} P_0(\cos \theta) + 2 P_1(\cos \theta) - \frac{2}{3} P_2(\cos \theta) \quad \Rightarrow \quad f_n = \begin{cases} -\frac{1}{3} & n = 0; \\ 2 & n = 1; \\ -\frac{2}{3} & n = 2; \\ 0 & n \geq 3. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{R}{r} P_0(\cos \theta) + 2 \cdot \frac{R^2}{r^2} P_1(\cos \theta) - \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3}{r^3} P_2(\cos \theta) = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{R}{r} + 2 \cdot \frac{R^2}{r^2} \cos \theta - \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{R}{r} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) + 2 \cdot \frac{R^2}{r^2} \cos \theta - \frac{R^3}{r^3} \cdot \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(r, \theta) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{R}{r} P_0(\cos \theta) + 2 \cdot \frac{R^2}{r^2} P_1(\cos \theta) - \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3}{r^3} P_2(\cos \theta) = \frac{1}{3} \cdot \frac{R}{r} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) + 2 \cdot \frac{R^2}{r^2} \cos \theta - \frac{R^3}{r^3} \cdot \cos^2 \theta,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.18. № 791 Б)

Построить функцию $u(r, \theta)$, гармоническую вне шара радиуса R , и удовлетворяющую краевому условию:

$$u(R, \theta) = f(\theta) = \cos^3 \theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, \theta)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, & R < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta) = \cos^3 \theta. \end{cases} \quad (2.18.1)$$

Шаг 1. Решение в общем виде

Данная задача есть частный случай задачи, решённой нами в № 792 б). Воспользуемся результатом:

Общее решение внутренней задачи Дирихле, не зависящее от φ :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} f_n P_n(\cos \theta), \quad f_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.12.2)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

Поскольку данная нам функцию $f(\theta) = \cos^3 \theta$, как легко видеть, есть линейная комбинация полиномов $P_1(\cos \theta)$ и $P_3(\cos \theta)$:

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta \quad \text{и} \quad P_3(\cos \theta) = \left[\text{в силу формулы (2.1.10)} \right] = \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2},$$

$$\Rightarrow f(\theta) = \cos^3 \theta = \frac{2}{5} \cdot \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2} + \frac{3}{5} \cos \theta = \frac{3}{5} P_1(\cos \theta) + \frac{2}{5} P_3(\cos \theta),$$

то коэффициенты f_n можно найти сразу, не вычисляя интегралов:

$$f(\theta) = \frac{3}{5} P_1(\cos \theta) + \frac{2}{5} P_3(\cos \theta) \quad \Rightarrow \quad f_n = \begin{cases} \frac{3}{5} & n = 1; \\ \frac{2}{5} & n = 3; \\ 0 & n = 0, \quad n = 2, \quad n \geq 4. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{R^2}{r^2} P_1(\cos \theta) + \frac{2}{5} \cdot \frac{R^4}{r^4} P_3(\cos \theta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{R^2}{r^2} \cos \theta + \frac{2}{5} \cdot \frac{R^4}{r^4} \cdot \frac{5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta}{2} = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{R^2}{r^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{R^4}{r^4} \cdot \cos^3 \theta. \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(r, \theta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{R^2}{r^2} P_1(\cos \theta) + \frac{2}{5} \cdot \frac{R^4}{r^4} P_3(\cos \theta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{R^2}{r^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{R^4}{r^4} \cdot \cos^3 \theta,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.19. № 791 в)

Построить функцию $u(r, \theta)$, гармоническую вне шара радиуса R , и удовлетворяющую краевому условию:

$$u(R, \theta) = f(\theta) = 3 + 2 \cos^2 \theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(r, \theta)$ из условий

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, & R < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta) = 3 + 2 \cos^2 \theta. \end{cases} \quad (2.19.1)$$

Шаг 1. Решение в общем виде

Данная задача есть частный случай задачи, решённой нами в № 792 б). Воспользуемся результатом:

Общее решение внутренней задачи Дирихле, не зависящее от φ :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} f_n P_n(\cos \theta), \quad f_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.12.2)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

Поскольку данная нам функцию $f(\theta) = 3 + 2 \cos^2 \theta$, как легко видеть, есть линейная комбинация полиномов $P_0(\cos \theta)$ и $P_2(\cos \theta)$:

$$\begin{aligned} P_0(\cos \theta) &= 1, \quad \text{и} \quad P_2(\cos \theta) = \left[\text{в силу формулы (2.1.10)} \right] = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}, \\ \Rightarrow f(\theta) &= 3 + 2 \cos^2 \theta = 3 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3} P_0(\cos \theta) + \frac{4}{3} P_2(\cos \theta), \end{aligned}$$

то коэффициенты f_n можно найти сразу, не вычисляя интегралов:

$$f(\theta) = \frac{11}{3} P_0(\cos \theta) + \frac{4}{3} P_2(\cos \theta) \quad \Rightarrow \quad f_n = \begin{cases} \frac{11}{3} & n = 0; \\ 0 & n = 1; \\ \frac{4}{3} & n = 2; \\ 0 & n \geq 3. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{11}{3} \cdot \frac{R}{r} P_0(\cos \theta) + \frac{4}{3} \cdot \frac{R^3}{r^3} P_2(\cos \theta) = \\ &= \frac{11}{3} \cdot \frac{R}{r} + \frac{4}{3} \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{R}{r} \left(11 - 2 \cdot \frac{R^2}{r^2} \right) + 2 \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Ответ:

$$u(r, \theta) = \frac{11}{3} \cdot \frac{R}{r} P_0(\cos \theta) + \frac{4}{3} \cdot \frac{R^3}{r^3} P_2(\cos \theta) = \frac{1}{3} \cdot \frac{R}{r} \left(11 - 2 \cdot \frac{R^2}{r^2} \right) + 2 \cdot \frac{R^3}{r^3} \cdot \cos^2 \theta,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (2.1.2).

2.20. № 794 б). Остывание шара

Найти ограниченную функцию $u(r, \theta, \varphi; t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t - a^2 \left(\frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} \right) = 0, \\ r \in [0, R), \quad \theta \in (0, \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad t > 0; \\ |u(0, \theta, \varphi; t)| < \infty, \\ \alpha u(R, \theta, \varphi; t) + \beta u_r(R, \theta, \varphi; t) = 0; \\ u(r, \theta, \varphi; 0) = \psi(r, \theta, \varphi). \end{cases} \quad (2.20.1)$$

Шаг 1. Решение уравнения с краевым условием, ограниченное в шаре

В результате предыдущего пункта, нам известно, что решение уравнения $u_t - a^2 \Delta u = 0$ с краевым условием $\alpha u(R, \theta, \varphi; t) + \beta u_r(R, \theta, \varphi; t) = 0$ задаётся формулами (2.8.25) и (2.8.22).

