1. Цилиндрические функции

1.1. Определение и взаимосвязь цилиндрических функций

Уравнение Бесселя

$$x^2\mathbf{Z}''(x) + x\mathbf{Z}'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right)\mathbf{Z}(x) = 0. \tag{1.1}$$

Всякое решение уравнения Бесселя называется цилиндрической функцией.

Теорема 1.1.

Утв. *Общее решение уравнения Бесселя (1.1) задаётся каждой из формул*

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x) = c_3 H_\nu^{(1)}(x) + c_4 H_\nu^{(2)}(x), \qquad \nu \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_5 J_\nu(x) + c_6 J_{-\nu}(x) \qquad \nu \notin \mathbb{Z}.$$

1.2. Рекуррентные формулы для цилиндрических функций

Для функций Бесселя и Неймана имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$\left[x^\nu \mathbf{Z}_\nu\right]'(x) = x^\nu \mathbf{Z}_{\nu-1}(x), \qquad \left[x^{-\nu}\mathbf{Z}_\nu\right]'(x) = -x^{-\nu}\mathbf{Z}_{\nu+1}(x). \tag{1.2}$$

Если из второй формулы (**??**) вычесть первую, получим ещё одно соотношение:

$$\mathbf{Z}_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x}\mathbf{Z}_\nu(x) + \mathbf{Z}_{\nu-1}(x) = 0. \tag{1.3}$$

Для функций Бесселя и Неймана с целочисленным порядком $\nu = n \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$\mathbf{Z}_{-n}(x) = (-1)^n \mathbf{Z}_n(x), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

1.3. Интегральные формулы для функций Бесселя

Интегралы Ломмеля:

$$\int\limits_0^x t J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t)\,dt = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2}\Big(\alpha J_{\nu+1}(\alpha x) J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x)\Big), \quad \alpha \neq \beta, \tag{1.5}$$

$$\int\limits_0^x t\Big(J_\nu(\alpha t)\Big)^2 dt = \frac{x^2}{2}\Big(\alpha J_\nu'(\alpha x)\Big)^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)\Big(J_\nu(\alpha x)\Big)^2, \qquad \nu > -1. \tag{1.6}$$

Имеют место и более общие формулы:

$$\int\limits_a^b r\mathbf{Z}(\mu_k r)\mathbf{Z}(\mu_m r)\,dr = \frac{r\left(\mu_k \mathbf{Z}(\mu_m r)\mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m \mathbf{Z}(\mu_k r)\mathbf{Z}'(\mu_m r)\right)\Big|_a^b}{\mu_m^2 - \mu_k^2}; \tag{1.7}$$

$$\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2 = \int\limits_a^b r\mathbf{Z}(\mu r)\,dr = \frac{1}{2}\left[\left(r^2 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\mathbf{Z}^2(\mu r)\Big|_{r=a}^{r=b} + r^2\left(\mathbf{Z}'\right)^2(\mu r)\Big|_{r=a}^{r=b}\right]. \tag{1.8}$$

где $\mathbf{Z}(x)$ – произвольные решения уравнения Бесселя

$$(x\mathbf{Z}')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)\mathbf{Z} = 0.$$

1.4. Поведение функций Бесселя и Неймана

Теорема 1.2 (Поведение в окрестности нуля).

Усл. *Число $\nu > -1$, а числа μ_1 и μ_2 – действительные корни уравнения*

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta J'_\nu(\mu) = 0, \qquad \alpha,\ \beta \geqslant 0, \quad \alpha+\beta > 0.$$

Утв.

$$J_\nu(+0) = \begin{cases} \infty, & \nu < 0, \ \ \nu \notin \mathbb{Z}; \\ 0, & \nu < 0, \ \ \nu \in \mathbb{Z}; \\ 1, & \nu = 0; \\ 0, & \nu > 0; \end{cases} \qquad N_\nu(+0) = \infty, \qquad \nu \in \mathbb{R};.$$