Учитывая, что функция $u(r, \theta, \varphi; t)$ должна быть ограничена при $r = 0$, а функции $J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right) = \underline{\underline{O}}\left(r^{k+\frac{1}{2}}\right)$ при $r \rightarrow +0$, получаем, что

$$c_{kn} = 0 \quad \text{при } k < 0.$$

Поэтому функция, удовлетворяющая первым трём равенствам из (2.20.1), должна иметь вид:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} e^{-\frac{\mu_{kn}^2}{R^2} t} \cdot \frac{J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^k (A_{km} \sin(m\varphi) + B_{km} \cos(m\varphi)) P_k^m(\cos \theta), \quad (2.20.2)$$

где μ_{kn} – положительные корни уравнения

$$\alpha R J_{k+\frac{1}{2}}(\mu) + \beta \mu J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu) = 0. \quad (2.20.3)$$

Шаг 2. Разложение функции граничного условия в ряд

Представим функцию начального условия $\psi(r, \theta, \varphi)$ в виде следующего ряда:

$$\sqrt{r} \psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kn} J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right) \sum_{m=0}^k (C_{km} \sin(m\varphi) + D_{km} \cos(m\varphi)) P_k^m(\cos \theta). \quad (2.20.4)$$

Введём обозначения:

$$\begin{cases} a_{knm} = r J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta \sin(m\varphi), \\ b_{knm} = r J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta \cos(m\varphi). \end{cases} \quad (2.20.5)$$

Домножив ряд (2.20.4) на

$$a_{ijl} = r J_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right) P_i^l(\cos \theta) \sin \theta \sin(l\varphi)$$

и проинтегрировав по $r \in (0, R)$, по $\theta \in (0, \pi)$ и по $\varphi \in (0, 2\pi)$, получим:

$$(\sqrt{r} \psi, a_{ijl}) = d_{ij} C_{il} \cdot \left\| J_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right) \right\|^2 \cdot \|P_i^l(x)\|^2 \cdot \|\sin(l\varphi)\|^2 \quad (2.20.6)$$

Аналогично, домножив ряд (2.20.4) на

$$b_{ijl} = r J_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right) P_i^l(\cos \theta) \sin \theta \cos(l\varphi)$$

и проинтегрировав по $r \in (0, R)$, по $\theta \in (0, \pi)$ и по $\varphi \in (0, 2\pi)$, получим:

$$(\sqrt{r} \psi, b_{ijl}) = d_{ij} D_{il} \cdot \left\| J_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right) \right\|^2 \cdot \|P_i^l(x)\|^2 \cdot \|\cos(l\varphi)\|^2 \quad (2.20.7)$$

В обеих формулах (2.20.6) и (2.20.7) присутствует одинаковый множитель

$$\gamma_{ijl} = \left\| J_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right) \right\|^2 \cdot \|P_i^l(x)\|^2 \cdot \|\cos(l\varphi)\|^2 = \left\| J_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right) \right\|^2 \cdot \|P_i^l(x)\|^2 \cdot \|\sin(l\varphi)\|^2.$$

Для нормы $\sin(l\varphi)$ и $\cos(l\varphi)$ легко получаются выражения

$$\|\sin(l\varphi)\|^2 = \|\cos(l\varphi)\|^2 = \begin{cases} \pi, & l \in \mathbb{N}; \\ 2\pi, & l = 0. \end{cases}$$

По формуле³ для интеграла Ломмеля 1.1.14, стр. 3,

$$\left\| J_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{ij} r}{R} \right) \right\|^2 = \frac{R^2}{2} \left[J'_{i+\frac{1}{2}} (\mu_{ij}) \right]^2 + \frac{1}{2} \left(R^2 - \frac{(i+\frac{1}{2})^2}{[\mu_{ij}]^2} \right) J_{i+\frac{1}{2}}^2 (\mu_{ij}).$$

Поскольку $\|P_i^m\|_{[-1,1]}^2 = \frac{2}{2i+1} \cdot \frac{(i+m)!}{(i-m)!}$ по формуле (2.1.18), стр. 185, то

$$\gamma_{ijl} = \begin{cases} \left[\frac{R^2}{2} \left[J'_{i+\frac{1}{2}} (\mu_{ij}) \right]^2 + \frac{1}{2} \left(R^2 - \frac{(i+\frac{1}{2})^2}{[\mu_{ij}]^2} \right) J_{i+\frac{1}{2}}^2 (\mu_{ij}) \right] \cdot \frac{2}{2i+1} \cdot \frac{(i+m)!}{(i-m)!} \cdot \pi, & l > 0; \\ \left[\frac{R^2}{2} \left[J'_{i+\frac{1}{2}} (\mu_{ij}) \right]^2 + \frac{1}{2} \left(R^2 - \frac{(i+\frac{1}{2})^2}{[\mu_{ij}]^2} \right) J_{i+\frac{1}{2}}^2 (\mu_{ij}) \right] \cdot \frac{2}{2i+1} \cdot 2\pi, & l = 0. \end{cases} \quad (2.20.8)$$

Таким образом, для коэффициентов d_{kn} , C_{km} и D_{km} разложения (2.20.4) мы, в силу (2.20.6) – (2.20.8), получаем:

$$\begin{cases} d_{kn} C_{km} = \frac{(\sqrt{r}\psi, a_{knm})}{\gamma_{knm}}, \\ d_{kn} D_{km} = \frac{(\sqrt{r}\psi, b_{knm})}{\gamma_{knm}}, \\ \gamma_{knm} = \begin{cases} \left[R^2 \left[J'_{k+\frac{1}{2}} (\mu_{kn}) \right]^2 + \left(R^2 - \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{[\mu_{kn}]^2} \right) J_{k+\frac{1}{2}}^2 (\mu_{kn}) \right] \cdot \frac{\pi}{2k+1} \cdot \frac{(k+m)!}{(k-m)!}, & m \in \mathbb{N}; \\ \left[R^2 \left[J'_{k+\frac{1}{2}} (\mu_{kn}) \right]^2 + \left(R^2 - \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{[\mu_{kn}]^2} \right) J_{k+\frac{1}{2}}^2 (\mu_{kn}) \right] \cdot \frac{2\pi}{2k+1}, & m = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.20.9)$$

Шаг 3. Использование начального условия

Приравняем ряд

$$u(r, \theta, \varphi; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} e^{-\frac{\mu_{kn}^2}{R^2} t} \cdot \frac{J_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{kn} r}{R} \right)}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^k (A_{km} \sin(m\varphi) + B_{km} \cos(m\varphi)) P_k^m(\cos \theta), \quad (2.20.2)$$

взятый при $t = 0$ к ряду

$$\sqrt{r}\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kn} J_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{kn} r}{R} \right) \sum_{m=0}^k (C_{km} \sin(m\varphi) + D_{km} \cos(m\varphi)) P_k^m(\cos \theta). \quad (2.20.4)$$

и получим, что для коэффициентов $c_{kn} A_{km}$ и $c_{kn} B_{km}$ выполнены равенства:

$$\begin{cases} c_{kn} A_{km} = d_{kn} C_{km} = \frac{(\sqrt{r}\psi, a_{knm})}{\gamma_{knm}}, \\ c_{kn} B_{km} = d_{kn} D_{km} = \frac{(\sqrt{r}\psi, b_{knm})}{\gamma_{knm}}, \\ \gamma_{knm} = \begin{cases} \left[R^2 \left[J'_{k+\frac{1}{2}} (\mu_{kn}) \right]^2 + \left(R^2 - \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{[\mu_{kn}]^2} \right) J_{k+\frac{1}{2}}^2 (\mu_{kn}) \right] \cdot \frac{\pi}{2k+1} \cdot \frac{(k+m)!}{(k-m)!}, & m \in \mathbb{N}; \\ \left[R^2 \left[J'_{k+\frac{1}{2}} (\mu_{kn}) \right]^2 + \left(R^2 - \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{[\mu_{kn}]^2} \right) J_{k+\frac{1}{2}}^2 (\mu_{kn}) \right] \cdot \frac{2\pi}{2k+1}, & m = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.20.10)$$

³Напомним, что квадратом нормы функций Бесселя является выражение

$$\left\| J_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{kn} r}{R} \right) \right\|^2 = \int_0^R r J_{k+\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{\mu_{kn} r}{R} \right) dr.$$

Отметим, что поскольку a_{knm} и b_{knm} можно представить в виде произведения

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{knm} = \underbrace{r J_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{kn} r}{R} \right)}_{=s_{kn}} \underbrace{P_k^m(\cos \theta) \sin \theta \sin(m\varphi)}_{=p_{km}} = s_{kn}(r) p_{km}(\theta, \varphi), \\ b_{knm} = \underbrace{r J_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{kn} r}{R} \right)}_{=s_{kn}} \underbrace{P_k^m(\cos \theta) \sin \theta \cos(m\varphi)}_{=q_{km}} = s_{kn}(r) q_{km}(\theta, \varphi), \\ \gamma_{knm} = \underbrace{\left[R^2 \left[J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn}) \right]^2 + \left(R^2 - \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{[\mu_{kn}]^2} \right) J_{k+\frac{1}{2}}^2(\mu_{kn}) \right]}_{=\zeta_{kn}} \cdot \underbrace{\frac{\pi}{2k+1} \cdot \frac{(k+m)!}{(k-m)!}}_{=\xi_{kn}} = \zeta_{kn} \xi_{km}, \end{array} \right.$$

то равенства (2.20.10) позволяют однозначно определить коэффициенты c_{kn} , A_{km} и B_{km} .

Ответ:

$$u(r, \theta, \varphi; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} e^{-\frac{\mu_{kn}^2}{R^2} t} \cdot \frac{J_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{kn} r}{R} \right)}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^k (A_{km} \sin(m\varphi) + B_{km} \cos(m\varphi)) P_k^m(\cos \theta), \quad (2.20.2)$$

где μ_{kn} – положительные корни уравнения

$$\alpha R J_{k+\frac{1}{2}}(\mu) + \beta \mu J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu) = 0, \quad (2.20.3)$$

а коэффициенты $c_{kn} A_{km}$ и $c_{kn} B_{km}$ находятся из формул

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{kn} A_{km} = \frac{1}{\gamma_{knm}} \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^{\frac{3}{2}} \psi(r, \theta, \varphi) J_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{kn} r}{R} \right) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta \sin(m\varphi), \\ c_{kn} B_{km} = \frac{1}{\gamma_{knm}} \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^{\frac{3}{2}} \psi(r, \theta, \varphi) J_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_{kn} r}{R} \right) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta \cos(m\varphi), \\ \gamma_{knm} = \begin{cases} \left[R^2 \left[J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn}) \right]^2 + \left(R^2 - \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{[\mu_{kn}]^2} \right) J_{k+\frac{1}{2}}^2(\mu_{kn}) \right] \cdot \frac{\pi}{2k+1} \cdot \frac{(k+m)!}{(k-m)!}, & m \in \mathbb{N}; \\ \left[R^2 \left[J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn}) \right]^2 + \left(R^2 - \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{[\mu_{kn}]^2} \right) J_{k+\frac{1}{2}}^2(\mu_{kn}) \right] \cdot \frac{2\pi}{2k+1}, & m = 0. \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.20.11)$$

Глава 3.

Подробно о цилиндрических функциях

3.1. Функции Бесселя

3.1.1. Определение и взаимосвязь цилиндрических функций

Опр. 3.1.1. Уравнение

$$x^2 \mathbf{Z}''(x) + x \mathbf{Z}'(x) + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Z}(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3.1.1)$$

называется **уравнением Бесселя**.

Всякое решение уравнения Бесселя называется цилиндрической функцией.

Опр. 3.1.2. Функция

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (3.1.2)$$

называется **функцией Бесселя порядка ν** . Она является решением уравнения Бесселя (3.1.1).

Есть и другие цилиндрические функции.

Опр. 3.1.3. Функции Неймана:

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin(\pi\nu)} [J_\nu(x) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)], \quad \nu \notin \mathbb{Z}; \quad (3.1.3)$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.4)$$

Функции Ханкеля I-го рода и II-го рода:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \quad (3.1.5)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \quad (3.1.6)$$

Модифицированные функции Бесселя и Ханкеля:

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi i}{2}\nu} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = e^{\frac{\pi i}{2}\nu} H_\nu^{(1)}(ix). \quad (3.1.7)$$

Теорема 3.1.1.

Утв. Фундаментальную систему решений (ФСР) уравнения Бесселя (3.1.1) образует каждая из пар функций:

$$\begin{aligned} &\{J_\nu(x), N_\nu(x)\}, \quad \{H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)\} \\ &\text{и, в случае, когда } \nu \notin \mathbb{Z} \quad \{J_\nu(x), J_{-\nu}(x)\} \\ &\quad (\text{при } n \in \mathbb{Z} \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n) \end{aligned}$$

Следствие 3.1.1.

Утв. Общее решение уравнения Бесселя (3.1.1) задаётся каждой из формул

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x) = c_3 H_\nu^{(1)}(x) + c_4 H_\nu^{(2)}(x), \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_5 J_\nu(x) + c_6 J_{-\nu}(x) \quad \nu \notin \mathbb{Z}.$$

3.1.2. Рекуррентные формулы для цилиндрических функций

Для функций Бесселя и Неймана имеют место следующие рекуррентные формулы¹:

$$\mathbf{Z}'_\nu(x) = \mathbf{Z}_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} \mathbf{Z}_\nu(x), \quad \mathbf{Z}'_\nu(x) = -\mathbf{Z}_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} \mathbf{Z}_\nu(x). \quad (3.1.8)$$

Их можно также переписать в виде:

$$[x^\nu \mathbf{Z}_\nu]'(x) = x^\nu \mathbf{Z}_{\nu-1}(x), \quad [x^{-\nu} \mathbf{Z}_\nu]'(x) = -x^{-\nu} \mathbf{Z}_{\nu+1}(x). \quad (3.1.9)$$

¹см. [1], стр. 56, 79. Отметим, что в этой книге функции Неймана обозначаются как $\mathbf{Y}_\nu$, или, точнее $N_\nu(x) = \operatorname{Re} \mathbf{Y}_\nu(z) \Big|_{z=x}$. Определение $\mathbf{Y}_\nu$ см. [1], стр. 76.

Если из второй формулы (3.1.8) вычесть первую, получим ещё одно соотношение:

$$\mathbf{Z}_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x}\mathbf{Z}_{\nu}(x) + \mathbf{Z}_{\nu-1}(x) = 0. \quad (3.1.10)$$

Для функций Бесселя и Неймана с целочисленным порядком $\nu = n \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$\mathbf{Z}_{-n}(x) = (-1)^n \mathbf{Z}_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.11)$$

Кроме приведённых формул, нам также понадобится соотношение, из которого частично следует утверждение теоремы 3.1.1.

Утверждение 3.1.1 (Вронскиан функций Бесселя и Неймана).