1.5. Задачи Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0,\ R]$

Опр. 1.1. Через M мы будем обозначать следующий класс функций:

$$u(r) \in C^2(0,\ R]; \qquad \frac{L_\nu(u)}{\sqrt{r}} \in L_2(0,\ R).$$

Задачей Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0,\ R]$ мы будем называть задачу:
Найти числа λ и функции $0 \not\equiv u(r) \in M$ из условий:

$$\begin{cases} -(ru')' + \frac{\nu^2}{r}u = \lambda r u, & r \in (0,\ R), \quad \nu \geqslant 0; \\ \big|u(+0)\big| < \infty; & \\ \alpha u(R) + \beta u'(R) = 0, & \alpha,\ \beta \geqslant 0, \quad \alpha+\beta > 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

При этом функции $u \not\equiv 0$ называются **собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля**, а числа λ – **собственными числами задачи Штурма-Лиувилля**.

Теорема 1.3.

Утв.1. *Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1.*

Утв.2. *Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(r) \equiv const$.*

Теорема 1.4.

Утв. *Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – положительные корни уравнения

$$\alpha R\, J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

Теорема 1.5.

Утв. 1. *Функция* $\sqrt{r}\,\varphi(r)$ *разлагается в ряд Фурье на интервале* $(0,\,R)$

$$\sqrt{r}\,\varphi(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{\nu}\sqrt{r}\,J_{\nu}\left(\frac{\mu_k^{\nu}r}{R}\right), \tag{1.10}$$

$$\alpha_k^{\nu}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left[J_{\nu}'\left(\mu_k^{\nu}\right)\right]^2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\nu^2}{\left[\mu_k^{\nu}\right]^2}\right)J_{\nu}^2\left(\mu_k^{\nu}\right)}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_{\nu}\left(\frac{\mu_k^{\nu}r}{R}\right)dr,$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – *положительные корни уравнения*

$$\alpha R\,J_{\nu}(\mu)+\beta\mu J_{\nu}'(\mu)=0.$$

Утв. 2. *В случае* $\alpha=\nu=0$, *функция* $\sqrt{r}\,\varphi(r)$ *разлагается в ряд Фурье на интервале* $(0,\,R)$

$$\sqrt{r}\,\varphi(r)=\alpha_0^0\sqrt{r}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^0\sqrt{r}\,J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \tag{1.11}$$

$$\alpha_0^0=\frac{2}{R^2}\int\limits_0^R r\varphi(r)dr,\qquad \alpha_k^0=\frac{2}{\underbrace{\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}_{=0}+\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

где μ_k – *положительные корни уравнения* $J_1(\mu)=0$.

Заметим, что в формуле (1.10) можно (и нужно) сократить на $\sqrt{r}$. Зачем же его писать? Это делается для того, чтобы разлагаемая функция, даже если она будет неограничена в окрестности нуля, попал в нужный класс, то есть в класс функций, для которых справедлива теорема Стеклова, и ряд (1.10) сходился равномерно даже в окрестности нуля.

2. Сферические функции

2.1. Полиномы Лежандра

Опр. 2.1. Уравнение Лежандра:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy(x)}{dx}\right]+\lambda y(x)=0,\qquad x\in(-1,\,1). \tag{2.1}$$

Теорема 2.1.

Усл. *Ограниченная функция $y(x) \not\equiv 0$ есть решение уравнения (2.1).*

Утв. *1) $\lambda = n(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$;*

2) функция $y(x)$ является полиномом степени n, называемым **полиномом Лежандра**, *и может быть найдена по* **формуле Родрига:**

$$y(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]. \tag{2.2}$$

Теорема 2.2 (Рекуррентные формулы).