Утв.

$$W[J_{\nu}, N_{\nu}](x) = \begin{vmatrix} J_{\nu}(x) & N_{\nu}(x) \\ J'_{\nu}(x) & N'_{\nu}(x) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi x} \quad (3.1.12)$$

3.1.3. Интегральные формулы для функций Бесселя

Имеют место следующие интегральные формулы:

Интегралы Ломмеля:

$$\int_0^x t J_{\nu}(\alpha t) J_{\nu}(\beta t) dt = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\alpha J_{\nu+1}(\alpha x) J_{\nu}(\beta x) - \beta J_{\nu}(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x) \right), \quad \alpha \neq \beta, \quad (3.1.13)$$

$$\int_0^x t \left(J_{\nu}(\alpha t) \right)^2 dt = \frac{x^2}{2} \left(\alpha J'_{\nu}(\alpha x) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2} \right) \left(J_{\nu}(\alpha x) \right)^2, \quad \nu > -1. \quad (3.1.14)$$

Ниже в пунктах 3. и 2. доказательства теоремы 3.1.11 будут выведены более общие формулы

$$\int_a^b r \mathbf{Z}(\mu_k r) \mathbf{Z}(\mu_m r) dr = \frac{r \left(\mu_k \mathbf{Z}(\mu_m r) \mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m \mathbf{Z}(\mu_k r) \mathbf{Z}'(\mu_m r) \right) \Big|_a^b}{\mu_m^2 - \mu_k^2}, \quad (3.1.15)$$

$$\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2 = \int_a^b r \mathbf{Z}(\mu r) dr = \frac{1}{2} \left[\left(r^2 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) \mathbf{Z}^2(\mu r) \Big|_{r=a}^{r=b} + r^2 (\mathbf{Z}')^2(\mu r) \Big|_{r=a}^{r=b} \right]. \quad (3.1.16)$$

где $\mathbf{Z}(x)$ – произвольные решения уравнения Бесселя

$$(x \mathbf{Z}')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x} \right) \mathbf{Z} = 0.$$

3.1.4. Поведение функций Бесселя и Неймана

Приведём для примера функции $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$. Из определения 3.1.2 получаем:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+0+1)k!} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[(2k)!!]^2} \cdot x^{2k}.$$

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1+1)k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!!(2k)!!} \cdot x^{2k+1}.$$

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2} + 1\right) k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \left[\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k+1}}{2^{2k}(2k+1)!!k!} \cdot x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!(2k)!!} \cdot x^{2k+1} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x. \end{aligned}$$

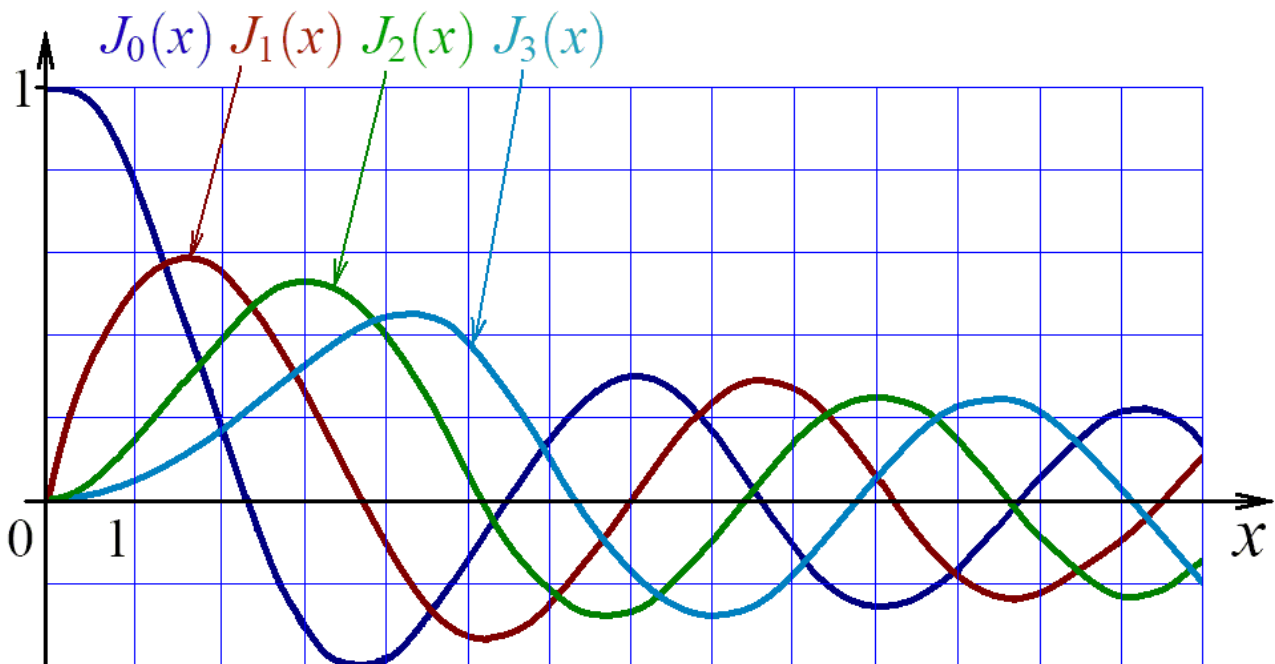
$$\begin{aligned} J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(k - \frac{1}{2} + 1\right) k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} = \left[\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{2^{2k}(2k-1)!!k!} \cdot x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!!(2k)!!} \cdot x^{2k} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x. \end{aligned}$$

А применив к найденным $J_{\pm \frac{1}{2}}(x)$ формулы (3.1.8), получим:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{x dx} \right)^n \frac{\sin x}{x},$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{x dx} \right)^n \frac{\cos x}{x}.$$

На рисунке ниже приведены графики функций $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ и $J_3(x)$.



Заметим, что

$$J_0(0) = 1, \quad J_1(0) = 0.$$

Поэтому иногда говорят, что $J_0(x)$ есть аналог $\cos x$, а $J_1(x)$ – аналог $\sin x$, только $\sin x$ и $\cos x$ – решения уравнения

$$\mathbf{Z}''(x) + \mathbf{Z}(x) = 0,$$

в то время как функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ – решения уравнений

$$x^2 \mathbf{Z}''(x) + x \mathbf{Z}'(x) + x^2 \mathbf{Z}(x) = 0$$

и

$$x^2 \mathbf{Z}''(x) + x \mathbf{Z}'(x) + (x^2 - 1) \mathbf{Z}(x) = 0.$$

Поскольку $J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x$, а $J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x$, функции $J_{\pm \frac{1}{2}}$ в окрестности нуля ведут себя следующим образом:

$$J_{\frac{1}{2}}(+0) = 0, \quad J_{-\frac{1}{2}}(+0) = +\infty.$$

Известно асимптотическое поведение функций Бесселя при $x \rightarrow +\infty$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \underline{\underline{O}}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Теорема 3.1.2 (Поведение в окрестности нуля).

Утв.

$$J_\nu(+0) = \begin{cases} \infty, & \nu < 0, \quad \nu \notin \mathbb{Z}; \\ 0, & \nu < 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}; \\ 1, & \nu = 0; \\ 0, & \nu > 0; \end{cases} \quad N_\nu(+0) = \infty, \quad \nu \in \mathbb{R}; .$$

Доказательство. При $\nu > -1$ по формуле (3.1.2) функция $J_\nu(x) = \underline{\underline{O}}(x^\nu)$, $x \rightarrow +0$. Отсюда следуют соотношения

$$J_\nu(+0) = \begin{cases} \infty, & -1 < \nu < 0; \\ 1, & \nu = 0; \\ 0, & \nu > 0. \end{cases}$$

Из формулы (3.1.10) следует, что при $\nu \in (-2, -1)$

$$J_\nu = \frac{2(\nu+1)}{x} J_{\nu+1} - J_{\nu+2} = \underline{\underline{O}}(x^\nu), \quad x \rightarrow +0.$$

Аналогично, при $\nu \in (-3, -2)$

$$J_\nu = \underline{\underline{O}}(x^\nu), \quad x \rightarrow +0$$

и так далее. Поэтому, справедливо соотношение

$$J_\nu(+0) = \infty, \quad \nu < 0, \quad \nu \notin \mathbb{Z}.$$

Соотношение $J_\nu(+0) = 0$, $\nu < 0$, $\nu \in \mathbb{Z}$ сразу следует из формулы (3.1.11)

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}$$

и доказанного $J_\nu(+0) = 0$ при $\nu > 0$.

Перейдём к формуле $N_\nu(+0) = \infty$, $\nu \in \mathbb{R}$, $x \rightarrow +0$.

Пусть сначала $\nu \notin \mathbb{Z}$. Тогда из представления (3.1.3)

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin(\pi\nu)} [J_\nu(x) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)], \quad \nu \notin \mathbb{Z}$$

следует, что при

$$\begin{aligned} \nu > 0 &\implies N_\nu(x) = \underline{\underline{O}}(x^{-\nu}), & x \rightarrow +0, \\ \nu < 0 &\implies N_\nu(x) = \underline{\underline{O}}(x^\nu), & x \rightarrow +0. \end{aligned}$$

В обоих случаях $N_\nu(+0) = \infty$, $x \rightarrow +0$.

Формулу $N_n(+0) = \infty$, $n \in \mathbb{Z}$ докажем при помощи представления

$$\begin{aligned} N_n(x) = (-1)^n N_{-n}(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{n+k} \frac{1}{j} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

При $n = 0$ получаем, что главное слагаемое – первое, и

$$N_0(x) = \underline{\underline{O}}(\ln x), \quad x \rightarrow +0, \implies N_0(+0) = \infty.$$

При $n \in \mathbb{N}$ главное слагаемое – третье, откуда

$$N_n(x) = \underline{\underline{O}}(x^{-n}), \quad x \rightarrow +0, \implies N_n(+0) = \infty.$$

При $(-n) \in \mathbb{N}$ используем равенство $N_n(x) = (-1)^n N_{-n}(x)$ и доказанное соотношение для натуральных n . $\square$

3.1.5. Скалярное произведение, ортогональность и норма функций Бесселя

Опр. 3.1.4. Скалярным произведением на пространстве решений уравнения Бесселя мы будем называть следующее скалярное произведение в L_2 с весом x :

$$(u, v) = \int_0^1 x u(x) v(x) dx. \quad (3.1.17)$$

Функции, скалярное произведение которых равно нулю, мы будем называть **ортогональными**.

Нормой функции $u(x)$ мы будем называть число

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\int_0^1 x u^2(x) dx}. \quad (3.1.18)$$

Теорема 3.1.3.

Усл. Число $\nu > -1$, а числа μ_1 и μ_2 – действительные корни уравнения

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta J'_\nu(\mu) = 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0.$$

Утв. Функции $J_\nu(\mu_1 x)$ и $J_\nu(\mu_2 x)$ ортогональны

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = 0, \quad \mu_1 \neq \mu_2,$$

$$\|J_\nu(\mu_1 x)\|^2 \equiv \int_0^1 x J_\nu^2(\mu_1 x) dx = \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu^2(\mu_1).$$

Теорема 3.1.4 (Аналог теоремы В.А. Стеклова).

Усл. Функция $u(x) \in C^2(0, 1]$ удовлетворяет граничным условиям

$$|u(+0)| < \infty; \quad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0$$

и при $L_\nu(u) \equiv -(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u$ функция $\frac{L_\nu(u)}{\sqrt{x}} \in L_2(0, 1)$.

Утв. 1. Функция $\sqrt{x} u(x)$ разлагается в ряд Фурье на интервале $(0, 1)$

$$\sqrt{x} u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\nu \sqrt{x} J_\nu(\mu_k^\nu x),$$

$$a_k^\nu = \frac{(u, J_\nu(\mu_k^\nu x))}{\|J_\nu(\mu_k^\nu x)\|^2} = \frac{(u, J_\nu(\mu_k^\nu x))}{\frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_k^\nu)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{[\mu_k^\nu]^2}\right) J_\nu^2(\mu_k^\nu)}$$

Утв. 2. В случае $\alpha = \nu = 0$, функция $\sqrt{x} u(x)$ разлагается в ряд Фурье на интервале $(0, 1)$

$$\sqrt{x} u(x) = a_0 \sqrt{x} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{x} J_0(\mu_k x), \quad (3.1.19)$$

$$a_0^0 = 2 \int_0^1 x u(x) dx, \quad a_k^0 = \frac{2}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int_0^1 x u(x) J_0(\mu_k x) dx.$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

3.1.6. Задачи Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0, 1]$

Опр. 3.1.5. Через M мы будем обозначать следующий класс функций:

$$u(x) \in C^2(0, 1]; \quad \frac{L_\nu(u)}{\sqrt{x}} \in L_2(0, 1).$$

Задачей Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0, 1]$ мы будем называть задачу:

Найти числа λ и функции $0 \neq u(x) \in M$ из условий:

$$\begin{cases} -(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda xu, & x \in (0, 1), \quad \nu \geq 0; \\ |u(+0)| < \infty; \\ \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, & \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0. \end{cases} \quad (3.1.20)$$

При этом функции $u \neq 0$ называются **собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля**, а числа λ – **собственными числами задачи Штурма-Лиувилля**.

Оператор левой части уравнения задачи Штурма-Лиувилля мы будем обозначать так:

$$L_\nu(u) \equiv -(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u.$$

Теорема 3.1.5.

Утв.1. Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1.

Утв.2. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv \text{const.}$

Теорема 3.1.6.

Утв. Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\mu_k^{(\nu)} \right]^2, \quad J_\nu \left(\mu_k^{(\nu)} x \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

Доказательство.

Во первых, поскольку функции $J_\nu(x)$ – есть решения уравнения

$$x^2 J''(x) + x J'(x) + (x^2 - \nu^2) J(x) = 0,$$

то функции $J_\nu(\mu x)$ – есть решения уравнения

$$x^2 J''(\mu x) + x J'(\mu x) + (\mu^2 x^2 - \nu^2) J(\mu x) = 0.$$

Поделим его на $(-x)$ и перенесём слагаемое $(-\mu^2 x J(\mu x))$ в правую часть:

$$-x J''(\mu x) - J'(\mu x) + \frac{\nu^2}{x} J(\mu x) = \mu^2 x J(\mu x).$$

Объединив 2 первых слагаемых, получим:

$$-(xJ'(\mu x))' + \frac{\nu^2}{x}J(\mu x) = \mu^2 xJ(\mu x).$$

Таким образом, функция $J_\nu(\mu x)$ есть решение уравнения $-(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda xu$ с собственным значением $\lambda = \mu^2$.

Во-вторых, покажем, что $J_\nu(\mu x)$ удовлетворяет первому краевому условию. Поскольку, по определению 3.1.2, при $\nu > -1$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

то

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} x^\nu + \underline{O}(x^{2+\nu}) = \underline{O}(x^\nu), \quad x \rightarrow +0.$$

В-третьих, покажем, что $J_\nu(\mu x)$ удовлетворяет второму краевому условию. Поскольку то, что μ_0 удовлетворяет уравнению

$$\alpha J_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J'_\nu(\mu_0) = 0,$$

равносильно условию (достаточно сделать замену переменной $y = \mu x$)

$$\left(\alpha J_\nu(y) + \beta J'_\nu(y) \right) \Big|_{y=\mu_0} = 0,$$

то Каждая из функций $J_\nu(\mu x)$ удовлетворяет второму краевому условию $\alpha u(1) + \beta u'(1) = 0$.