Утв. *Имеют место следующие соотношения*

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \qquad n \geqslant 1; \tag{2.3}$$
$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x), \qquad n \geqslant 1; \tag{2.4}$$
$$P'_n(x) = xP'_{n-1}(x) + nP'_{n-1}(x), \qquad n \geqslant 1; \tag{2.5}$$
$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), \qquad n \geqslant 1; \tag{2.6}$$
$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - xnP_n(x), \qquad n \geqslant 1. \tag{2.7}$$

Кроме приведённых формул, также весьма полезны следующие соотношения:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \qquad P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n, \qquad n \geqslant 1; \tag{2.8}$$
$$P_{2m+1}(0) = 0, \qquad P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m \geqslant 0. \tag{2.9}$$

Выпишем первые несколько полиномов Лежандра:

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}, \qquad P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}; \tag{2.10}$$
$$P_4(x) = \frac{35x^4-30x^2+3}{8}, \qquad P_5(x) = \frac{63x^5-70x^3+15x}{8}; \tag{2.11}$$
$$P_6(x) = \frac{231x^6-315x^4+105x^2-5}{16}, \ldots \tag{2.12}$$

Теорема 2.3 (Разложение в ряд по полиномам Лежандра от косинусов).

Усл. $f(\theta) \in C^2[0, \pi]$.

Утв. *$f(\theta)$ разлагается в следующий ряд Фурье*

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(cos\theta), \qquad f_k = \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \qquad \theta \in [0, \pi]. \tag{2.13}$$

При этом ряд (2.13) сходится к $f(\theta)$ ***равномерно*** *на всём сегменте $[0, \pi]$.*

2.2. Присоединённые функции Лежандра

Здесь мы будем рассматривать следующее уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy(x)}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x)=0,\qquad x\in(-1,\,1).\tag{2.14}$$

Теорема 2.4.

Усл. *Ограниченная функция $y(x)\not\equiv 0$ есть решение уравнения (2.14).*

Утв. *1) $\lambda=n(n+1)$, где $n=\overline{0,\,\infty}$;*

2) функция $y(x)$, называемая **присоединённой функцией Лежандра порядка** *k, может быть найдена по формуле:*

$$y(x)=P_n^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^mP_n(x)}{dx^m},\qquad m=\overline{0,\,n};\tag{2.15}$$

3) при этом $P_n^{(0)}(x)\equiv P_n(x)$ – полиномы Лежандра, а $P_n^m(x)\equiv 0$ при всех $m>n$.

Опр. 2.2. Функции

$$P_n^m(\cos\theta)\cos k\varphi,\qquad P_n^m(\cos\theta)\sin k\varphi,\qquad m=\overline{0,\,n},\quad n=\overline{0,\,\infty},\tag{2.16}$$

называются **сферическими гармониками**.

Теорема 2.5 (Разложение в ряд по сферическим гармоникам).

Усл. $g(\theta,\,\varphi)\in C^2,\ \ \theta\in[0,\,\pi],\ \ \varphi\in[0,\,2\pi],\ \ g(\theta,\,\varphi+2\pi)=g(\theta,\,\varphi)$.

Утв. *$g(\theta,\,\varphi)$ разлагается в следующий ряд Фурье*

$$g(\theta,\,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\alpha_{k0}}{2}P_k(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{k}P_k^m(\cos\theta)\left(\alpha_{km}\cos(m\varphi)+\beta_{km}\sin(m\varphi)\right)\right],\tag{2.17}$$

$$\alpha_{km}=\frac{2k+1}{2\pi}\cdot\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\,\cos(m\varphi)\int\limits_0^{\pi}g(\theta,\,\varphi)\,P_k^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta,\tag{2.18}$$

$$\beta_{km}=\frac{2k+1}{2\pi}\cdot\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\,\sin(m\varphi)\int\limits_0^{\pi}g(\theta,\,\varphi)\,P_k^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta,\tag{2.19}$$

При этом ряд (2.17) сходится к $g(\theta,\,\varphi)$ ***абсолютно и равномерно*** *на $\theta\in[0,\,\pi]$, $\varphi\in[0,\,2\pi]$.*