Таким образом, все функции $J_\nu\left(\mu_k^{(\nu)}x\right)$ являются решениями задачи (3.1.23) с соответствующими собственными значениями $\mu_k^{(\nu)}$.

Осталось убедиться, что **каждое** решение задачи (3.1.23) есть функция $J_\nu\left(\mu_k^{(\nu)}x\right)$, где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения $\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0$.

Общее решение уравнения $x^2 \mathbf{Z}''(x) + x \mathbf{Z}'(x) + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Z}(x) = 0$ по следствию 3.1.1 (стр. 230), имеет вид

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x), \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Поэтому общее решение уравнения $-(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \mu^2 xu^2$ в силу рассуждений в начале данного доказательства, имеет вид

$$u_\nu(x) = c_1 J_\nu(\mu x) + c_2 N_\nu(\mu x), \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

При этом функции $N_\nu(+0) = \infty$ (см. теорему 3.1.2, стр. 233). Следовательно, решение задачи (3.1.23), в силу первого краевого условия может иметь вид только

$$u_\nu(x) = c_1 J_\nu(\mu x).$$

Наконец, подставляя $J_\nu(\mu x)$ во второе краевое условие

$$\alpha u(1) + \beta u'(1) = 0,$$

получаем, что

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta J'_\nu(\mu) = 0.$$

□

²Мы рассматриваем только $\lambda = \mu^2 \geq 0$, поскольку в силу теоремы 3.1.5, отрицательных собственных значений задача Штурма-Лиувилля (3.1.23) не имеет.

3.1.7. Задачи Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0, R]$

Переформулируем основные для наших нужд теоремы для отрезка не единичной длины. Для этого сделаем замену переменной $x = \frac{r}{R}$, $r \in (0, R)$. Тогда для функции $\varphi(r) \equiv u\left(\frac{r}{R}\right)$ справедлива теорема:

Теорема 3.1.7.

Утв. 1. Функция $\sqrt{r} \varphi(r)$ разлагается в ряд Фурье на интервале $(0, R)$

$$\sqrt{r} \varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\nu} \sqrt{r} J_{\nu} \left(\frac{\mu_k^{\nu} r}{R} \right), \quad (3.1.21)$$

$$\alpha_k^{\nu} = \frac{1}{\frac{1}{2} [J'_{\nu}(\mu_k^{\nu})]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{[\mu_k^{\nu}]^2} \right) J_{\nu}^2(\mu_k^{\nu})} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_{\nu} \left(\frac{\mu_k^{\nu} r}{R} \right) dr,$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – положительные корни уравнения

$$\alpha R J_{\nu}(\mu) + \beta \mu J'_{\nu}(\mu) = 0.$$

Утв. 2. В случае $\alpha = \nu = 0$, функция $\sqrt{r} \varphi(r)$ разлагается в ряд Фурье на интервале $(0, R)$

$$\sqrt{r} \varphi(r) = \alpha_0^0 \sqrt{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \sqrt{r} J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right), \quad (3.1.22)$$

$$\alpha_0^0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \varphi(r) dr, \quad \alpha_k^0 = \frac{2}{\underbrace{[J_1(\mu_k)]^2}_{=0} + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\mu_k r}{R} \right) dr.$$

где μ_k – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

Опр. 3.1.6. Через M мы будем обозначать следующий класс функций:

$$u(r) \in C^2(0, R]; \quad \frac{L_{\nu}(u)}{\sqrt{r}} \in L_2(0, R).$$

Опр. 3.1.7. Задачей Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0, R]$ мы будем называть задачу: Найти числа λ и функции $0 \not\equiv u(r) \in M$ из условий:

$$\begin{cases} -(ru')' + \frac{\nu^2}{r} u = \lambda r u, & r \in (0, R), \quad \nu \geq 0; \\ |u(+0)| < \infty; \\ \alpha u(R) + \beta u'(R) = 0, & \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0. \end{cases} \quad (3.1.23)$$

При этом функции $u \not\equiv 0$ называются **собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля**, а числа λ – **собственными числами задачи Штурма-Лиувилля**.

Оператор левой части уравнения задачи Штурма-Лиувилля мы будем обозначать так:

$$L_{\nu}(u) \equiv -(ru')' + \frac{\nu^2}{r} u.$$

Теорема 3.1.8.

Утв.1. Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1.

Утв.2. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(r) \equiv \text{const}$.

Теорема 3.1.9.

Утв. Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – положительные корни уравнения

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

Доказательство.

В уравнении $-(ru')' + \frac{\nu^2}{r}u = \lambda ru$ сделаем замену переменной

$$r = Rx, \quad u(r) = u(Rx) = w(x).$$

Тогда

$$u'(r) = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \frac{w'(x)}{R}, \quad u''(r) = \frac{d(Rw'(x))}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \frac{w''(x)}{R^2},$$

откуда

$$(ru')' = ru''(r) + u'(r) = Rx \cdot \frac{w''(x)}{R^2} + \frac{w'(x)}{R} \equiv \frac{(xw')'}{R}.$$

Получим уравнение

$$-(xw')' + \frac{\nu^2}{x}w = \underbrace{(\lambda R^2)}_{\tilde{\lambda}} xw. \quad (3.1.24)$$

Краевое условие $|u(+0)| < \infty$ превратится в

$$|w(+0)| < \infty, \quad (3.1.25)$$

а краевое условие $\alpha u(R) + \beta u'(R) = 0$ примет вид

$$\alpha w(1) + \frac{\beta}{R} w'(1) = 0. \quad (3.1.26)$$

По теореме 3.1.6, задача (3.1.24) – (3.1.26) имеет следующие собственные числа и функции:

$$\tilde{\lambda}_k^{(\nu)} = \left[\mu_k^{(\nu)} \right]^2, \quad \lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R} \right]^2, \quad J_\nu \left(\mu_k^{(\nu)} x \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения

$$\alpha J_\nu(\mu) + \frac{\beta}{R} \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

Делая во всех этих выражениях обраную замену переменной и функции

$$x = \frac{r}{R}, \quad w(x) = u(r), \quad u'(r) = \frac{w'(x)}{R},$$

получаем требуемое утверждение. □

3.1.8. Задачи Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[a, b]$

Теорема 3.1.10 (Аналог теоремы В.А. Стеклова).

Усл. $\{\mathbf{Z}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

Утв. $\forall f(x) \in C^2[a, b]$, удовлетворяющей краевым условиям, $\exists \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{Z}_k(x),$$

причём последний ряд сходится к $f(x)$ абсолютно и равномерно на $[a, b]$, а для c_k верно представление

$$c_k = \frac{(f, \mathbf{Z}_k)}{\|\mathbf{Z}_k\|^2} = \frac{\int_a^b x f(x) \mathbf{Z}_k(x) dx}{\int_a^b x \mathbf{Z}_k^2(x) dx}.$$

Теорема 3.1.11.

Усл. Функция $\mathbf{Z}(x)$ есть решение на промежутке $x \in (a, b)$ уравнения

$$x^2 \mathbf{Z}'' + x \mathbf{Z}' + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Z} = 0.$$

μ_k – положительные решения уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 J_\nu(\mu a) + \beta_1 \mu J'_\nu(\mu a) & \alpha_1 N_\nu(\mu a) + \beta_1 \mu N'_\nu(\mu a) \\ \alpha_2 J_\nu(\mu b) + \beta_2 \mu J'_\nu(\mu b) & \alpha_2 N_\nu(\mu b) + \beta_2 \mu N'_\nu(\mu b) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.1.27)$$

Утв. 1 Каждая из функций $\mathbf{X}_k(r) = \mathbf{Z}(\mu_k r)$, $k = \overline{1, \infty}$ является решением задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} -(r \mathbf{X}'_k(r))' + \frac{\nu^2}{r} \mathbf{X}_k(r) = \mu_k^2 r \mathbf{X}_k(r), & a < r < b; \\ \alpha_1 \mathbf{X}_k(a) + \beta_1 \mathbf{X}'_k(a) = 0, \\ \alpha_2 \mathbf{X}_k(b) + \beta_2 \mathbf{X}'_k(b) = 0. \end{cases} \quad (3.1.28)$$

При этом функция $\mathbf{X}_k(r)$ имеет вид

$$\mathbf{X}_k(r) = \left(\alpha_1 N_\nu(\mu_k a) + \beta_1 \mu_k N'_\nu(\mu_k a) \right) J_\nu(\mu_k r) - \left(\alpha_1 J_\nu(\mu_k a) + \beta_1 \mu_k J'_\nu(\mu_k a) \right) N_\nu(\mu_k r).$$

Утв. 2

$$\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2 = \int_a^b r \mathbf{Z}^2(\mu r) dr = \frac{1}{2} \left[\left(r^2 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) \mathbf{Z}^2(\mu r) \Big|_{r=a}^{r=b} + r^2 (\mathbf{Z}')^2(\mu r) \Big|_{r=a}^{r=b} \right].$$

Утв. 3

$$\left(\mathbf{Z}(\mu_k r), \mathbf{Z}(\mu_m r) \right) = 0, \quad k \neq m.$$

Доказательство.

1.а) Проверим выполнение уравнения. В силу соотношений $\mathbf{X}_k(r) = \mathbf{Z}(\mu_k r)$, $x = \mu_k r$

$$\mathbf{X}'_k(r) = \mu_k \mathbf{Z}'(\mu_k r), \quad \mathbf{X}''_k(r) = \mu_k^2 \mathbf{Z}''(\mu_k r)$$

и, подставляя эти выражения в уравнение $-(r \mathbf{X}'_k(r))' + \frac{\nu^2}{r} \mathbf{X}_k(r) = \mu_k^2 r \mathbf{X}_k(r)$, то есть

$$-r \mathbf{X}''_k(r) - \mathbf{X}'_k(r) + \frac{\nu^2}{r} \mathbf{X}_k(r) = \mu_k^2 r \mathbf{X}_k(r),$$

получаем:

$$-\frac{x}{\mu_k} \cdot \mu_k^2 \mathbf{Z}''_k(x) - \mu_k \mathbf{Z}'_k(x) + \frac{\mu_k \nu^2}{x} \mathbf{Z}_k(x) = \mu_k^2 \cdot \frac{x}{\mu_k} \mathbf{Z}_k(x).$$

Домножив это равенство на $\frac{x}{\mu_k}$, получим, что все $\mathbf{Z}_k(x)$ удовлетворяют уравнению

$$x^2 \mathbf{Z}''_k + x \mathbf{Z}'_k + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Z}_k = 0, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Поскольку проделанные операции обратимы, то все функции $\mathbf{X}_k(r) = \mathbf{Z}(\mu_k r)$ $k = \overline{1, \infty}$ есть решения уравнения из задачи Штурма–Лиувилля (3.1.28).

1.б) Поскольку общее решение уравнения Бесселя есть линейная комбинация

$$\mathbf{Z}(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x),$$

то выполнение краевых условий $\alpha_1 \mathbf{X}_k(a) + \beta_1 \mathbf{X}'_k(a) = 0$ и $\alpha_2 \mathbf{X}_k(b) + \beta_2 \mathbf{X}'_k(b) = 0$ означает

$$\begin{cases} c_1 (\alpha_1 J_\nu(\mu a) + \beta_1 \mu J'_\nu(\mu a)) + c_2 (\alpha_1 N_\nu(\mu a) + \beta_1 \mu N'_\nu(\mu a)) = 0 \\ c_1 (\alpha_2 J_\nu(\mu b) + \beta_2 \mu J'_\nu(\mu b)) + c_2 (\alpha_2 N_\nu(\mu b) + \beta_2 \mu N'_\nu(\mu b)) = 0 \end{cases}$$

То есть, в матричном виде,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 J_\nu(\mu a) + \beta_1 \mu J'_\nu(\mu a) & \alpha_1 N_\nu(\mu a) + \beta_1 \mu N'_\nu(\mu a) \\ \alpha_2 J_\nu(\mu b) + \beta_2 \mu J'_\nu(\mu b) & \alpha_2 N_\nu(\mu b) + \beta_2 \mu N'_\nu(\mu b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.29)$$

Отсюда, если нас интересуют нетривиальные решения задачи Штурма–Лиувилля (3.1.28), то матрица этой системы обязана быть вырождена, то есть нетривиальные решения задачи Штурма–Лиувилля существуют тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 J_\nu(\mu a) + \beta_1 \mu J'_\nu(\mu a) & \alpha_1 N_\nu(\mu a) + \beta_1 \mu N'_\nu(\mu a) \\ \alpha_2 J_\nu(\mu b) + \beta_2 \mu J'_\nu(\mu b) & \alpha_2 N_\nu(\mu b) + \beta_2 \mu N'_\nu(\mu b) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.1.27)$$

Тогда решением системы (3.1.29) будет (с точностью до постоянного множителя) пара

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 N_\nu(\mu a) + \beta_1 \mu N'_\nu(\mu a) \\ -\alpha_1 J_\nu(\mu a) - \beta_1 \mu J'_\nu(\mu a) \end{pmatrix} \quad (3.1.30)$$

При этом функция $\mathbf{X}_k(r)$ имеет вид

$$\mathbf{X}_k(r) = \left(\alpha_1 N_\nu(\mu_k a) + \beta_1 \mu_k N'_\nu(\mu_k a) \right) J_\nu(\mu_k r) - \left(\alpha_1 J_\nu(\mu_k a) + \beta_1 \mu_k J'_\nu(\mu_k a) \right) N_\nu(\mu_k r).$$

2. Найдём норму $\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2$. Для этого домножим уравнение

$$x^2 \mathbf{Z}'' + x \mathbf{Z}' + (x^2 - \nu^2) \mathbf{Z} = 0$$

на $2\mathbf{Z}'$ и проинтегрируем по $[a, b]$. Получим:

$$2 \int_a^b x^2 \mathbf{Z}'' \mathbf{Z}' dx + 2 \int_a^b x (\mathbf{Z}')^2 dx + 2 \int_a^b x^2 \mathbf{Z} \mathbf{Z}' dx - 2 \int_a^b \nu^2 \mathbf{Z} \mathbf{Z}' dx = 0.$$

Это равенство перепишем в виде

$$\int_a^b x^2 [(\mathbf{Z}')^2]' dx + 2 \int_a^b x (\mathbf{Z}')^2 dx + \int_a^b x^2 [\mathbf{Z}^2]' dx - \nu^2 \int_a^b [\mathbf{Z}^2]' dx = 0.$$

Первый и третий интегралы проинтегрируем по частям, а последний просто возьмём:

$$\left(x^2 (\mathbf{Z}')^2 \Big|_a^b - 2 \int_a^b x (\mathbf{Z}')^2 dx \right) + 2 \int_a^b x (\mathbf{Z}')^2 dx + \left(x^2 \mathbf{Z}^2 \Big|_a^b - 2 \int_a^b x \mathbf{Z}^2 dx \right) - \nu^2 \mathbf{Z}^2 \Big|_a^b = 0$$

Сокращая выделенные интегралы и выражая $\int_a^b x \mathbf{Z}^2 dx$, получим формулу

$$\int_a^b x \mathbf{Z}^2 dx = \frac{1}{2} \left[(x^2 - \nu^2) \mathbf{Z}^2(x) \Big|_{x=a}^{x=b} + x^2 (\mathbf{Z}')^2(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right].$$

Осталось сделать замену переменной $x = \mu r$, а пределы интеграла $\tilde{a} = \frac{a}{\mu}$ и $\tilde{b} = \frac{b}{\mu}$ снова обозначить за a и b , и мы получим требуемую формулу

$$\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2 = \int_a^b r \mathbf{Z}(\mu r) dr = \frac{1}{2} \left[\left(r^2 - \frac{\nu^2}{\mu^2} \right) \mathbf{Z}^2(\mu r) \right]_{r=a}^{r=b} + r^2 (\mathbf{Z}')^2(\mu r) \Big|_{r=a}^{r=b}. \quad (3.1.16)$$

3. Проверим ортогональность $(\mathbf{Z}(\mu_k r), \mathbf{Z}(\mu_m r)) = 0$, $k \neq m$. Для этого домножим на $\mathbf{X}_m(r)$ уравнение

$$(r \mathbf{X}'_k)' + \left(\mu_k^2 r - \frac{\nu^2}{r} \right) \mathbf{X}_k = 0,$$

домножим на $\mathbf{X}_k(r)$ уравнение

$$(r \mathbf{X}'_m)' + \left(\mu_m^2 r - \frac{\nu^2}{r} \right) \mathbf{X}_m = 0$$

и вычтем одно из другого:

$$\mathbf{X}_m (r \mathbf{X}'_k)' - \mathbf{X}_k (r \mathbf{X}'_m)' + (\mu_k^2 - \mu_m^2) r \mathbf{X}_k \mathbf{X}_m = 0.$$

Теперь проинтегрируем полученное равенство по $[a, b]$. Первые два интеграла берутся по частям:

$$r \mathbf{X}_m \mathbf{X}'_k \Big|_a^b - \int_a^b r \mathbf{X}'_m \mathbf{X}'_k dr - \left[r \mathbf{X}_k \mathbf{X}'_m \Big|_a^b - \int_a^b r \mathbf{X}'_k \mathbf{X}'_m dr \right] + (\mu_k^2 - \mu_m^2) \int_a^b r \mathbf{X}_k \mathbf{X}_m dr = 0$$

Таким образом,

$$\int_a^b r \mathbf{X}_k \mathbf{X}_m dr = \frac{r (\mathbf{X}_m \mathbf{X}'_k - \mathbf{X}_k \mathbf{X}'_m) \Big|_a^b}{\mu_m^2 - \mu_k^2}.$$

При этом, во первых, мы нигде не пользовались тем, что μ_k, μ_m – собственные числа задачи Штурма–Лиувилля, так что эта формула верна при произвольных $\mu_k, \mu_m \in \mathbb{R}$. Во-вторых, если переписать эту формулу для функций $\mathbf{Z}(\mu_k r) = \mathbf{X}_k(r)$ и $\mathbf{Z}(\mu_m r) = \mathbf{X}_m(r)$, то, учитывая, что $\mathbf{X}'_k(r) = \mu_k \mathbf{Z}'(\mu_k r)$ и $\mathbf{X}'_m(r) = \mu_m \mathbf{Z}'(\mu_m r)$, получим общую формулу

$$\int_a^b r \mathbf{Z}(\mu_k r) \mathbf{Z}(\mu_m r) dr = \frac{r (\mu_k \mathbf{Z}(\mu_m r) \mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m \mathbf{Z}(\mu_k r) \mathbf{Z}'(\mu_m r)) \Big|_a^b}{\mu_m^2 - \mu_k^2}. \quad (3.1.15)$$

В случае, когда $\mu_k \neq \mu_m$ – корни уравнения (3.1.27), которое, как мы видели, равносильно выполнению краевых условий

$$\begin{cases} \alpha_1 \mathbf{Z}(\mu_k a) + \mu_k \beta_1 \mathbf{Z}'(\mu_k a) = 0, \\ \alpha_2 \mathbf{Z}(\mu_k b) + \mu_k \beta_2 \mathbf{Z}'(\mu_k b) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 \mathbf{Z}(\mu_m a) + \mu_m \beta_1 \mathbf{Z}'(\mu_m a) = 0 \\ \alpha_2 \mathbf{Z}(\mu_m b) + \mu_m \beta_2 \mathbf{Z}'(\mu_m b) = 0 \end{cases}$$

получаем, что в случае $\beta_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \left(\mu_k \mathbf{Z}(\mu_m r) \mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m \mathbf{Z}(\mu_k r) \mathbf{Z}'(\mu_m r) \right) \Big|_a^b &= \mathbf{Z}(\mu_m b) \underbrace{\mu_k \mathbf{Z}'(\mu_k b)}_{=-\frac{\alpha_2}{\beta_2} \mathbf{Z}(\mu_k b)} - \mathbf{Z}(\mu_k b) \underbrace{\mu_m \mathbf{Z}'(\mu_m b)}_{=-\frac{\alpha_2}{\beta_2} \mathbf{Z}(\mu_m b)} = \\ &= -\frac{\alpha_2}{\beta_2} \left(\mathbf{Z}(\mu_m b) \mathbf{Z}(\mu_k b) - \mathbf{Z}(\mu_k b) \mathbf{Z}(\mu_m b) \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

В случае $\beta_2 = 0$ картина ещё проще:

$$\left(\mu_k \mathbf{Z}(\mu_m r) \mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m \mathbf{Z}(\mu_k r) \mathbf{Z}'(\mu_m r) \right) \Big|_a^b = \mu_k \underbrace{\mathbf{Z}(\mu_m b) \mathbf{Z}'(\mu_k b)}_{=0} - \mu_m \underbrace{\mathbf{Z}(\mu_k b) \mathbf{Z}'(\mu_m b)}_{=0} \equiv 0.$$

Аналогично,

$$\left(\mu_k \mathbf{Z}(\mu_m r) \mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m \mathbf{Z}(\mu_k r) \mathbf{Z}'(\mu_m r) \right) \Big|_a \equiv 0.$$

Поэтому если $\mu_k \neq \mu_m$ – корни уравнения (3.1.27), значение интеграла

$$\int_a^b r \mathbf{X}_k(r) \mathbf{X}_m(r) dr = 0, \quad \mu_k \neq \mu_m.$$

□

Литература

- [1] *ВАТСОН Дж. Н. Теория Бесселевых функций* – М., Изд. Иностранной литературы, 1949.
<http://ega-math.narod.ru/Books/Watson.htm>